

Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий,
А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

АВТОВОЛНОВЫЕ
ПРОЦЕССЫ
В НЕЛИНЕЙНЫХ
СРЕДАХ
С ДИФФУЗИЕЙ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2010

УДК 517.926
ББК 22.161.6
А 22



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 09-01-07125*

Авторский коллектив:

Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.

Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. —
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 400 с. — ISBN 978-5-9221-1217-8.

В монографии предпринимается попытка создания единой теории диссипативных структур Тьюринга–Пригожина для систем параболических и гиперболических уравнений с малой диффузией. Для этого развиваются специальные асимптотические методы исследования проблем существования и устойчивости высококомодовых стационарных режимов в сингулярно возмущенных системах, позволяющие получить весьма тонкие утверждения о неограниченном росте количества устойчивых диссипативных структур (как стационарных, так и периодических по времени) при уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах. Вырабатываются общие представления о характере автоволновых процессов в нелинейных средах с малой диффузией на основе систематического анализа феномена буферности, высококомодовых аттракторов и диффузионного хаоса. Рассматриваются приложения из радиофизики, механики, экологии, нелинейной оптики и теории горения.

Для студентов старших курсов, аспирантов математических и физических факультетов университетов, специалистов по прикладной математике, теории колебаний, нелинейной динамике.

Ил. 17. Библиогр. 136 назв.

ISBN 978-5-9221-1217-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2010
© Коллектив авторов, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Введение | 6 |
| Глава 1. Теория диссипативных структур Тьюринга–Пригожина для систем с малой диффузией | 12 |
| § 1. Нелокальная постановка задачи | 12 |
| 1.1. Условия существования диссипативных структур (12). | |
| 1.2. Условия устойчивости (14). | |
| § 2. Локальная постановка задачи | 18 |
| 2.1. Локальные условия существования диссипативных структур (18). 2.2. Исследование устойчивости (22). 2.3. Завершение доказательства теоремы 1.2 (27). 2.4. Результаты численного исследования (29). | |
| § 3. Особенности динамики диссипативных структур. | 30 |
| 3.1. Алгоритмическая часть (30). 3.2. Выводы (34). 3.3. Обсуждение полученных результатов с позиций синергетики (36). | |
| § 4. Приложение к задаче о параметрической буферности. | 38 |
| 4.1. Описание объектов исследования (38). 4.2. Основной результат (44). | |
| § 5. Параметрическая буферность в телеграфном уравнении с маятниковой нелинейностью | 45 |
| 5.1. Существование высококомодовых состояний равновесия (46). | |
| 5.2. Устойчивость высококомодовых решений (50). | |
| § 6. Явление буферности в генераторе Ван-дер-Поля с запаздыванием | 54 |
| 6.1. Общая постановка проблемы (55). 6.2. Локальная постановка задачи (58). 6.3. Исследование устойчивости (62). 6.4. Заключение (68). | |
| Глава 2. Высокомодовые аттракторы нелинейных гиперболических уравнений | 71 |
| § 7. Существование высококомодовых параметрических колебаний у нелинейного телеграфного уравнения | 71 |
| 7.1. Постановка задачи и линейный анализ (71). 7.2. Принцип подобия (74). 7.3. Алгоритмическая часть (75). 7.4. Доказательство леммы 7.2 (82). | |
| § 8. Исследование устойчивости высококомодовых периодических решений | 84 |
| 8.1. Описание специальных алгоритмов (84). 8.2. Доказательство теоремы 8.1 (90). 8.3. Анализ примеров (91). | |

| | |
|--|------------|
| § 9. Высокочастотные автоколебания нелинейных гиперболических уравнений. | 96 |
| 9.1. Случай диффузии порядка единицы (96). 9.2. Доказательство теоремы 9.1 (100). 9.3. Случай малой диффузии (103). 9.4. Заключительные замечания (107). | |
| § 10. Высокочастотные аттракторы и явление буферности в задачах радиопроизводства. | 110 |
| 10.1. Высокочастотная буферность в <i>RCLG</i> -линии (110). 10.2. Явление буферности в <i>RCLG</i> -линии с малыми искажениями (115). 10.3. Автоколебания в системе Витта при резонансном спектре собственных частот (120). 10.4. Заключительные замечания (125). | |
| § 11. Явление буферности в механических системах. | 132 |
| 11.1. Явление буферности в задаче о взаимодействии струны с осциллятором (132). 11.2. Буферность в задаче о поперечных колебаниях вращающегося вала (138). 11.3. Явление буферности в системах с механическими соударениями (151). | |
| § 12. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения. | 157 |
| 12.1. Постановка задачи (157). 12.2. Основной результат (163). 12.3. Заключение (169). | |
| § 13. Особенности динамики нелинейного волнового уравнения в плоской области. | 172 |
| 13.1. Описание общего объекта исследования (172). 13.2. Построение асимптотики циклов в случае квадрата (173). 13.3. Алгоритм исследования устойчивости (176). 13.4. Алгоритм исследования устойчивости в случае резонансов (187). 13.5. Дополнительные замечания (195). 13.6. Существование и устойчивость инвариантных торов в случае прямоугольника (196). 13.7. Случай граничных условий Неймана (206). 13.8. Связь с проблемой возникновения турбулентности (207). 13.9. Переход к турбулентности в уравнении Гинзбурга–Ландау (210). 13.10. Связь с проблемой Ферми–Паста–Улама (213). | |
| § 14. Явление буферности в теории горения. | 215 |
| 14.1. Постановка задачи и основной результат (215). 14.2. Выводы (218). | |
| Глава 3. Диффузионная буферность. | 221 |
| § 15. Постановка проблемы и описание результатов. | 221 |
| 15.1. Диффузионная буферность в простейшем случае (221). 15.2. Случай двух пространственных переменных (226). 15.3. Основной случай (232). | |
| § 16. Доказательство основных теорем. | 237 |
| 16.1. Линейный анализ (237). 16.2. Нелинейный анализ (248). 16.3. Доказательство теоремы 15.4 (251). | |
| § 17. Высокочастотная буферность. | 257 |
| 17.1. Высокочастотная буферность в основном случае (257). 17.2. Высокочастотная буферность в случае внутренней точки поворота (267). 17.3. Высокочастотная квазинормализация (279). 17.4. Квазиустойчивость нулевого положения равновесия (283). | |

| | |
|---|------------|
| § 18. Буферность в задаче хищник–жертва | 290 |
| 18.1. Общие свойства рассматриваемой математической модели (290). 18.2. Описание результатов (292). 18.3. Обоснование теоремы 18.2 (296). 18.4. Существование и устойчивость однородного цикла (300). 18.5. Случай двумерной области (302). 18.6. Случай внутренней точки поворота (307). 18.7. Заключительные замечания (310). | |
| Глава 4. Биологические и физические параболические системы . . | 312 |
| § 19. Общие свойства простых физических систем | 312 |
| 19.1. Определения (312). 19.2. Существование и устойчивость бегущих волн (320). | |
| § 20. Особенности динамики, связанные с переходом от простых физических к биологическим системам | 328 |
| 20.1. Основной результат (328). 20.2. Доказательство теоремы 20.1 (335). 20.3. Динамика квазинормальной формы (342). 20.4. Устойчивость и бифуркация бегущих волн (344). | |
| § 21. О некоторых особенностях динамики сложных физических систем | 347 |
| 21.1. Общая постановка задачи (348). 21.2. Локальная постановка задачи (350). 21.3. Существование периодических диссипативных структур (354). 21.4. Алгоритм исследования устойчивости (357). 21.5. Основные результаты (363). 21.6. О реализуемости условий теоремы 21.2 (368). | |
| § 22. Диффузионный хаос | 373 |
| 22.1. Многомодовый хаос (374). 22.2. Маломодовый хаос (379). 22.3. Общая концепция нелинейной среды с диффузией (381). | |
| Заключение | 386 |
| Список литературы | 391 |

*255-летию Московского университета
посвящают эту книгу авторы,
его благодарные воспитанники*

Введение

Процессы спонтанного нарушения высокой степени симметрии макроскопического состояния сложной системы являются одним из удивительных природных феноменов. В результате этих процессов возникают так называемые диссипативные структуры, т. е. устойчивые самоподдерживающиеся образования с характерными пространственно-временными формами. Подобные структуры представляют интерес для исследователей различных специальностей. Биологов они интересуют в связи с вопросом происхождения жизни, с проблемами предбиологической эволюции, морфогенеза; экологов — в связи с изучением законов функционирования биоценозов; физиков — в связи с возможностью создания новых типов автогенераторов на распределенных структурах и т. д. Следует отметить, что для возникновения феномена самопроизвольного нарушения симметрии с понижением ее степени система с необходимостью должна быть открытой, а ее математическая модель — нелинейной.

