Хлуднев А.М.

Задачи теории упругости в негладких областях

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 539.3
ББК 22.251
Х 60

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 09-01-07016

Хлуднев А. М. **Задачи теории упругости в негладких областях.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 252 с. — ISBN 978-5-9221-1230-7.

Книга посвящена анализу краевых задач теории упругости. Подробно исследуются задачи о равновесии упругих тел, содержащих трещины с нелинейными краевыми условиями на берегах. Анализируются задачи о контакте упругих тел с неизвестным множеством контакта.

Книга предназначена научным работникам, преподавателям университетов, аспирантам и студентам, специализирующимся в области краевых задач механики деформируемого твердого тела и смежных областей прикладной математики.

ISBN 978-5-9221-1230-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Место теории упругости среди других физико-математических дисциплин определяется ее важностью с точки зрения приложений. Объектом исследования данной теории являются математические модели, описывающие многие реальные физические явления. В частности, с помощью таких моделей можно описывать широкий класс процессов деформирования твердых тел. Следует, однако, помнить, что указанные модели являются наиболее простыми среди других моделей, описывающих деформирование в твердых телах. Вместе с тем анализ более сложных моделей, как правило, опирается на результаты анализа моделей теории упругости. В этом смысле общепринятые модели теории упругости составляют основу при построении более сложных моделей в механике деформируемого твердого тела. После выбора модели в каждом конкретном случае возникает необходимость математического анализа ее внутренних свойств. Такой анализ должен включать доказательство существования решения и исследование зависимости решения от входящих параметров.

Данная монографии посвящена анализу моделей, получивших признание в последние годы. Речь идет о задачах теории трещин с краевыми условиями взаимного непроникания берегов и о контактных задачах для упругих тел разных размерностей. При формулировке задач этого класса приходится иметь дело с негладкими областями, содержащими разрезы (трещины). Классическая теория трещин характеризуется линейными краевыми условиями. Получаемые при этом математические модели являются линейными. Хорошо известно, что такие модели допускают взаимное проникание берегов трещины и в этом смысле имеют очевидный недостаток с точки зрения приложений. Мы будем рассматривать задачи с нелинейными краевыми условиями на берегах трещины, не допускающими взаимного проникания берегов. При этом краевые условия имеют вид системы равенств и неравенств, а задачи в целом относятся к классу задач с неизвестной границей.

В данной монографии представлены результаты, полученные после выхода в свет книги [45], которая содержит полученные к тому времени результаты для моделей упругого и неупругого деформирования тел с трещинами при краевых условиях взаимного непроникания берегов. Более того, мы ограничиваемся лишь рассмотрением моделей теории упругости, оставляя в стороне более сложные уравнения состояния.

В значительной степени такой выбор определяется желанием автора упростить изложение и получаемые при этом формулы.

Включенные в монографию результаты неоднократно обсуждались с коллегами. Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Б. Д. Аннину, В. А. Ковтуненко, А. С. Кравчуку, Н. Ф. Морозову, П. И. Плотникову, Е. М. Рудому, В. М. Садовскому, Я. Соколовскому (Jan Sokolowski), В. Н. Старовойтову за обсуждение различных аспектов работы и интерес к данному направлению исследований.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Некоторые сведения из анализа

1.1.1. Пространства Соболева. Пусть Ω — область в вещественном евклидовом пространстве R^m, $m = 1, \ldots, 3$. Через $x = (x_1, \ldots, x_m)$ будем обозначать элементы (точки) пространства R^m. Обозначим через $L^p(\Omega)$ пространство (классов эквивалентности) вещественных функций на Ω, суммируемых со степенью p относительно меры Лебега на Ω, $1 \leqslant p < \infty$. Это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = \int\limits_\Omega |v|^p.$$

При $p = \infty$ пространство $L^\infty(\Omega)$ есть пространство (классов эквивалентности) существенно ограниченных вещественных функций на Ω. В этом случае норма определяется так:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |v(x)|.$$

Если $p = 2$, то пространство $L^2(\Omega)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(u, v) = \int\limits_\Omega uv,$$

и при этом

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = (v, v).$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — целочисленный вектор (мультииндекс), $\alpha_i \geqslant 0$, и $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$. Через $D^\alpha v(x)$ обозначим производную порядка $|\alpha|$ функции $v(x)$:

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\, v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Символом $C^p(\overline{\Omega})$ будем обозначать пространство вещественных функций, непрерывных в замыкании $\overline{\Omega}$ вместе с производными до порядка $|\alpha| \leqslant p$. Это сепарабельное банахово пространство с нормой

$$\|v\|_{C^p(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\leqslant p} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha v(x)|.$$

Линейное пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций обозначим через $C_0^\infty(\Omega)$. Сходимость в этом пространстве определяется следующим образом. Говорят, что последовательность $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ *сходится* к $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, если носители всех φ_n лежат в компакте $B \subset \Omega$, а $D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi$ при $n \to \infty$ равномерно в Ω для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве $C_0^\infty(\Omega)$. Значение обобщенной функции v на элементе φ будем обозначать $\langle v, \varphi\rangle$.