Итак, вопрос о свойствах нелинейных сред, где формируются устойчивые самоподдерживающиеся структуры, и об общих закономерностях их возникновения является одним из фундаментальных в современном естествознании, базирующемся на концепции нелинейного мира. При изучении этой проблемы широко используются параболические системы типа реакция–диффузия (см., например, [5, 18, 28, 89, 94]). В частности, указанные параболические системы, рассматриваемые в некоторой ограниченной области пространства и дополненные условиями Неймана на ее границе, используются при моделировании процесса формирования пространственно неоднородных структур в однородных средах. Для описания данного феномена применяется, как правило, бифуркационная теорема Тьюринга–Пригожина [18], в основе которой лежит открытое А. Тьюрингом [136] явление диффузионной неустойчивости пространственно однородного состояния равновесия.

Теорема Тьюринга–Пригожина описывает ситуацию, когда при определенном изменении параметров системы однородное состояние равновесия теряет устойчивость (за счет пространственно неоднородных возмущений), а в его окрестности появляются простейшие диссипативные структуры — устойчивые пространственно неоднородные состояния равновесия. Однако на вопрос о судьбе устойчивых диссипативных структур при удалении от точки бифуркации и, тем более, об общих закономерностях динамики системы указанная теорема ответа

не дает. В связи с этим становятся актуальными другие пути исследования, прежде всего — теоретического характера (подкрепленные, если это необходимо, численным анализом).

В настоящей работе предлагается один из возможных путей решения сформулированной проблемы, заключающийся в применении специальных локальных методов к сингулярно возмущенным системам. А именно, ниже исследуются автоволновые процессы в системах с малыми коэффициентами диффузии. Как отмечено в работе [77], мотивировкой для таких постановок задач служит то обстоятельство, что здесь мы находимся в окрестности наиболее глубокого вырождения. А это, в свою очередь, позволяет выявить ряд характерных особенностей динамики рассматриваемых систем, главная из которых — явление буферности.

О феномене буферности принято говорить, если в фазовом пространстве некоторой системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т. д.). Конечно, в случае сосуществования небольшого числа устойчивых состояний равновесия или циклов буферность свидетельствует о наличии «порядка». Однако если их число излишне велико, то может происходить спонтанный переход системы с одного устойчивого стационара на другой под действием случайных возмущений начальных условий — и мы имеем так называемый флуктуационный хаос. Подробнее об этом будет сказано в главе 1.

В системах параболических уравнений типа реакция–диффузия впервые это интересное явление численными методами было обнаружено в работе [26] при исследовании одной математической модели задачи хищник–жертва, представляющей собой систему двух параболических уравнений с запаздыванием. Там же была поставлена проблема теоретического объяснения данного феномена на примере модельной параболической системы типа реакция–диффузия без запаздывания, получившая впоследствии свое решение в цикле публикаций [40, 41, 49, 52, 65].

Исследование феномена буферности в краевых задачах гиперболического типа начато в заметке [55]. Затем оно было продолжено в статьях [51, 53, 69], а свое логическое завершение получило в монографии [59]. Результаты этих и ряда последующих работ показали, что буферность характерна для широкого класса физических процессов, описываемых гиперболическими уравнениями (например, для автоколебательных процессов в распределенных электрических и механических системах). В связи с этим следует напомнить, что на принципиальную возможность существования сразу нескольких устойчивых циклов в классическом автогенераторе, содержащем отрезок длинной линии, указывал еще А. А. Витт [16, 17] в начале 30-х годов прошлого века. Однако в полном объеме феномен буферности как таковой в то

время изучен не был. Только значительно позднее увеличение числа возможных устойчивых режимов при изменении параметров автогенератора было замечено физиками экспериментально [1]. И наконец, необходимо добавить, что достаточно полное исследование (как теоретическое, так и экспериментальное) явления буферности для широкого класса автогенераторов с отрезком длинной линии в цепи обратной связи завершено лишь недавно (см. [35, 36, 61–63, 76]).

Во избежание терминологической путаницы следует особо остановиться на различии таких понятий, как буферность и мультистабильность. Напомним (см., например, [123]), что мультистабильность означает сосуществование в фазовом пространстве системы сразу нескольких аттракторов. Далее, представим себе ситуацию, когда в некоторой системе при любом допустимом изменении параметров реализуется ровно сто устойчивых циклов. Ясно, что здесь мы имеем дело с мультистабильностью. Однако буферности в данной системе не будет, так как, и это ключевой момент, понятие «буферность» предполагает наличие некоего бифуркационного процесса, в результате которого происходит неограниченное увеличение числа сосуществующих аттракторов. Упомянутый процесс характерен, главным образом, для систем с распределенными параметрами, хотя, как будет показано ниже, может наблюдаться и в системах с конечным числом степеней свободы.

Как уже было сказано ранее, наша цель — попытаться дать ответ на вопрос о том, что в принципе может происходить в нелинейных средах при неограниченном уменьшении коэффициентов диффузии. Точнее говоря, на основе систематического анализа феномена буферности, высокомодовых аттракторов и диффузионного хаоса как в параболических системах типа реакция–диффузия, так и в аналогичных нелинейных гиперболических системах мы пытаемся выработать некие общие представления о динамике в средах с малой диффузией. Следует добавить, что наши выводы ни в коей мере не претендуют на полноту, однако могут послужить хорошей опорой для интуиции при анализе конкретных систем.

Уместно подчеркнуть, что с позиций общей теории диссипативных структур [18] нет принципиальной разницы между параболическими системами и рассматриваемыми в данной работе классами гиперболических уравнений с граничными условиями Неймана. Действительно, поскольку упомянутые гиперболические краевые задачи допускают пространственно однородные решения, то для них также актуальна проблема нарушения максимальной пространственной симметрии и возникновения автоволн. Поэтому правомерно говорить о нелинейных гиперболических средах с диффузией, понимая, как и в случае параболических уравнений, под коэффициентом диффузии соответствующий коэффициент (скалярный или матричный), стоящий перед второй производной по пространственной переменной. Дополнительным аргументом в пользу подобной трактовки диффузии в гиперболических

системах служит то обстоятельство, что при определенных условиях и при уменьшении диффузии как в гиперболическом, так и в параболическом случае наблюдается одно и то же явление — так называемый диффузионный хаос [108]; близкие вопросы рассмотрены также в [73]. Подробнее об этом будет сказано в главе 4.

В главе 1 данной монографии проведено распространение классической бифуркационной теоремы Тьюринга–Пригожина на системы параболических уравнений с малой диффузией, что позволяет в полном объеме выявить все характерные особенности динамики стационарных (т. е. не зависящих от времени) диссипативных структур, главная из которых — неограниченный рост их количества (в том числе и устойчивых) при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах. При решении указанной проблемы разрабатываются специальные методы исследования высококомодовых режимов в сингулярно возмущенных системах с диффузией, которые оказываются полезными и в других задачах. Например, в этой же главе с помощью упомянутых методов для систем параболических и гиперболических уравнений с малой диффузией решается проблема параметрического возбуждения автоволн, а точнее говоря, устанавливается феномен параметрической буферности. Суть данного явления заключается в том, что при надлежащем уменьшении коэффициентов диффузии и при подходящем выборе параметров внешнего воздействия можно гарантировать существование в рассматриваемых системах любого фиксированного числа устойчивых периодических по времени решений. При написании главы 1 существенно использовались результаты работ [60, 66, 70, 75].

Глава 2 посвящена проблеме существования высококомодовых (т. е. быстро осциллирующих по пространственным переменным) аттракторов в системах гиперболических уравнений с малыми коэффициентами диффузии. А именно, с помощью развитых в предыдущей главе методов изучаются следующие вопросы. Во-первых, продолжается исследование феномена параметрической буферности в гиперболических краевых задачах, причем рассматривается такая постановка проблемы, когда высококомодовый характер возбуждаемых параметрических колебаний проявляется наиболее ярко. Во-вторых, исследуется вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных циклов (т. е. циклов, нетривиально зависящих от пространственных переменных) у некоторого достаточно широкого класса нелинейных телеграфных уравнений с граничными условиями Неймана на отрезке, как в гладкой постановке, так и в предположении о малости диффузии (в последнем случае речь идет только о высококомодовых циклах). В-третьих, приводятся результаты о высококомодовых автоколебаниях и явлении буферности в ряде конкретных математических моделей из радиофизики, механики, нелинейной оптики и теории горения. Наконец, в-четвертых, изучается динамика нелинейного волнового уравнения в плоской

области. Показывается, что при переходе от отрезка к прямоугольнику может произойти существенное ее усложнение. Полученные на этом пути результаты позволяют для рассматриваемого класса уравнений обосновать и дополнить известную гипотезу Ландау о природе турбулентности.

Глава 3 содержит полное исследование проблемы диффузионной буферности, берущей свое начало из экологии [26]. Следует отметить, что здесь впервые приводятся подробные доказательства ряда результатов, анонсированных в [52, 108]. Оригинальными являются и все содержащиеся в этой главе результаты, касающиеся существования и устойчивости высокомодовых циклов в системах параболических уравнений с малыми коэффициентами диффузии.

В главе 4 подробно анализируются принадлежащие Ю. С. Колесову понятия биологических и физических параболических систем [54, 89]. Эти понятия были выработаны в связи с проблемой адекватности математических моделей биофизики и экологии как некоторые объективные критерии оценки их качества. Напомним, что понятия биологических и физических систем относятся к параболическим краевым задачам типа реакция–диффузия с граничными условиями Неймана на отрезке или в ограниченной области. При этом основное предположение о рассматриваемых системах состоит в том, что они должны иметь пространственно однородный (не зависящий от пространственной переменной) цикл, устойчивый по отношению к пространственно однородным возмущениям. Тогда, следуя [54, 89], некоторую систему из описанного класса назовем простой физической, если ее однородный цикл остается устойчивым (по отношению к произвольным возмущениям начальных условий) при любом допустимом изменении коэффициентов диффузии. Если же при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии однородный цикл теряет устойчивость, то соответствующую систему отнесем к числу сложных физических или биологических (различие между этими двумя классами носит уже достаточно специальный характер и связано со свойствами области неустойчивости однородного цикла в пространстве параметров).

В работе [54] отмечено, что возникновение пространственно неоднородных режимов в простых физических параболических системах связано в основном с хорошими свойствами геометрии области, причем в сложных физических и биологических системах эти режимы обычно неустойчивы. Скажем, для простых физических систем на окружности типичны бегущие волны, которые неустойчивы в сложных физических и биологических системах. В главе 4 на основе результатов статьи [42] это обосновывается для систем с малой диффузией.

Другие результаты главы 4 относятся к исследованию особенностей динамики в пограничных ситуациях, когда при изменении некоторых параметров рассматриваемой параболической системы происходит ее переход из класса простых физических в класс биологических или

сложных физических краевых задач. Как установлено в [64], в первом случае соответствующий переход описывается с помощью известного уравнения Курамото–Сивашинского (см., например, [100]), играющего здесь ту же роль, что и система уравнений Гинзбурга–Ландау в задаче о локальной динамике параболических систем с малой диффузией [39, 43, 44, 79, 82, 85]. Во втором случае (см. [74]) удастся получить результат, аналогичный доказанному в главе 1 для стационарных диссипативных структур. А именно, показывается, что при определенных условиях количество устойчивых пространственно неоднородных циклов в рассматриваемой системе неограниченно увеличивается при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах.

Таким образом, в настоящей монографии получили освещение следующие три основных вопроса.

- а). Выявлена роль феномена буферности в динамике сложных систем и в процессах самоорганизации. Можно утверждать, что буферность — универсальный природный феномен, наблюдающийся в нелинейных средах с различными свойствами. Однако если в потенциально автоколебательных средах, описываемых гиперболическими уравнениями, это явление вполне естественно и, более того, ожидаемо, то его реализация в нелинейных диссипативных средах — факт весьма нетривиальный.
- б). Предпринята попытка систематизации всех имеющихся к настоящему времени результатов о феномене буферности, высококомодовых аттракторах и диффузионном хаосе в параболических и гиперболических краевых задачах и создания единой концепции нелинейной среды с диффузией.
- в). Развита специальная методика анализа проблем существования и устойчивости высококомодовых стационарных режимов в сингулярно возмущенных системах, позволившие получить весьма тонкие утверждения о неограниченном росте количества устойчивых диссипативных структур (как стационарных, так и периодических по времени) при уменьшении коэффициентов диффузии.

Монография публикуется при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09-01-07125).

Глава 1

**ТЕОРИЯ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР
ТЬЮРИНГА–ПРИГОЖИНА
ДЛЯ СИСТЕМ С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ**

§ 1. Нелокальная постановка задачи

В этом параграфе в самых общих терминах дается описание условий, при которых в системе типа реакция–диффузия с граничными условиями Неймана на отрезке происходит неограниченное увеличение числа устойчивых стационарных диссипативных структур при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах.

1.1. Условия существования диссипативных структур. На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (1.1)$$

где $u \in \mathbb{R}^2$; $\nu > 0$ — параметр, отвечающий за пропорциональное изменение коэффициентов диффузии; матрица $-D$ гурвицева; вектор-функция $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Основное предположение о краевой задаче (1.1) заключается в том, что $u = 0$ — единственное ее пространственно однородное состояние равновесия, глобально экспоненциально устойчивое в рамках точечной модели

$$du/dt = F(u). \quad (1.2)$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий) краевой задачи (1.1) возьмем соболевское пространство $\mathring{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$, состоящее из вектор-функций класса W_2^2 , удовлетворяющих граничным условиям из (1.1). Понятие фазового пространства полезно тем, что позволяет без принципиальных изменений распространить на бесконечномерный случай основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, касающиеся устойчивости по Ляпунову, интегральных

многообразий, теоремы об устойчивости по первому приближению и др. Поэтому ниже применительно к задаче (1.1) и ко всем другим встречающимся краевым задачам соответствующие факты используются без каких-либо дополнительных пояснений.

Рассмотрим вопрос о динамике стационарных диссипативных структур краевой задачи (1.1) по параметру ν . Наиболее простая и естественная ситуация, которая здесь может возникнуть, описывается следующими двумя условиями.

Условие 1.1. *Считаем, что квадратичный многочлен*

$$P(\nu) = \det(A - \nu D), \quad A = F'_u(0), \quad (1.3)$$

имеет корни $0 < \nu_1 < \nu_2$.

Сформулированное ограничение обеспечивает так называемую тьюринговскую неустойчивость нулевого решения краевой задачи (1.1). Действительно, линеаризуя ее на нулевом состоянии равновесия и применяя к получившейся линейной системе метод Фурье по функциям $\cos nx$, $n = 0, 1, \dots$, убеждаемся, что за устойчивость решения $u = 0$ в рамках распределенной модели (1.1) отвечает расположение спектра матриц $A - n^2\nu D$, $n = 0, 1, \dots$. Заметим, далее, что из предполагаемой экспоненциальной устойчивости решения $u = 0$ в рамках точечной модели (1.2) вытекает гурвицевость матрицы A , а значит, и неравенства $\text{tr}(A - n^2\nu D) < 0$ при всех $n \geq 0$. А отсюда и из очевидного представления $\det(A - n^2\nu D) = P(n^2\nu)$ заключаем, что состояние равновесия $u = 0$ задачи (1.1) экспоненциально неустойчиво при

$$\nu \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\nu_1/n^2, \nu_2/n^2). \quad (1.4)$$

Условие 1.2. *Пусть существуют такие значения α и β , $\nu_1 < \alpha < \beta < \nu_2$, что при всех*

$$\alpha \leq \nu \leq \beta, \quad (1.5)$$

во-первых, краевая задача (1.1) имеет пару непрерывных по ν диссипативных структур

$$u_1(x, \nu) = u_0(x, \nu), \quad u_2(x, \nu) = u_0(\pi - x, \nu); \quad (1.6)$$

во-вторых, отрицательны действительные части собственных значений краевой задачи

$$\nu D h'' + A(x, \nu) h = \lambda h, \quad h'(0) = h'(\pi) = 0, \quad (1.7)$$

где $A(x, \nu) = F'_u(u_0(x, \nu))$, а штрих без указания нижнего индекса в (1.7) и во всех других встречающихся ниже аналогичных краевых задачах означает дифференцирование по x .

Обращаем внимание на естественность сформулированного условия, так как, что уже отмечалось, устойчивые диссипативные структуры (1.6) могут возникать в системе (1.1) в результате классической бифуркации Тьюринга–Пригожина [18]. Отметим еще, что в рамках условий 1.1, 1.2 простейшей является ситуация, когда диссипативные структуры (1.6) непрерывно продолжаются по параметру ν на весь тьюрингский интервал $\nu_1 < \nu < \nu_2$ и

$$u_0(x, \nu_1) \equiv u_0(x, \nu_2) \equiv 0. \quad (1.8)$$

Опираясь на условие 1.2, с помощью так называемого *принципа подобия* (см. [60, 66, 75]) можно построить и другие диссипативные структуры краевой задачи (1.1). Суть этого принципа состоит в следующем. Продолжим фигурирующую в (1.6) вектор-функцию $u_0(x, \nu)$ по переменной x на отрезке $[-\pi, 0]$ четным образом, а затем на всю ось x — по периодичности с периодом 2π . Тогда, как легко видеть, при любом натуральном n функция $u_0(nx, n^2\nu)$ по-прежнему будет удовлетворять краевой задаче (1.1), если, конечно, $n^2\nu \in [\alpha, \beta]$. А отсюда очевидным образом вытекает, что на каждом из отрезков

$$\alpha/n^2 \leq \nu \leq \beta/n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

краевая задача (1.1) имеет две диссипативные структуры, задающиеся равенствами

$$u_{1,n} = u_0(nx, n^2\nu), \quad u_{2,n} = u_0(\pi - nx, n^2\nu). \quad (1.10)$$

Заметим, что с ростом n отрезки (1.9) начинают пересекаться во все большем числе, а значит, количество сосуществующих диссипативных структур (1.10) у краевой задачи (1.1) при $\nu \rightarrow 0$ неограниченно растет. Действительно, при любом фиксированном ν существуют только те диссипативные структуры (1.10), номера n которых удовлетворяют неравенствам

$$\sqrt{\alpha/\nu} \leq n \leq \sqrt{\beta/\nu}.$$

Количество же n_* таких номеров при $\nu \rightarrow 0$ неограниченно увеличивается, а точнее говоря, имеет порядок $\nu^{-1/2}$.