Всякая локально интегрируемая функция v, заданная на Ω, определяет (регулярную) обобщенную функцию по формуле

$$\langle v, \varphi\rangle = \int_\Omega v\varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

В частности, если $v \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то v является обобщенной функцией. Существуют обобщенные функции, не являющиеся регулярными, например, δ_{x_0} — функция Дирака

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad x_0 \in \Omega.$$

Любая обобщенная функция v бесконечно дифференцируема, причем производные порядка $|\alpha|$ являются обобщенными функциями и определяются по формулам

$$\langle D^\alpha v, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle v, D^\alpha\varphi\rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пусть $l \geqslant 0$ — целое число, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$ определяется как множество функций v из $L^p(\Omega)$, которые имеют обобщенные производные $D^\alpha v$ из $L^p(\Omega)$. Пространство $W_p^l(\Omega)$ является банаховым относительно нормы

$$\|v\|_{W_p^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant l} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Для $p = 2$ мы будем использовать обозначение $H^l(\Omega)$ вместо $W_p^l(\Omega)$. В этом случае $H^l(\Omega)$ будет гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant l} (D^\alpha u, D^\alpha v) \tag{1.1}$$

и нормой

$$\|v\|^2_{H^l(\Omega)} = (v, v)_{H^l(\Omega)}.$$

В правой части (1.1) мы имеем в виду скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Для дальнейшего важна гладкость границы области $\Omega \subset R^m$. Будем говорить, что Ω — *липшицева область*, если ее граница Γ может быть локально представлена как график липшицевой функции на открытом подмножестве R^{m-1}, причем область Ω локально расположена по одну сторону от Γ. При этом постоянная Липшица считается одной и той же для всех точек $x \in \Gamma$. В этом случае будем говорить, что Γ является *границей класса* $C^{0,1}$(или *принадлежит классу* $C^{0,1}$). Термин «граница класса $C^{k,1}$» означает, что производные до порядка k от функций, локально описывающих границу, удовлетворяют условию Липшица.

Будем также говорить, что область Ω с границей Γ *удовлетворяет условию конуса*, если существует конечное покрытие $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ границы Γ ограниченными открытыми множествами Ω_i и для любого $i \in I$ существует такой открытый конус S_i с вершиной в нуле, что $x + S_i$ не пересекается с $\Omega_i \cap \Gamma$ для всех $x \in \Omega_i \cap \Omega$.

Ограниченные липшицевы области удовлетворяют условию конуса. Пример круга в R^2 с выброшенным отрезком показывает, что обратное, вообще говоря, неверно.

Сформулируем теорему, которая называется теоремой вложения. Из принадлежности функции одному пространству эта теорема дает возможность делать вывод о принадлежности этой же функции другому пространству.

Теорема 1.1. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset R^m$ является липшицевой. Тогда*:

1) *если $m > lp$ и $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{l}{m}$ или если $m = lp$ и $q \geqslant 1$ — любое конечное, то*

$$W^l_p(\Omega) \subset L^q(\Omega),$$

причем оператор вложения непрерывен;

2) *если $\dfrac{m}{p} + k < l \leqslant \dfrac{m}{p} + k + 1$, где k — неотрицательное целое, то*

$$W^l_p(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}),$$

причем оператор вложения непрерывен;

3) *если $m > lp$ и q удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant q < \dfrac{mp}{m - lp}$ или если $m \leqslant lp$ и $q \geqslant 1$ — любое конечное, то вложение $W^l_p(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ компактно.*

Мы будем использовать пространства Соболева и с нецелыми показателями. Именно, пусть $\Omega \subset R^m$ — область, $s = n + \sigma$, где $n \geqslant 0$ — целое, $\sigma \in (0, 1)$. Тогда по определению $v \in H^s(\Omega)$, если $v \in H^n(\Omega)$ и

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|^2}{|x-y|^{m+2\sigma}}\, dx\, dy < \infty \quad \text{при} \quad |\alpha| = n.$$

Норма в пространстве $H^s(\Omega)$ определяется так:

$$\|v\|^2_{H^s(\Omega)} = \|v\|^2_{H^n(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=n} \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|^2}{|x-y|^{m+2\sigma}}\, dx\, dy.$$

Обозначим далее через $H^s_0(\Omega)$ замыкание пространства $C^\infty_0(\Omega)$ в норме $H^s(\Omega)$ при $s \geqslant 0$. Множество всех линейных непрерывных функционалов на $H^s_0(\Omega)$ обозначим через $H^{-s}(\Omega)$. Пространство $H^{-s}(\Omega)$ называется *сопряженным* к $H^s_0(\Omega)$.

Пусть функция v определена на Ω. Ее продолжение нулем вне Ω обозначим через $\widetilde{v}$. Тогда для каждого положительного s пространство всех функций v, определенных в Ω и таких, что $\widetilde{v} \in H^s(R^m)$, будет обозначаться $H^s_{00}(\Omega)$. По определению полагаем

$$\|v\|_{H^s_{00}(\Omega)} = \|\widetilde{v}\|_{H^s(R^m)}. \tag{1.2}$$

Если граница области является липшицевой, то норма (1.2) в пространстве $H^s_{00}(\Omega)$ эквивалентна такой:

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=n} \left\{ \int\limits_{\Omega} |D^\alpha v|^2 \rho^{-2\sigma} \right\}^{1/2},$$

где ρ — расстояние от точки x до границы Γ; $s = n + \sigma$, $\sigma \in [0, 1)$.

Оказывается, что если область Ω является ограниченной и липшицевой, то

$$H^s_{00}(\Omega) = H^s_0(\Omega) \quad \text{при} \quad s - 1/2 \neq \text{целое}, \quad s \geqslant 0. \tag{1.3}$$

В то же время для всех $s > 0$ справедливы включения

$$H^s_{00}(\Omega) \subset H^s_0(\Omega) \subset H^s(\Omega).$$

Если граница Γ области Ω непрерывна, то функции из пространства $C^\infty_0(\Omega)$ плотны в $H^s_{00}(\Omega)$ для любого $s \geqslant 0$.

Что касается продолжения функций вне области, то отметим следующее утверждение.

Пусть Ω — ограниченная липшицева область в R^m. Тогда для всех $s > 0$ существует линейный оператор продолжения P_s из $H^s(\Omega)$ в $H^s(R^m)$, такой, что

$$P_s v|_\Omega = v$$

для всех $v \in H^s(\Omega)$. Другими словами, каждая функция $v \in H^s(\Omega)$ есть ограничение на Ω функции из $H^s(R^m)$.

1.1.2. О следах функций на границе. Пространства Соболева можно определять также и на многообразиях. В частности, если граница области является достаточно гладкой, то функции из пространства Соболева, заданные на области Ω, могут иметь след (граничное значение) на границе Γ. Например, если $\Omega \subset R^m$ — ограниченная липшицева область с границей Γ, то существует линейный непрерывный оператор следа, действующий из $H^1(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$, где норма в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$ определяется так:

$$\|v\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} + \int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^m}\, dx\, dy.$$

Аналогично, если $v \in H^2(\Omega)$, то при достаточной гладкости границы можно определить следы $v \in H^{3/2}(\Gamma)$, $\dfrac{\partial v}{\partial n} \in H^{1/2}(\Gamma)$, где n — единичная внешняя нормаль на границе.

Обозначим через $\partial^i/\partial n^i$ производную по нормали порядка i на Γ. Сформулируем общую теорему о следах для пространств $H^k(\Omega)$.

Теорема 1.2. *Пусть граница* Γ *принадлежит классу* $C^{k-1,1}$, $k \geqslant 1$ — *целое, а функция* v *принадлежит пространству* $H^k(\Omega)$. *Тогда существует линейный непрерывный оператор* $\pi : H^k(\Omega) \to \prod\limits_{i=0}^{k-1} H^{k-i-1/2}(\Gamma)$, *однозначно определяющий следы* $\pi v = (\pi_0 v, \ldots, \pi_{k-1} v)$ *функции* v *на* Γ:

$$\pi_i v \in H^{k-i-1/2}(\Gamma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Для гладких функций v, *определенных в* $\overline{\Omega}$, *имеют место формулы*

$$\pi_i v = \frac{\partial^i v}{\partial n^i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1 \text{ на } \Gamma.$$

Обратно, существует линейный непрерывный оператор $\prod\limits_{i=0}^{k-1} H^{k-i-1/2}(\Gamma) \to H^k(\Omega)$, *такой, что для любых заданных* $\phi_i \in H^{k-i-1/2}(\Gamma)$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, *можно найти функцию* $v \in H^k(\Omega)$, *обладающую свойствами*

$$\pi_i v = \phi_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1 \text{ на } \Gamma.$$

Приведем также утверждение, характеризующее принадлежность функции пространству $H^s_{00}(\Omega)$.

Теорема 1.3. *Пусть $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с границей Γ класса $C^{k,1}$, $k \geqslant 0$. Предположим, что $s - 1/2 \neq$ целое и $s - 1/2 = l + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, $l \geqslant 0$ — целое. Тогда для $s \leqslant k+1$*

$$v \in H^s_{00}(\Omega) \Longleftrightarrow v \in H^s(\Omega), \quad v = \frac{\partial v}{\partial n} = \ldots = \frac{\partial^l v}{\partial n^l} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Аналогичное утверждение характеризует функции из $H^s_0(\Omega)$, если мы примем во внимание соотношение (1.3). Именно, при тех же самых условиях имеем

$$v \in H^s_0(\Omega) \Longleftrightarrow v \in H^s(\Omega), \quad v = \frac{\partial v}{\partial n} = \ldots = \frac{\partial^l v}{\partial n^l} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Дополнительно отметим, что для $0 < s \leqslant 1/2$ имеет место равенство

$$H^s(\Omega) = H^s_0(\Omega).$$

В частности, $H^{1/2}(\Omega) = H^{1/2}_0(\Omega)$. В то же время $H^{1/2}_{00}(\Omega) \subset H^{1/2}_0(\Omega)$.

Для дальнейшего важно отметить, что в одномерном случае функции из $H^{1/2}(0,1)$, вообще говоря, не непрерывны и не ограничены:

$$H^{1/2}(0,1) \nsubseteq C(0,1), \quad H^{1/2}(0,1) \nsubseteq L^\infty(0,1).$$

Сейчас рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset R^3$ с границей Γ, содержащую достаточно гладкую незамкнутую поверхность γ без самопересечений (рис. 1.1). Будем считать, что γ является ориентируемой поверхностью, которую можно представить в параметрическом виде

$$x_i = x_i(y_1, y_2), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $(y_1, y_2) \in D$. Здесь $D \subset R^2$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей, причем отображение $y \to x(y) : \overline{D} \to \overline{\gamma}$ является взаимно однозначным и ранг матрицы $\partial x / \partial y$ равен двум во всех точках $\overline{D}$. Гладкость отображения $y \to x(y)$ будет варьироваться в зависимо-

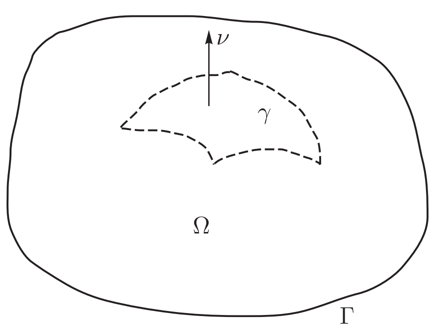

Рис. 1.1. Область с разрезом γ

сти от рассматриваемой задачи. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$. Рассмотрим единичную нормаль ν к γ и определим берега $\gamma^\pm$ поверхности γ. Знаки $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлениям ν соответственно. Обозначим границу области Ω_γ через $\partial\Omega_\gamma = \Gamma \cup \gamma^\pm$. Предполагаем, что существует замкнутое расширение Σ поверхности γ, делящее область Ω на две подобласти Ω_1, Ω_2 с границами $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$, такими, что $\gamma \subset \Sigma$. Предполагается, что $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma$. Будем говорить, что граница $\partial\Omega_\gamma$ принадлежит классу $C^{k,1}$, если $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ принадлежат $C^{k,1}$.