1.2. Условия устойчивости. Сформулируем теперь группу ограничений, обеспечивающих устойчивость диссипативных структур (1.10) на каждом из отрезков (1.9). С этой целью введем в рассмотренные спектральные задачи

$$\begin{aligned} n^2\nu Dh'' + A(x, n^2\nu)h &= \lambda h, \\ h'(0) = h'(n\pi) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\nu Dh'' + A(x, \nu)h = \lambda h, \quad h'(0) = 0, \quad (1.12)$$

где матрица $A(x, \nu)$ та же, что и в (1.7), параметр ν в случае задач (1.11) меняется на отрезках (1.9), а в случае (1.12) — на отрезке (1.5). Считаем еще, что задача (1.12) рассматривается на полуоси $0 \leq x < \infty$, а при $x \rightarrow \infty$ для нее ставится условие ограниченности.

Обозначим через $\sigma_n(\nu)$ спектр задачи (1.11), состоящий, как известно (см. [110]), из счетного числа собственных значений, а через $\sigma(\nu)$ — спектр задачи (1.12). Нетрудно заметить, что при всех ν из отрезков (1.9) справедливы включения

$$\sigma_n(\nu) \subset \sigma(n^2\nu), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Действительно, если λ_0 — произвольное собственное значение задачи (1.11), то продолжая отвечающую ему собственную функцию $h_0(x)$ четным образом на отрезок $[-n\pi, 0]$, а затем на всю ось x по периодичности с периодом $2\pi n$, убеждаемся, что λ_0 будет собственным значением и задачи (1.12) (при замене в ней ν на $n^2\nu$).

Условие 1.3. Считаем, что при всех ν из отрезка (1.5) уравнение

$$\nu Dh'' + A(x, \nu)h = 0$$

не имеет нетривиальных ограниченных на полуоси $x \geq 0$ решений, удовлетворяющих условию $h'(0) = 0$.

Сформулированное ограничение означает, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1.12). Однако, что характерно для данного случая, у нее всегда есть непрерывная ветвь собственных значений, касающаяся мнимой оси в точке $\lambda = 0$. Для построения указанной ветви применим следующий специальный прием. Положим в (1.12)

$$h = h_1(x) \cos zx - h_2(x) \sin zx, \quad (1.14)$$

где z — непрерывный параметр, причем $|z| \ll 1$, а функции h_1, h_2 — решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \nu D(h_1'' - 2zh_2' - z^2h_1) + A(x, \nu)h_1 &= \lambda h_1, & h_1'(0) &= h_1'(\pi) = 0, \\ \nu D(h_2'' + 2zh_1' - z^2h_2) + A(x, \nu)h_2 &= \lambda h_2, & h_2(0) &= h_2(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что при $z = 0$ краевая задача (1.15) имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция с компонентами $h_1 = 0, h_2 = \partial u_0 / \partial x$. Заметим также, что $\partial u_0 / \partial x \neq 0$ при любом фиксированном ν из отрезка (1.5): в предположении противного $u_0(x, \nu_*) \equiv 0$ при некотором $\nu_* \in [\alpha, \beta]$, так как $u = 0$ — единственное пространственно однородное состояние равновесия задачи (1.1). А это противоречит экспоненциальной устойчивости диссипативных структур (1.6), ибо при $\nu = \nu_* \in (\nu_1, \nu_2)$ нулевое решение неустойчиво (см. (1.4)).

Условие 1.4. Считаем, что при всех $\nu \in [\alpha, \beta]$ число $\lambda = 0$ — простое собственное значение краевой задачи

$$\nu Dh'' + A(x, \nu)h = \lambda h, \quad h(0) = h(\pi) = 0. \quad (1.16)$$

Сформулированное ограничение обеспечивает существование у краевой задачи (1.15) при $(z, \nu) \in [-z_0, z_0] \times [\alpha, \beta]$, где $z_0 > 0$ достаточно мало, гладкого по совокупности переменных простого собственного значения $\lambda(z, \nu)$, $\lambda(0, \nu) \equiv 0$. Кроме того, $\lambda(-z, \nu) \equiv \lambda(z, \nu)$, так как краевая задача (1.15) не изменяется при заменах z на $-z$, h_2 на $-h_2$. Для построения тейлоровского разложения $\lambda(z, \nu)$ по z положим в (1.15)

$$\lambda = \lambda_1(\nu)z^2 + \lambda_2(\nu)z^4 + \dots, \quad (1.17)$$

$$h_1 = z v_1(x, \nu) + z^2 v_2(x, \nu) + \dots, \quad (1.18)$$

$$h_2 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, \nu) + z w_1(x, \nu) + \dots$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z . Опуская несложные выкладки, приведем сразу окончательный результат:

$$\lambda_1(\nu) = \nu \int_0^\pi \left(D \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right), g(x, \nu) \right) dx, \quad (1.19)$$

где $(*, *)$ — евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^2 , а v_1, g — решения краевых задач

$$\begin{aligned} \nu D v_1'' + A(x, \nu) v_1 - 2\nu D \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= 0, \quad v_1'|_{x=0} = v_1'|_{x=\pi} = 0; \\ \nu D^* g'' + A^*(x, \nu) g &= 0, \quad g|_{x=0} = g|_{x=\pi} = 0, \end{aligned}$$

причем

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, g(x, \nu) \right) dx \equiv 1.$$

Итак, интересующая нас ветвь собственных значений задачи (1.12) задается формулами (1.14), (1.17) и (1.18). Отметим, что аналогичным образом непрерывную ветвь ее собственных значений порождает любое собственное значение λ_0 задачи (1.7) или (1.16). В самом деле, пусть ему отвечает собственная функция $h_0(x)$. Тогда при $z = 0$ собственное число λ_0 будет иметь и краевая задача (1.15) (с собственной функцией $h_1 = h_0(x)$, $h_2 = 0$ или $h_1 = 0$, $h_2 = h_0(x)$ соответственно). Кроме того, как будет ясно из дальнейшего, этими непрерывными ветвями исчерпывается, вообще говоря, весь спектр $\sigma(\nu)$ краевой задачи (1.12).

Условие 1.5. Предполагаем, что при значениях ν из отрезка (1.5): во-первых, $\sigma(\nu) \setminus \{0\} \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$; во-вторых, отрицательна величина (1.19).

Сформулированные условия позволяют дать ответ на вопрос об устойчивости диссипативных структур (1.10). А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. При выполнении условий 1.1–1.5 и при любом натуральном n пара диссипативных структур (1.10) краевой задачи (1.1) экспоненциально устойчива на всем промежутке (1.9) своего существования.

Для доказательства линеаризуем краевую задачу (1.1) на состоянии равновесия $u_{1,n}$ (случай $u_{2,n}$ рассматривать нет необходимости, так как он сводится к данному заменой $\pi - nx \rightarrow nx$). В результате убеждаемся, что после замены $nx \rightarrow x$ за устойчивость пары диссипативных структур (1.10) отвечает расположение спектра краевой задачи (1.11). Остается заметить, что поскольку $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1.12) (см. условие 1.3), то в силу (1.13) и условия 1.5 имеем

$$\sigma_n(\nu) \subset \sigma(n^2\nu) \setminus \{0\} \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Теорема 1.1 доказана.

Из установленной теоремы, являющейся нелокальным аналогом классического результата Тьюринга–Пригожина, следует, что при выполнении условий 1.1–1.5 и при $\nu \rightarrow 0$ количество устойчивых сосуществующих диссипативных структур (1.10) у краевой задачи (1.1) неограниченно растет. При этом, однако, всегда сталкиваемся со следующей характерной особенностью: у краевых задач (1.11) существуют собственные значения, стремящиеся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Действительно, упомянутые собственные числа и отвечающие им собственные функции получаются при подстановке в формулы (1.14), (1.17), (1.18) $n^2\nu$ вместо ν и при дискретных значениях $z = k/n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ (случай $k = 0$ исключается, так как здесь получается нулевая собственная функция).