Пусть граница $\partial\Omega_\gamma$ принадлежит $C^{k-1,1}$, а функция $v \in H^k(\Omega_\gamma)$ задана, $k \geqslant 1$. Тогда однозначно определены нормальные производные на границе $\partial\Omega_\gamma$, причем

$$\frac{\partial^i v}{\partial n^i} \in H^{k-i-1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial^i v^\pm}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\gamma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Определим скачки функции $v \in H^k(\Omega_\gamma)$ на γ:

$$\left[\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right] = \frac{\partial^i v^+}{\partial \nu^i} - \frac{\partial^i v^-}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\gamma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Аналогичные обозначения используются и для замкнутого расширения Σ, $\gamma \subset \Sigma$, именно

$$\left[\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right] = \frac{\partial^i v^+}{\partial \nu^i} - \frac{\partial^i v^-}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\Sigma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Заметим, что в силу включения $v \in H^k(\Omega_\gamma)$ и единственности определения следа имеем

$$\frac{\partial^i v^+}{\partial \nu^i} = \frac{\partial^i v^-}{\partial \nu^i} \ \text{ на } \ \Sigma \setminus \gamma, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

или

$$\left[\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right] = 0 \ \text{ на } \ \Sigma \setminus \gamma, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Приведем ряд утверждений, характеризующих функции из пространств $H^k(\Omega_\gamma)$ и $H^{k-1/2}_{00}(\gamma)$. Первое утверждение характеризует функции, продолженные нулем вне поверхности γ.

Предложение 1.1. *Пусть $k \geqslant 1$, а γ принадлежит классу $C^{k-1,1}$. Тогда имеет место эквивалентность*

$$v \in H^{k-1/2}_{00}(\gamma) \Longleftrightarrow \overline{v} = \begin{cases} v & \text{на } \gamma \\ 0 & \text{на } \Sigma \setminus \gamma \end{cases} \in H^{k-1/2}(\Sigma).$$

Теорема 1.4. *Пусть граница $\partial\Omega_\gamma$ принадлежит классу $C^{k-1,1}$, а функция v принадлежит $H^k(\Omega_\gamma)$. Тогда существует линейный* *непрерывный оператор, который однозначно определяет на* $\partial\Omega_\gamma$ *величины*

$$\frac{\partial^i v}{\partial n^i} \in H^{k-i-1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial^i v^\pm}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\gamma), \quad \left[\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\gamma)$$

для $0 \leqslant i \leqslant k-1$. *Наоборот, существует линейный непрерывный оператор, такой, что для любых заданных*

$$\phi^\pm{}_i \in H^{k-i-1/2}(\gamma), \quad [\phi_i] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\gamma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

можно найти функцию $v \in H^k(\Omega_\gamma)$, *такую, что*

$$\frac{\partial^i v^\pm}{\partial \nu^i} = \phi^\pm{}_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \text{ на } \gamma.$$

Доказательство. Предположим, что Σ — гладкое замкнутое продолжение γ класса $C^{k-1,1}$, делящее область Ω на две подобласти Ω_1, Ω_2, так же, как и ранее. Границы $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ состоят из Σ^-, $\Gamma \cup \Sigma^+$ соответственно. По теореме 1.2 для $v \in H^k(\Omega_\gamma)$ имеем

$$\frac{\partial^i v^\pm}{\partial \nu^i} \in H^{k-i-1/2}(\Sigma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Ввиду единственности определения следов получаем

$$\left[\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right] = 0 \text{ на } \Sigma \setminus \gamma, \quad \left[\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right] \in H^{k-i-1/2}(\Sigma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

С учетом предложения 1.1 это означает, что

$$\left[\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\gamma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

что и доказывает первое утверждение теоремы 1.4.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\phi^\pm{}_i \in H^{k-i-1/2}(\gamma)$ заданы, $[\phi_i] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\gamma)$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Построим произвольное гладкое продолжение ϕ_i^- на Σ^-, такое, что

$$\widetilde{\phi}_i^- = \begin{cases} \phi^-{}_i & \text{на } \gamma^- \\ \psi_i & \text{на } \Sigma^- \setminus \gamma^- \end{cases} \in H^{k-i-1/2}(\Sigma), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Определим на Σ^+ функцию

$$\widetilde{\phi}_i^+ = \begin{cases} \phi^+{}_i & \text{на } \gamma^+ \\ \psi_i & \text{на } \Sigma^+ \setminus \gamma^+ \end{cases}, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Поскольку $[\phi_i] \in H_{00}^{k-i-1/2}(\Gamma)$ и $[\widetilde{\phi}_i] = 0$ на $\Sigma \setminus \gamma$, то в силу предложения 1.1 получаем $[\widetilde{\phi}_i] \in H^{k-i-1/2}(\Sigma)$. В частности, это влечет $\widetilde{\phi}^+{}_i = [\widetilde{\phi}_i] + \widetilde{\phi}^-{}_i \in H^{k-i-1/2}(\Sigma)$. Таким образом, по теореме 1.2 существуют функции $v_j \in H^k(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, такие, что $\partial^i u_j / \partial \nu^i$ совпадают с $\widetilde{\phi}^{\pm}{}_i$ на $\Sigma^{\pm}$. Определим функцию в Ω_γ:

$$v = \begin{cases} v_1 & \text{в} \quad \Omega_1 \\ v_2 & \text{в} \quad \Omega_2. \end{cases}$$

В силу свойства

$$0 = [\widetilde{\phi}_i] = \left[\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right] \quad \text{на } \Sigma \setminus \gamma, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

получаем $v \in H^k(\Omega_\gamma)$. Теорема 1.4 доказана.

Предложение 1.1 и теорема 1.4 справедливы и в двумерном случае. В качестве поверхности γ в этой ситуации выступает гладкая кривая $\gamma \subset \Omega$, $\Omega \subset R^2$.

1.1.3. Неравенства Корна. Нам понадобятся неравенства Пуанкаре, весьма полезные при получении различных оценок. Пусть $\Omega \subset R^m$ — ограниченная липшицева область с границей Γ. Предположим, что Γ разбита на две части: $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, $\operatorname{meas} \Gamma_0 > 0$. Обозначим

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \bigl\{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0\bigr\}.$$

Тогда существует постоянная c, такая, что справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \geqslant \ \text{c} \int\limits_{\Omega} v^2 \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Если $\Gamma_0 = \Gamma$, то для справедливости неравенства Пуанкаре гладкость границы не существенна. В этом случае $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = H^1_0(\Omega)$.

Приведем еще так называемое обобщенное неравенство Пуанкаре. Если $\Omega \subset R^m$ — ограниченная липшицева область, то существует постоянная c_0, такая, что

$$\Bigl(\int\limits_{\Omega} v\Bigr)^2 + \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \geqslant c_0 \int\limits_{\Omega} v^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Если v — вектор-функция, определенная на Ω, то с ней можно связать тензор малых деформаций $\varepsilon(v) = \{\varepsilon_{ij}(v)\}$, где

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\,(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

Для производной мы используем обозначение $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = v_{,i}$.

Большую роль в линейной теории упругости играют неравенства Корна. Мы приведем на этот счет два утверждения, наиболее часто применяемых в книге.

Предложение 1.2. *Пусть* $\Omega \subset R^m$ — *ограниченная область. Тогда существует постоянная* $c_1 > 0$, *зависящая лишь от* Ω, *такая, что*

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v) \geqslant c_1 \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)^m} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)^m. \tag{1.4}$$

Всюду в книге будет использоваться правило суммирования по повторяющимся индексам. Все величины с двумя нижними индексами будут предполагаться симметричными по этим индексам.

Неравенство вида (1.4) носит название *первого неравенства Корна*, и его доказательство весьма просто. Действительно, воспользуемся тем фактом, что пространство $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $H_0^1(\Omega)$, и докажем сначала неравенство для функций из $C_0^\infty(\Omega)^m$. Справедливость неравенства (1.4) для функций из $H_0^1(\Omega)^m$ будет следовать из указанной плотности. Итак, пусть $v = (v_1, \ldots, v_m) \in C_0^\infty(\Omega)^m$. Интегрируя по частям, находим

$$\int_\Omega v_{i,j} v_{j,i} = \int_\Omega (\operatorname{div} v)^2 \geqslant 0,$$

поэтому

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{4}\int_\Omega (v_{i,j} + v_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i}) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega v_{i,j}\,v_{j,i} + \frac{1}{2}\int_\Omega v_{i,j}\,v_{i,j} \geqslant \frac{1}{2}\int_\Omega v_{i,j}\,v_{i,j}.$$

Итак, справедливо неравенство

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v) \geqslant \frac{1}{2}\int_\Omega v_{i,j}\,v_{i,j}.$$

Правая часть здесь в силу неравенства Пуанкаре допускает оценку

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v_{i,j}\,v_{i,j} \geqslant c\int_\Omega v^2.$$

Поэтому приходим к неравенству (1.4) для функций из $C_0^\infty(\Omega)^m$, а следовательно, и для функций из $H_0^1(\Omega)^m$.

Подчеркнем, что первое неравенство Корна справедливо при любой гладкости границы области Ω.

Предложение 1.3. *Пусть* $\Omega \subset R^m$ — *ограниченная липшицева область. Тогда существует постоянная* $c_2 > 0$, *зависящая лишь от* Ω, *такая, что*

$$\int\limits_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v) + \int\limits_{\Omega} v^2 \geqslant c_2\|v\|^2_{H^1(\Omega)^m} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)^m. \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) носит название *второго неравенства Корна*. Его доказательство заметно сложнее, и мы приводить его здесь не будем.

Неравенство вида (1.4) имеет место и в случае пространств, занимающих промежуточное положение между $H^1_0(\Omega)^m$ и $H^1(\Omega)^m$. Именно, пусть $\Omega \subset R^m$ — ограниченная липшицева область с границей Γ, представленной в виде $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, $\operatorname{meas}\Gamma_0 > 0$. Тогда существует постоянная c_3, зависящая лишь от Ω, такая, что

$$\int\limits_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v) \geqslant c_3\|v\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)^m} \quad \forall\, v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)^m. \tag{1.6}$$

Неравенства Корна могут выполняться и для областей, не имеющих липшицеву границу. Например, если область Ω в R^2 имеет вид круга с выброшенным из него отрезком, то для функций из пространства $H^1(\Omega)$, равных нулю на внешней границе, справедливо неравенство вида (1.4).