Несмотря на то, что теорема 1.1 вытекает из условий 1.1–1.5 очевидным образом, реализуемость самих этих условий далеко не тривиальна. Связано это с тем, что все они сформулированы в нелокальных терминах. Поэтому актуально следующее утверждение.

Теорема 1.2. Класс параболических краевых задач (1.1), удовлетворяющих условиям 1.1–1.5, не пуст.

Доказательство данной теоремы приводится в следующем параграфе. Здесь же отметим, что нелокальная постановка проблемы позволяет глубже понять природу явления. В частности, стало ясно, что ситу-

ация, когда при $\nu \rightarrow 0$ количество устойчивых диссипативных структур системы (1.1) неограниченно растет, топологически груба, т. е. сохраняется при малых возмущениях матрицы D и вектор-функции F (в метрике C^k , $k \geq 1$). Действительно, свойством топологической грубости обладают все сформулированные выше ограничения: именно по этой причине мы требуем простоты нулевого собственного значения краевой задачи (1.16) в условии 1.4 и выполнения неравенства $\lambda_1(\nu) < 0$ в условии 1.5.

§ 2. Локальная постановка задачи

Общая идея обоснования теоремы 1.2 заключается в получении легко проверяемых локальных вариантов условий 1.1–1.5. С этой целью ниже развиваются некоторые специальные асимптотические методы, оказывающиеся полезными и при решении ряда других задач.

2.1. Локальные условия существования диссипативных структур. Первый этап доказательства теоремы 1.2 состоит в нахождении локальных вариантов условий 1.1, 1.2. Для их формулировки положим в (1.1)

$$D = D_0 + \mu D_1, \quad (2.1)$$

где матрица $-D_0$ гурвицева, D_1 произвольна, $\mu > 0$ — вспомогательный малый параметр, и рассмотрим аналогичный (1.3) квадратичный многочлен $P(\nu, \mu)$.

Условие 2.1. *Найдется такое $\nu_0 > 0$, что*

$$P(\nu_0, 0) = \frac{\partial P}{\partial \nu}(\nu_0, 0) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \mu}(\nu_0, 0) < 0. \quad (2.2)$$

Несложный анализ показывает, что в предположениях (2.2) и при всех $0 < \mu \ll 1$ многочлен $P(\nu, \mu)$ имеет два корня:

$$\nu_1(\mu) = \nu_0 - \Delta_1(\mu)\sqrt{\mu}, \quad \nu_2(\mu) = \nu_0 + \Delta_2(\mu)\sqrt{\mu}; \quad (2.3)$$

$$\Delta_j(0) = \Delta_0 \equiv \sqrt{-\nu_0(D_1 a, b)/(D_0 a_1, b)}, \quad j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Здесь a и b — собственные векторы матриц $A - \nu_0 D_0$ и $A^* - \nu_0 D_0^*$ соответственно, отвечающие их нулевым собственным значениям и нормированные условием $(a, b) = 1$, а вектор a_1 , удовлетворяющий условию $(a_1, b) = 0$, — решение системы

$$(A - \nu_0 D_0) a_1 = D_0 a. \quad (2.5)$$

Отметим, что из первого соотношения (2.2) вытекает равенство

$$(D_0 a, b) = 0, \quad (2.6)$$

а из второго соотношения (2.2) и очевидного неравенства $P''_{\nu\nu}(\nu_0, 0) > 0$ вытекают оценки

$$(D_1 a, b) < 0, \quad (D_0 a_1, b) > 0. \quad (2.7)$$

Следовательно, оказывается заведомо разрешимой вырожденная система (2.5), а подкоренное выражение в (2.4) является положительным.

Итак, прояснился смысл условия 2.1 и стала понятной причина введения вспомогательного параметра μ : из формул (2.3) следует, что $2\Delta_0\sqrt{\mu}$ — это длина тьюрингского интервала (ν_1, ν_2) , которую мы считаем малой. А это, как будет показано ниже, и обеспечивает требуемую локальность интересующих нас проблем существования и устойчивости диссипативных структур вида (1.10). Отметим еще, что «отход» от особенности, реализующейся при $\mu = 0$, возможен не только за счет варьирования коэффициентов диффузии, но и за счет изменения каких-либо других параметров системы. Главное, чтобы при этом сохранялось второе соотношение (2.2).

Условие 2.1 представляет собой локальный вариант условия 1.1. Для формулировки локального варианта условия 1.2 введем в рассмотрение тейлоровское разложение вектор-функции $F(u)$ в нуле:

$$F(u) = Au + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad (2.8)$$

где F_2, F_3 — квадратичная и кубическая симметричные формы. Рассмотрим, далее, величину

$$d_0 = (2F_2(a, v) + F_2(a, w) + \frac{3}{4}F_3(a, a, a), b), \quad (2.9)$$

где векторы v и w — решения систем

$$Av = -\frac{1}{2}F_2(a, a), \quad (A - 4\nu_0 D_0)w = -\frac{1}{2}F_2(a, a).$$

Условие 2.2. *Предполагаем, что $d_0 < 0$.*

Данное условие, представляющее собой локальный вариант условия 1.2, в совокупности с ограничением 2.1 обеспечивает существование и устойчивость у краевой задачи (1.1) исходной пары диссипативных структур (1.6). Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (2.10)$$

где δ — вспомогательный параметр порядка единицы, отвечающий за изменение параметра ν между корнями (2.3).

Для отыскания диссипативных структур краевой задачи (2.10) воспользуемся аналогом стандартного одночастотного метода [11], т. е. положим в (2.10)

$$u = \sqrt{\mu} u_1(x) + \mu u_2(x) + \mu^{3/2} u_3(x) + \dots, \quad u_1(x) = \xi a \cos x, \quad (2.11)$$

где $(A - \nu_0 D_0)a = 0$, а ξ — неизвестная «амплитуда». Привлекая затем разложение (2.8) и приравнивая коэффициенты при μ и $\mu^{3/2}$, получим краевые задачи для нахождения u_2 и u_3 :

$$\nu_0 D_0 u_2'' + A u_2 + \delta D_0 u_1'' + F_2(u_1, u_1) = 0, \quad u_2'|_{x=0} = u_2'|_{x=\pi} = 0; \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \nu_0 D_0 u_3'' + A u_3 + \delta D_0 u_2'' + \nu_0 D_1 u_1'' + 2F_2(u_1, u_2) + \\ + F_3(u_1, u_1, u_1) = 0, \quad u_3'|_{x=0} = u_3'|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из анализа задачи (2.12), разрешимость которой обеспечивает равенство (2.6), вытекает, что

$$u_2 = \delta \xi a_1 \cos x + \xi^2 (v + w \cos 2x) + \eta a \cos x, \quad (2.14)$$

где a_1 — решение системы (2.5), векторы v, w те же, что и в (2.9), а η — произвольная вещественная постоянная. Подставляя (2.14) в задачу (2.13), после некоторых преобразований убеждаемся, что условие разрешимости последней имеет вид

$$[-\nu_0(D_1 a, b) - \delta^2(D_0 a_1, b)]\xi + d_0 \xi^3 = 0, \quad (2.15)$$

где ляпуновская величина d_0 определена равенством (2.9).

Условие 2.2 вместе с неравенствами (2.7) позволяет найти из уравнения разветвления (2.15) амплитуду

$$\xi(\delta) = \sqrt{[\nu_0(D_1 a, b) + \delta^2(D_0 a_1, b)]/d_0}, \quad |\delta| < \Delta_0. \quad (2.16)$$

Подставляя ее в (2.11), (2.14), полностью определяем первый член ряда (2.11) и, частично, второй. Что же касается фигурирующей в (2.14) произвольной постоянной η , то она определяется из условия разрешимости аналогичной (2.13) краевой задачи для u_4 , причем, как это обычно бывает в теории ветвления, для нее получается уже линейное неоднородное уравнение вида $2d_0 \xi^2(\delta) \eta = \varphi$. А так как в дальнейшем явная формула для η нам не потребуется, то вычисление правой части φ этого уравнения опустим.

Для того чтобы придать изложенным формальным построениям строгий смысл, будем считать, что в краевой задаче (2.10) параметры μ, δ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \mu \leq \mu_0, \quad -\Delta_1(\mu) < \delta < \Delta_2(\mu), \quad (2.17)$$

где $\mu_0 > 0$ фиксировано и достаточно мало, а функции $\Delta_j(\mu)$, $j = 1, 2$, заимствованы из (2.3).

Лемма 2.1. При выполнении условий 2.1, 2.2 и при всех μ, δ , удовлетворяющих неравенствам (2.17), краевая задача (2.10) имеет две экспоненциально устойчивые диссипативные структуры:

$$u_1(x, \delta, \mu) = u_0(x, \delta, \mu), \quad u_2(x, \delta, \mu) = u_0(\pi - x, \delta, \mu), \quad (2.18)$$

$$u_0(x, -\Delta_1(\mu), \mu) \equiv u_0(x, \Delta_2(\mu), \mu) \equiv 0, \quad (2.19)$$

где функция $u_0(x, \delta, \mu)$ допускает (в метрике $\mathring{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$) равномерное по δ из любого фиксированного отрезка $[\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0, \Delta_0)$ асимптотическое представление (2.11), (2.16).