1.1.4. Инфинитезимальные жесткие перемещения. В ряде краевых задач теории упругости оказывается, что все компоненты тензора малых деформаций равны нулю в области, т. е. $\varepsilon_{ij}(v) = 0$ в Ω для всех i, j. Векторы перемещений, соответствующие таким деформациям, имеют специальную структуру. Именно, пусть $\Omega \subset R^m$ — область и $\varepsilon_{ij}(v) = 0$ в Ω, $i, j = 1, \ldots, m$. Тогда $v \in R(\Omega)$. Здесь через $R(\Omega)$ обозначено пространство инфинитезимальных жестких перемещений вида

$$v(x) = Bx + C, \quad x \in \Omega,$$

где $C \in R^m$, а B — постоянная кососимметрическая матрица порядка m.

Легко проверить и обратное: если $v \in R(\Omega)$, то $\varepsilon_{ij}(v) = 0$ в Ω для всех i, j.

Таким образом, размерность пространства $R(\Omega)$ конечна и зависит от m.

В частности, при $m = 3$ пространство $R(\Omega)$ имеет следующую структуру:

$$R(\Omega) = \bigl\{\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \mid \rho(x) = Bx + C,\ x \in \Omega\bigr\},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2, c^3);$$

$$b_{ij}, c^i = \mathrm{const}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

При $m = 2$ имеем

$$R(\Omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Bx + C,\ x \in \Omega\},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2); \quad b, c^1, c^2 = \text{const}.$$

1.1.5. Разложение пространства $H^1(\Omega)^m$ в сумму подпространств. Пусть $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с липшицевой границей. Пространство Соболева $H^1(\Omega)^m$ можно разложить в сумму ортогональных подпространств $H^1(\Omega)^m = R(\Omega) \oplus R(\Omega)^{\perp}$. Указанное разложение будет зависеть от скалярного произведения, рассматриваемого в пространстве $H^1(\Omega)^m$.

Рассмотрим три различных скалярных произведения, индуцирующих эквивалентные нормы в пространстве $H^1(\Omega)^m$. Чтобы упростить формулы, рассмотрим случай $m = 2$, а для $m = 3$ приведем лишь окончательный результат.

Итак, пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с липшицевой границей Г. Рассмотрим три скалярных произведения в $H^1(\Omega)^2$:

$$(v, u) = \int_\Omega v_i u_i + \int_\Omega v_{i,j} u_{i,j}, \tag{1.7}$$

$$\{v, u\} = \int_\Omega v_i \int_\Omega u_i + \int_\Omega v_{i,j}\, u_{i,j}, \tag{1.8}$$

$$\langle v, u\rangle = \int_\Omega v_i u_i + \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(u). \tag{1.9}$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$, $u = (u_1, u_2)$. Эти скалярные произведения индуцируют три нормы:

$$\|v\|^2 = \int_\Omega v_i\, v_i + \int_\Omega v_{i,j}\, v_{i,j}, \tag{1.10}$$

$$|||v|||^2 = \int_\Omega v_i \int_\Omega v_i + \int_\Omega v_{i,j}\, v_{i,j}, \tag{1.11}$$

$$|v|^2 = \int_\Omega v_i\, v_i + \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v), \tag{1.12}$$

которые эквивалентны на пространстве $H^1(\Omega)^2$.

Докажем это утверждение. В силу неравенства Коши имеем

$$\int_\Omega v_i \leqslant \operatorname{meas}^{1/2}\Omega \left(\int_\Omega v_i^2\right)^{1/2}.$$

Поэтому
$$\int_\Omega v_i \int_\Omega v_i \leqslant \operatorname{meas}\Omega \int_\Omega v^2.$$
Это означает, что существует постоянная c_1, такая, что
$$|||v|||^2 \leqslant c_1 \|v\|^2. \tag{1.13}$$

В силу обобщенного неравенства Пуанкаре существует постоянная c_0, такая, что для всех $u \in H^1(\Omega)$ справедливо неравенство
$$\left(\int_\Omega u\right)^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \geqslant c_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$
Используя это неравенство, получаем
$$\int_\Omega v_i \int_\Omega v_i + \int_\Omega v_{i,j}\, v_{i,j} \geqslant c_2 \|v\|^2,$$
т. е.
$$|||v|||^2 \geqslant c_2 \|v\|^2. \tag{1.14}$$
Сравнивая (1.13), (1.14), заключаем, что нормы $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ эквивалентны.

Согласно второму неравенству Корна (1.5), нормы $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ также эквивалентны. Таким образом, введенные выше три нормы эквивалентны на пространстве $H^1(\Omega)^2$.

Теперь мы можем описать разложение пространства $H^1(\Omega)^2$ в прямую сумму ортогональных подпространств в зависимости от выбора скалярного произведения (1.7), (1.8) или (1.9). Рассмотрим пространство инфинитезимальных жестких перемещений
$$R(\Omega) = \bigl\{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Bx + C,\ x \in \Omega\bigr\},$$
где
$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2); \quad b, c^1, c^2 = \mathrm{const}.$$
Пусть $\rho \in R(\Omega)$, т. е. $\rho(x) = Bx + C$. Рассматривая скалярное произведение (1.7), получаем
$$(\rho, v) = c^i \int_\Omega v_i + b\int_\Omega (v_1 x_2 - v_2 x_1) + b\int_\Omega (v_{1,2} - v_{2,1}).$$

Ясно, что необходимое и достаточное условие для справедливости включения $v \in R(\Omega)^\perp$ имеет вид
$$\int_\Omega v_i = 0,\ i = 1,2; \int_\Omega (v_1 x_2 - v_2 x_1) + \int_\Omega (v_{1,2} - v_{2,1}) = 0. \tag{1.15}$$

Далее, для скалярного произведения (1.8) получаем

$$\{\rho, v\} = c^i \operatorname{meas}\Omega \int\limits_\Omega v_i + b(\int\limits_\Omega v_1 \int\limits_\Omega x_2 - \int\limits_\Omega v_2 \int\limits_\Omega x_1) + b\int\limits_\Omega (v_{1,2} - v_{2,1}).$$

Следовательно, необходимое и достаточное условие справедливости включения $v \in R(\Omega)^\perp$ выглядит так:

$$\int\limits_\Omega v_i = 0,\ i = 1, 2; \int\limits_\Omega (v_{1,2} - v_{2,1}) = 0. \tag{1.16}$$

Наконец, для скалярного произведения (1.9) получим

$$\langle \rho, v\rangle = c^i \int\limits_\Omega v_i + b\int\limits_\Omega (v_1 x_2 - v_2 x_1);$$

значит, необходимое и достаточное условие для справедливости включения $v \in R(\Omega)^\perp$ имеет вид

$$\int\limits_\Omega v_i = 0,\ i = 1, 2; \int\limits_\Omega (v_1 x_2 - v_2 x_1) = 0. \tag{1.17}$$

Сравнивая (1.15), (1.16), (1.17), заключаем, что $R(\Omega)^\perp$ зависит от выбора скалярного произведения в $H^1(\Omega)^2$.

Аналогичными рассуждениями можно получить описание $R(\Omega)^\perp$ для скалярных произведений вида (1.7)–(1.9) в пространстве $H^1(\Omega)^3$. В этом случае при выборе скалярного произведения в (1.7)–(1.9) нужно суммировать от 1 до 3, причем $v = (v_1, v_2, v_3)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$.

Повторяя рассуждения, заключаем:

1) для скалярного произведения (1.7):

$$R(\Omega)^\perp = \Big\{ v = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega)^3 \ \Big|\ \int\limits_\Omega v = 0;$$
$$\int\limits_\Omega (v_i\, x_j - v_j\, x_i) + \int\limits_\Omega (v_{i,j} - v_{j,i}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \Big\}; \tag{1.18}$$

2) для скалярного произведения (1.8):

$$R(\Omega)^\perp = \Big\{ v = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega)^3 \ \Big|\ \int\limits_\Omega v = 0;$$
$$\int\limits_\Omega (v_{i,j} - v_{j,i}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \Big\}; \tag{1.19}$$

3) для скалярного произведения (1.9):

$$R(\Omega)^{\perp} = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega)^3 \;\middle|\; \int\limits_{\Omega} v = 0; \right.$$
$$\left. \int\limits_{\Omega} (v_i\, x_j - v_j\, x_i) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \right\}. \tag{1.20}$$

Можно ввести и другие скалярные произведения в $H^1(\Omega)^m$, индуцирующие эквивалентные нормы.

Приведем полезное для дальнейшего следствие из второго неравенства Корна.

Предложение 1.4. *Пусть $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с липшицевой границей. Тогда существует постоянная c_3, такая, что имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v) \geqslant c_3 \int\limits_{\Omega} v_{i,j}\, v_{i,j}, \tag{1.21}$$

справедливое для всех функций $v \in H^1(\Omega)^m$, удовлетворяющих соотношениям

$$\int\limits_{\Omega} (v_{i,j} - v_{j,i}) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{1.22}$$

Доказательство утверждения проведем методом от противного. Если неравенство (1.21) не имеет места, то существует последовательность v^n, такая, что

$$\int\limits_{\Omega} (v^n_{i,j} - v^n_{j,i}) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{1.23}$$

и при этом

$$\int\limits_{\Omega} v^n_{i,j}\, v^n_{i,j} = 0, \quad \int\limits_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v^n)\, \varepsilon_{ij}(v^n) \to 0. \tag{1.24}$$

Не уменьшая общности, можно считать

$$\int\limits_{\Omega} v^n = 0. \tag{1.25}$$

В силу доказанного ранее неравенства (1.14) имеем

$$\|v^n\|^2_{H^1(\Omega)^m} \leqslant c_4 \left\{ \int\limits_{\Omega} v^n_i \int\limits_{\Omega} v^n_i + \int\limits_{\Omega} v^n_{i,j}\, v^n_{i,j} \right\},$$

откуда следует ограниченность v^n в пространстве $H^1(\Omega)^m$. В силу компактности вложения пространства $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ можно считать, что

$$v^n \to v \text{ сильно в } L^2(\Omega)^m. \tag{1.26}$$

Кроме того, согласно второму неравенству Корна получаем

$$\|v^{n+p} - v^n\|^2_{H^1(\Omega)^m} \leqslant$$
$$\leqslant c_5 \left\{ \int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v^{n+p} - v^n)\, \varepsilon_{ij}(v^{n+p} - v^n) + \|v^{n+p} - v^n\|^2_{L^2(\Omega)^m} \right\}.$$

Тогда с учетом (1.24), (1.26) заключаем, что последовательность v^n фундаментальна в $H^1(\Omega)^m$ и поэтому имеет предел, который обозначим через v. Таким образом, при $n \to \infty$

$$\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v^n)\, \varepsilon_{ij}(v^n) \to \int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v).$$

Учитывая (1.24), получаем

$$\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v) = 0.$$

Следовательно, $\varepsilon_{ij}(v) = 0,\ i, j = 1, \ldots, m$. Это означает, что $v \in R(\Omega)$, т. е. $v(x) = Bx + C$, где B — постоянная кососимметрическая матрица, C — постоянный вектор. Однако из (1.23), (1.25) следует, что:

$$\int\limits_\Omega v = 0, \quad \int\limits_\Omega (v_{i,j} - v_{j,i}) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

так что $B = 0,\ C = 0$; поэтому $v = 0$, что противоречит условию

$$\int\limits_\Omega v_{i,j}\, v_{i,j} = 0.$$

Утверждение доказано.