Доказательство. Сформулированная лемма представляет собой один из вариантов классической бифуркационной теоремы Тьюринга–Пригожина. Для ее обоснования достаточно заметить, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (2.10) в окрестности нулевого состояния равновесия имеет экспоненциально орбитально устойчивое одномерное интегральное многообразие [106]

$$u = \xi a \cos x + \Phi(\xi, \mu) \quad (2.20)$$

— уравнение, на котором уравнение из (2.10) после нормировок $\xi/\sqrt{\mu} \rightarrow \xi, \mu t \rightarrow t$ записывается в виде

$$d\xi/dt = -[\nu_0(D_1 a, b) + \delta^2(D_0 a_1, b)]\xi + d_0 \xi^3 + \mu \Omega(\xi, \mu). \quad (2.21)$$

Подчеркнем, что функции Φ и Ω являются достаточно гладкими по совокупности переменных ξ и $\sqrt{\mu}$, принимают значения в $\mathring{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$ и \mathbb{R} соответственно и таковы, что $\Phi(0, \mu) \equiv 0, \Phi'_\xi(0, 0) = 0, \Omega(0, \mu) \equiv 0$. Отметим еще, что в данном случае справедливо стандартное утверждение о соответствии между грубыми стационарными режимами исходной задачи (2.10) и ее «укороченной» нормальной формой:

$$d\xi/dt = -[\nu_0(D_1 a, b) + \delta^2(D_0 a_1, b)]\xi + d_0 \xi^3.$$

Поэтому двум экспоненциально устойчивым состояниям равновесия $\xi = \pm \xi(\delta)$ укороченной нормальной формы отвечают две устойчивые диссипативные структуры вида (2.18). Остается добавить, что асимптотическое представление (2.11) — следствие гладкости многообразия (2.20) и правой части уравнения (2.21) по $\sqrt{\mu}$, а тождества (2.19) вытекают из очевидных равенств $\xi(\pm \Delta_0) = 0$.

Лемма доказана.

Возвращаясь теперь к исходной задаче (1.1) и опираясь на принцип подобия, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2.2. Пусть выполнено равенство (2.1) и условия 2.1, 2.2. Тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ на каждом из интервалов

$$\nu_1(\mu)/n^2 < \nu < \nu_2(\mu)/n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.22)$$

краевая задача (1.1) имеет пару диссипативных структур:

$$u_{1,n} = u_0(nx, \delta_n(\nu, \mu), \mu), \quad u_{2,n} = u_0(\pi - nx, \delta_n(\nu, \mu), \mu), \quad (2.23)$$

где $\delta_n(\nu, \mu) = (n^2\nu - \nu_0)/\sqrt{\mu}$.

Сопоставляя область неустойчивости (1.4) с интервалами (2.22) и учитывая (2.19), убеждаемся, что семействами (2.23) при $n = 1, 2, \dots$ исчерпываются все диссипативные структуры краевой задачи (1.1), (2.1), бифурцирующие из ее нулевого решения. Заметим еще, что поскольку в данной лемме параметры μ и ν независимы, то, как легко видеть, при фиксированном $\mu > 0$ и при $\nu \rightarrow 0$ количество сосуществующих диссипативных структур (2.23) неограниченно увеличивается (имеет порядок $\sqrt{\mu/\nu}$). При этом, однако, их состав постоянно обновляется, так как каждая пара диссипативных структур (2.23) «живет» лишь в ячейке (2.22). Тем самым, при $\nu \rightarrow 0$ наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций их рождения и смерти.

2.2. Исследование устойчивости. Второй этап обоснования теоремы 1.2 заключается в исследовании расположения спектра аналогичной (1.12) краевой задачи

$$(\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)h'' + Ah + \sqrt{\mu}B_1(x, \delta)h + \mu B_2(x, \delta, \mu)h = \lambda h, \quad h'(0) = 0, \quad (2.24)$$

рассматриваемой на полуоси $0 \leq x < \infty$ и дополненной условием ограниченности $h(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Здесь параметр δ меняется на произвольном фиксированном отрезке $[-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0, \Delta_0)$, где $\delta_1, \delta_2 > 0$;

$$B_1(x, \delta)h = 2F_2(a, h)\xi(\delta)\cos x, \\ B_2(x, \delta, 0)h = 2F_2(u_2(x, \delta), h) + 3F_3(a, a, h)\xi^2(\delta)\cos^2 x; \quad (2.25)$$

$u_2(x, \delta)$ — результат подстановки (2.16) в (2.14).

При $\mu = 0$ спектр задачи (2.24) ясен — это собственные значения пучка матриц

$$A - \nu_0\sigma^2 D_0, \quad (2.26)$$

получающегося при подстановке в (2.24) $h = c \cdot \cos \sigma x$, $c \in \mathbb{R}^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Кроме того, из условия 2.1 вытекает гурвицевость матрицы (2.26) при любом $\sigma \neq 1$ и существование у нее при всех σ , близких к единице, непрерывной ветви собственных значений $\lambda = \lambda(\sigma)$: $\lambda(1) = \lambda'(1) = 0$, $\lambda''(1) < 0$. Поэтому исследование расположения спектра задачи (2.24) при $\mu > 0$ состоит в асимптотическом вычислении данной ветви, что в свою очередь сводится (см. п. 1.2) к анализу вспомогательной краевой задачи

$$(\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)(h_1'' - 2z h_2' - z^2 h_1) + Ah_1 + \sqrt{\mu}B_1(x, \delta)h_1 + \mu B_2(x, \delta, \mu)h_1 = \lambda h_1, \quad (2.27 \text{ а})$$

$$(\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)(h_2'' + 2z h_1' - z^2 h_2) + Ah_2 + \sqrt{\mu} B_1(x, \delta) h_2 + \mu B_2(x, \delta, \mu) h_2 = \lambda h_2, \quad (2.27 б)$$

$$h_1'(0) = h_1'(\pi) = h_2(0) = h_2(\pi) = 0 \quad (2.28)$$

с двумя независимыми параметрами μ , $0 < \mu \ll 1$, и z , $|z| \ll 1$.

При $\mu = z = 0$ краевая задача (2.27), (2.28) распадается на две задачи:

$$\begin{aligned} \nu_0 D_0 h_1'' + Ah_1 &= \lambda h_1, & h_1'(0) &= h_1'(\pi) = 0; \\ \nu_0 D_0 h_2'' + Ah_2 &= \lambda h_2, & h_2(0) &= h_2(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

каждая из которых имеет простое нулевое собственное число с собственными функциями $h_1^0(x) = a \cos x$ и $h_2^0(x) = a \sin x$ соответственно. Остальные же собственные значения задач (2.29) согласно условию 2.1 находятся в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный левыми частями уравнений (2.27) в пространстве $E = \overset{\circ}{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^4)$ вектор-функций $\operatorname{colon}(h_1, h_2)$, удовлетворяющих граничным условиям (2.28). Из изложенного выше следует, что при всех достаточно малых μ и z оператор L имеет двумерное инвариантное подпространство

$$E_0(\mu, z) = \operatorname{span}\{v_1(x, \mu, z), v_2(x, \mu, z)\} \subset E, \quad (2.30)$$

где $v_j(x, 0, 0) = e_j(x)$, $j = 1, 2$,

$$e_1(x) = \operatorname{colon}(h_1^0(x), 0), \quad e_2(x) = \operatorname{colon}(0, h_2^0(x)).$$

Инвариантность подпространства (2.30) означает существование таковой матрицы второго порядка $\Lambda(\mu, z)$, $\Lambda(0, 0) = 0$, что

$$LV = V\Lambda, \quad (2.31)$$

где по столбцам матрицы V размера 4×2 стоят базисные функции подпространства (2.30). Отметим также, что матрицы V и Λ можно выбрать гладко зависящими от $\sqrt{\mu}$ и z , так как от этих параметров гладко зависят коэффициенты уравнений (2.27).

Итак, проблема устойчивости состояний равновесия (2.23) свелась к исследованию расположения собственных значений матрицы $\Lambda(\mu, z)$, что, в свою очередь, требует знания нескольких членов ее тейлоровского разложения по $\sqrt{\mu}$ и z . Для их нахождения подставим в равенство (2.31) ряды

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mu \Lambda_1 + \sqrt{\mu} z \Lambda_2 + z^2 \Lambda_3 + \dots, \\ V &= V_0 + \sqrt{\mu} V_1 + z V_2 + \mu V_3 + \sqrt{\mu} z V_4 + z^2 V_5 + \dots, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где матрицы

$$\begin{aligned} V_0 &= [e_1(x), e_2(x)], \quad V_j = [v_{1j}, v_{2j}], \quad j = 1, \dots, 5; \\ v_{1j} &= \text{colon}(h_{1j}, 0), \quad v_{2j} = \text{colon}(0, h_{2j}), \quad j = 1, 3, 5, \\ v_{1j} &= \text{colon}(0, h_{1j}), \quad v_{2j} = \text{colon}(h_{2j}, 0), \quad j = 2, 4; \\ \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$ и z , для определения функций v_{1j} и v_{2j} , $j = 1, \dots, 5$, получим рекуррентную последовательность краевых задач, из условий разрешимости которых находим элементы матриц Λ_j , $j = 1, 2, 3$.

Действуя указанным выше способом, для h_{1j} и h_{2j} , $j = 1, 2$, получим краевые задачи ($L_0 = \nu_0 D_0 d^2/dx^2 + A$):

$$\begin{aligned} L_0 h_{11} + (B_1(x, \delta) - \delta D_0) a \cos x &= 0, \quad h'_{11}(0) = h'_{11}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{21} + (B_1(x, \delta) - \delta D_0) a \sin x &= 0, \quad h_{21}(0) = h_{21}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{12} - 2\nu_0 D_0 a \sin x &= 0, \quad h_{12}(0) = h_{12}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{22} - 2\nu_0 D_0 a \cos x &= 0, \quad h'_{22}(0) = h'_{22}(\pi) = 0, \end{aligned}$$

разрешимость которых обеспечивает равенство (2.6). Учитывая здесь явный вид матрицы $B_1(x, \delta)$ (см. (2.25)), находим

$$\begin{aligned} h_{11} &= \delta a_1 \cos x + 2\xi(\delta)(v + w \cos 2x), \quad h_{12} = 2\nu_0 a_1 \sin x, \\ h_{21} &= \delta a_1 \sin x + 2\xi(\delta)w \sin 2x, \quad h_{22} = 2\nu_0 a_1 \cos x, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где векторы a_1 , v , w те же, что и в (2.14).

Приравнивая в (2.31) коэффициенты при μ , $\sqrt{\mu}z$, z^2 , приходим к краевым задачам для h_{1j} , h_{2j} , $j = 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} L_0 h_{13} + \delta D_0 h''_{11} - \nu_0 D_1 a \cos x + B_1(x, \delta) h_{11} + \\ + B_2(x, \delta, 0) a \cos x &= \lambda_1 a \cos x, \quad h'_{13}(0) = h'_{13}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{23} + \delta D_0 h''_{21} - \nu_0 D_1 a \sin x + B_1(x, \delta) h_{21} + \\ + B_2(x, \delta, 0) a \sin x &= \lambda_2 a \sin x, \quad h_{23}(0) = h_{23}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{14} - 2\delta D_0 a \sin x + 2\nu_0 D_0 h'_{11} + B_1(x, \delta) h_{12} + \\ + \delta D_0 h''_{12} &= \lambda_4 a \sin x, \quad h_{14}(0) = h_{14}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{24} - 2\delta D_0 a \cos x - 2\nu_0 D_0 h'_{21} + B_1(x, \delta) h_{22} + \\ + \delta D_0 h''_{22} &= \lambda_3 a \cos x, \quad h'_{24}(0) = h'_{24}(\pi) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_0 h_{15} - 2\nu_0 D_0 h'_{12} - \nu_0 D_0 a \cos x &= \lambda_5 a \cos x, & h'_{15}(0) &= h'_{15}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{25} + 2\nu_0 D_0 h'_{22} - \nu_0 D_0 a \sin x &= \lambda_6 a \sin x, & h_{25}(0) &= h_{25}(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда известные функции (2.33) и учитывая (2.25), из условий разрешимости этих краевых задач определяем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2d_0 \xi^2(\delta), & \lambda_2 &= 0, & \lambda_3 &= \lambda_4 = -4\nu_0 \delta (D_0 a_1, b), \\ \lambda_5 &= \lambda_6 = -4\nu_0^2 (D_0 a_1, b). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Полученной информации о матрице $\Lambda(\mu, z)$ достаточно для исследования знаков ее следа и определителя при $0 < \mu, |z| \ll 1$. Действительно, функции $\text{tr } \Lambda(\mu, z)$ и $\det \Lambda(\mu, z)$ — четные по z (см. соответствующие пояснения перед формулой (1.17)); далее, $\det \Lambda(\mu, 0) \equiv 0$, так как при $z = 0$ краевая задача (2.27), (2.28) имеет нулевое собственное значение (см. п. 1.2) с собственной функцией

$$\text{colon}\left(0, \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, \delta, \mu)\right). \quad (2.35)$$

А отсюда и из (2.34) заключаем, что

$$\text{tr } \Lambda = 2d_0 \xi^2(\delta)\mu - 8\nu_0^2 (D_0 a_1, b)z^2 + O(\mu^{3/2} + \sqrt{\mu}z^2 + z^4), \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \det \Lambda &= 8\nu_0^2 (D_0 a_1, b)z^2 \left[-(\nu_0 (D_1 a, b) + 3\delta^2 (D_0 a_1, b))\mu + \right. \\ &\quad \left. + 2\nu_0^2 (D_0 a_1, b)z^2 + O(\mu^{3/2} + \sqrt{\mu}z^2 + z^4) \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из разложения (2.36) вытекает отрицательность $\text{tr } \Lambda$ при любом фиксированном $\delta \in (-\Delta_0, \Delta_0)$ и при всех достаточно малых $\mu > 0, |z|$. Поэтому в анализе нуждается только равенство

$$z^{-2} \det \Lambda = 0, \quad (2.38)$$

в котором параметр $\delta, |\delta| < \Delta_0, |\delta| \neq \Delta_0/\sqrt{3}$, также фиксирован. Но при $|\delta| < \Delta_0/\sqrt{3}$ первое слагаемое в квадратных скобках из (2.37) положительно, что влечет неравенство $z^{-2} \det \Lambda > 0$ при всех достаточно малых $\mu > 0, |z|$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.3. *При выполнении условий леммы 2.2 для любого отрезка $[-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0/\sqrt{3})$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, можно указать такое $\mu_0 = \mu_0(\delta_1, \delta_2) > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ и при любом натуральном n пара диссипативных структур (2.23) краевой задачи (1.1), (2.1) экспоненциально устойчива при*

$$(\nu_0 - \delta_1 \sqrt{\mu})/n^2 \leq \nu \leq (\nu_0 + \delta_2 \sqrt{\mu})/n^2.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение спектральную задачу

$$(\nu_0 + \delta_n \sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)h'' + Ah + \sqrt{\mu} B_1(x, \delta_n)h + \mu B_2(x, \delta_n, \mu)h = \lambda h, \quad h'(0) = h'(n\pi) = 0, \quad (2.39)$$

где $\delta_n = \delta_n(\nu, \mu) \in [-\delta_1, \delta_2]$, получающуюся при линеаризации системы (1.1), (2.1) на состоянии равновесия u_n^1 и замене $nx \rightarrow x$, и обозначим через $\sigma_n(\nu, \mu)$ совокупность ее собственных значений. Обозначим, далее, через $\sigma(\delta, \mu)$ спектр задачи (2.24). Из проделанного выше анализа следует, что

$$\sigma(\delta, \mu) \setminus \{0\} \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Действительно, все близкие к мнимой оси точки спектра задачи (2.24) — это собственные значения матрицы $\Lambda(\mu, z)$, $|z| \leq z_0$, где $z_0 > 0$ фиксировано и достаточно мало. Последняя же при

$$\delta \in [-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0/\sqrt{3}), \quad 0 < \mu \ll 1, \quad z \neq 0$$

является гурвицевой. Исключение составляет только случай $z = 0$, когда одно собственное значение матрицы Λ нулевое, а другое отрицательно.

Следует особо подчеркнуть, что условие 1.3 здесь выполняется автоматически: $\lambda = 0$ заведомо не является собственным значением задачи (2.24), так как в силу (1.14), (2.35) при $z = 0$ ему отвечает нулевая собственная функция. А отсюда и из изложенного выше вытекает, что

$$\sigma_n(\nu, \mu) \subset \sigma(\delta_n(\nu, \mu), \mu) \setminus \{0\} \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Лемма 2.3 доказана.

Обратим внимание, что, как и в лемме 2.2, при фиксированном $\mu > 0$ и при $\nu \rightarrow 0$ количество устойчивых сосуществующих диссипативных структур (2.23) неограниченно растет (имеет порядок $\sqrt{\mu/\nu}$).