1.1.6. Минимизация функционалов. Вариационные неравенства. Пусть V — нормированное пространство. Обозначим через $V^\star$ пространство, сопряженное (двойственное) к V, т. е. множество всех линейных непрерывных функционалов на V. Норма в пространстве $V^\star$ определяется следующим образом:

$$\|v^\star\|_{V^\star} = \sup_{v \neq 0} \frac{|v^\star(v)|}{\|v\|_V},$$

где $v^\star(v)$ — значение функционала $v^\star$ на элементе v.

Пусть $\Pi : V \to R$ — произвольный функционал, а $u \in V$. Предположим, что существует линейный непрерывный на V функционал Π'_u, такой, что для каждого $v \in V$

$$\Pi'_u(v) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Pi(u + \lambda v) - \Pi(u)}{\lambda}.$$

В этом случае говорят, что Π имеет *производную Гато* Π'_u в точке u. При этом величина $\Pi'_u(v)$ называется вариацией (дифференциалом).

Если функционал $\Pi : V \to R$ такой, что производная Π'_u существует в любой точке u, то функционал Π называется *дифференцируемым*.

Множество $K \subset V$ называется *выпуклым*, если для всех $u_1, u_2 \in K$, $\lambda \in (0,1)$ справедливо включение $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in K$.

Пусть $K \subset V$ — выпуклое множество, а Π — дифференцируемый функционал на V. Рассмотрим задачу минимизации

$$\inf_{v \in K} \Pi(v). \tag{1.27}$$

Элемент $u \in K$ называется решением задачи (1.27), если

$$\Pi(u) = \inf_{v \in K} \Pi(v),$$

т. е.

$$\Pi(v) - \Pi(u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

Возьмем $\overline{u} \in K$, $\lambda \in (0,1)$, и подставим в последнее неравенство элемент $\lambda\overline{u} + (1-\lambda)u$ в качестве v. Получим

$$\frac{1}{\lambda}\Big(\Pi(u + \lambda(\overline{u} - u)) - \Pi(u)\Big) \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, найдем

$$u \in K, \quad \Pi'_u(\overline{u} - u) \geqslant 0 \quad \forall\, \overline{u} \in K. \tag{1.28}$$

Неравенство вида (1.28) называется *вариационным неравенством*. Оно получено как необходимое условие минимума функционала Π на множестве K. Отметим, что задача (1.27) является более общей по сравнению с задачей минимизации на всем пространстве V. Как известно, в этом последнем случае необходимое условие минимума для дифференцируемого функционала записывается с помощью уравнения Эйлера. Таким образом, вариационное неравенство (1.28) обобщает уравнение Эйлера и в частных случаях сводится к нему. Например, если $K = V$, то (1.28) есть не что иное, как уравнение Эйлера. Действительно, возьмем $\overline{u} = u \pm v$ и подставим в (1.28) в качестве пробного элемента, где $v \in V$ выбрано произвольно. Это дает уравнение Эйлера

$$\Pi'_u(v) = 0 \quad \forall\, v \in V.$$

Функционал $\Pi : V \to R$ называется *выпуклым*, если для всех $u, v \in V,\ \lambda \in (0,1)$, справедливо неравенство

$$\Pi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leqslant \lambda\Pi(u) + (1-\lambda)\Pi(v). \tag{1.29}$$

Функционал Π называется *строго выпуклым*, если равенство в (1.29) исключается при $u \neq v$.

Пусть функционал Π выпуклый и дифференцируемый. Можно доказать, что в этом случае

$$\Pi(v) - \Pi(u) \geqslant \Pi'_u(v-u) \quad \forall\, u, v \in V. \tag{1.30}$$

Действительно, из (1.29) следует, что

$$\Pi(v + \lambda(u-v)) - \Pi(v) \leqslant \lambda\left(\Pi(u) - \Pi(v)\right).$$

После деления этого соотношения на λ и перехода к пределу при $\lambda \to 0$ получаем неравенство

$$\Pi'_v(u-v) \leqslant \Pi(u) - \Pi(v),$$

доказывающее (1.30).

Мы уже отметили следующий факт: если $K \subset V$ — выпуклое множество, то вариационное неравенство

$$u \in K, \quad \Pi'_u(v-u) \geqslant 0 \quad \forall v\ \in K \tag{1.31}$$

является необходимым условием минимума функционала Π на множестве K в точке $u \in K$. Покажем, что условие (1.31) является достаточным условием минимума в случае выпуклого функционала Π. Предполагая справедливость (1.31), из (1.30) получаем

$$\Pi(v) - \Pi(u) \geqslant \Pi'_u(v-u) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in K.$$

Это означает, что

$$\Pi(v) - \Pi(u) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in K. \tag{1.32}$$

Полученные утверждения сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.5. *Вариационное неравенство* (1.31) *дает необходимое и достаточное условие минимума на множестве K для выпуклого и дифференцируемого функционала* Π.

Для дальнейшего будет полезно следующее утверждение.

Предложение 1.5. *Для любого выпуклого и дифференцируемого функционала Π функция*

$$\lambda^{-1}(\Pi(u + \lambda v) - \Pi(u))$$

переменного λ является неубывающей при заданных u, $v \in V$.