При $\Delta_0/\sqrt{3} < |\delta| < \Delta_0$ из уравнения (2.38) с помощью теоремы о неявной функции, применимость которой гарантирует разложение (2.37), однозначно определяется функция $\mu = \Psi(z)$, $\Psi(-z) \equiv \Psi(z)$:

$$\Psi(z) = 2\nu_0^2(D_0 a_1, b)z^2 / [\nu_0(D_1 a, b) + 3\delta^2(D_0 a_1, b)] + O(z^4).$$

Следовательно, при каждом фиксированном достаточно малом $\mu > 0$ существует интервал $|z| < z_*(\mu)$, где $z_*(\mu)$, $z_*(0) = 0$, — положительный корень уравнения $\mu = \Psi(z)$, в котором $z^{-2} \det \Lambda < 0$. Напомним, однако, что при переходе от задачи (2.27), (2.28) к (2.39) следует положить $z = \pm k/n$, $k = 0, 1, \dots$. Точнее говоря, все критические собственные значения (т. е. стремящиеся к нулю при $\mu \rightarrow 0$ или при $n \rightarrow \infty$) задачи (2.39) являются собственными значениями матриц

$$\Lambda_k = \Lambda|_{z=k/n, \delta=\delta_n(\nu, \mu)}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm k_0,$$

где k_0 — целая часть nz_0 , а $z_0 > 0$ фиксировано и достаточно мало. Поэтому для того, чтобы в рассматриваемом случае задача (2.39) имела точки спектра, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$1/n < z_*(\mu), \quad (2.40)$$

означающего, что хотя бы одно из ненулевых значений z попадает в интервал $(-z_*(\mu), z_*(\mu))$ (значение $z = 0$ при этом исключается по тем же причинам, что и выше).

Суммируя изложенное, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.4. *Для любых отрезков*

$$[-\delta_1, -\delta_2] \subset (-\Delta_0, -\Delta_0/\sqrt{3}), \quad [\delta_3, \delta_4] \subset (\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0),$$

$\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, 4$, можно указать такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ пара диссипативных структур (2.23) с любым номером n , удовлетворяющим оценке (2.40), экспоненциально неустойчива как при

$$(\nu_0 - \delta_1\sqrt{\mu})/n^2 \leq \nu \leq (\nu_0 - \delta_2\sqrt{\mu})/n^2,$$

так и при

$$(\nu_0 + \delta_3\sqrt{\mu})/n^2 \leq \nu \leq (\nu_0 + \delta_4\sqrt{\mu})/n^2.$$

В дополнение к лемме 2.4 заметим, что если выполняется строго противоположное (2.40) неравенство, то соответствующая пара состояний равновесия (2.23) экспоненциально устойчива при всех ν из интервала (2.22) своего существования. Подчеркнем также, что неравенство (2.40) начинает выполняться только для асимптотически больших (порядка $\mu^{-1/2}$) номеров n .

2.3. Завершение доказательства теоремы 1.2. Из лемм 2.1–2.3 следует, что при выполнении условий 2.1, 2.2 и при любом фиксированном достаточно малом $\mu > 0$ краевая задача (1.1), (2.1) удовлетворяет и условиям 1.1–1.5. Действительно, выполнение условия 1.1 очевидно, а условие 1.2 вытекает из леммы 2.1, причем реализуется простейшая ситуация: исходная пара диссипативных структур существует на всем тюрингском интервале (ν_1, ν_2) (ср. (1.8) и (2.19)). Условия же 1.3–1.5 будут заведомо выполняться, если в качестве (1.5) взять отрезок

$$\nu_0 - \delta_1\sqrt{\mu} \leq \nu \leq \nu_0 + \delta_2\sqrt{\mu}, \quad [-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0/\sqrt{3}). \quad (2.41)$$

Для пояснения сути дела заметим, что условие 1.4 — следствие простоты нулевого собственного значения второй из краевых задач

(2.29). Далее, в процессе доказательства леммы 2.3 было установлено, что при каждом ν из отрезка (2.41) весь спектр краевой задачи (2.24) (за исключением $\lambda = 0$) лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а точка $\lambda = 0$ не является ее собственным значением. И наконец, несложный анализ матрицы Λ приводит к выводу, что в случае (2.41) отрицательна аналогичная (1.19) величина

$$\lambda_1 = \frac{4\nu_0^2(D_0a_1, b)[- \nu_0(D_1a, b) - 3\delta^2(D_0a_1, b)]}{d_0\xi^2(\delta)} + O(\sqrt{\mu}).$$

Итак, для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось привести конкретный пример краевой задачи (1.1), (2.1), удовлетворяющей условиям 2.1, 2.2. С этой целью рассмотрим известную модель «брюсселятор» [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A + u^2v - (B + 1)u, & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Bu - u^2v, & \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $d_1, d_2, l > 0$; u, v — скалярные функции; A, B — положительные параметры, связанные неравенствами

$$1 < B < 1 + A^2. \quad (2.43)$$

Краевая задача (2.42) имеет единственное пространственно однородное состояние равновесия $u_0 = A$, $v_0 = B/A$, глобальную экспоненциальную устойчивость которого в рамках точечной модели (см. (1.2)) обеспечивает второе неравенство (2.43).

Выполняя в (2.42) замены $u - u_0 \rightarrow u$, $v - v_0 \rightarrow v$ и полагая

$$l = \pi, \quad d_1 = \nu(d - \mu), \quad d_2 = \nu/(d - \mu), \quad d = (\sqrt{B} - 1)/A, \quad (2.44)$$

приходим к краевой задаче вида (1.1), (2.1). Элементарная проверка показывает, что при условиях (2.44)

$$P(\nu, 0) = (\nu - A)^2, \quad \frac{\partial P}{\partial \mu}(A, 0) = -A \left(A^2 + \frac{1}{d^2}(B - 1) \right) < 0,$$

а ляпуновская величина (см. (2.9))

$$d_0 = \frac{A^4[4 - 19\kappa - 5\kappa^2/2 + 4\kappa^3]}{18\kappa(A^2 - \kappa^2)}, \quad \kappa = \sqrt{B} - 1,$$

отрицательна, например, при $A = 1$, $B = 1.5$.

Теорема 1.2 полностью доказана.

2.4. Результаты численного исследования. Прделанный анализ показывает, что при фиксированном $\mu > 0$ и при $\nu \rightarrow 0$ краевая задача (1.1), (2.1) хорошо моделирует нелокальную ситуацию, описывающуюся условиями 1.1–1.5. А так как в локальном случае первые два из этих ограничений обеспечивают выполнение остальных, то естественно ожидать, что подобное типично для краевой задачи (1.1) и в общем случае. Последнее же означает, что область применимости теоремы 1.1 достаточно широка. С ее помощью, в частности, можно объяснить результаты численного счета из [24], относящиеся к краевой задаче (2.42) при увеличении l , что эквивалентно пропорциональному уменьшению коэффициентов диффузии.

В работе [24] численное интегрирование задачи (2.42) проводилось при значениях параметров

$$A = 1; \quad B = 1,5; \quad d_1 = 1/16, \quad d_2 = 16 \quad (2.45)$$

и при начальных условиях

$$u(0, x) = \begin{cases} u_1 & \text{при } 0 \leq x \leq l_0, \\ u_2 & \text{при } l_0 < x \leq l, \end{cases} \quad v(0, x) = v_1,$$

в которых параметры изменялись в заданных пределах:

$$15 \leq l \leq 70; \quad 0,5 \leq l_0 \leq 22; \quad 0,5 \leq u_1 \leq 10; \quad u_2 = 0,4; \quad v_1 = 1.$$

При этом каждый раз решение краевой задачи (2.42) выходило на диссипативную структуру, компонента $u(x)$ которой имела последовательность узких пиков с характерной шириной $\Delta l \approx 1,4$ (ширина измерялась на уровне $u = 1$), отстоящих друг от друга на характерном расстоянии $\Delta L \approx 14,2$ и имеющих характерную высоту $H \approx 11,5$. На рис. 2.1 (заимствованном из [24]) изображен график компоненты $u(x)$ стационарного решения, полученного для начальных условий с параметрами

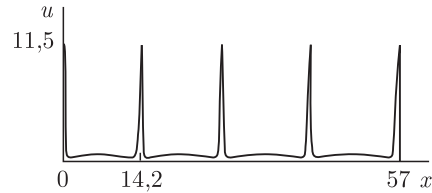


Рис. 2.1

$$u_1 = 2; \quad u_2 = 0,4; \quad v_1 = 1; \quad l_0 = 0,5; \quad l = 57.$$

Описанные результаты численного анализа допускают следующую возможную интерпретацию. При условиях (2.45) к краевой задаче (2.42), по всей видимости, применима теорема 1.1, из которой вытекает существование у нее при $l \gg 1$ большого числа сильно «изрезанных» по x устойчивых диссипативных структур. В частности, стационарное

решение при $l = 57$ (см. рис. 2.1) получается с помощью принципа подобия при $n = 8$ из некоторой диссипативной структуры на отрезке $0 \leq x \leq 57/8$. Отметим также, что при увеличении параметра l степень «изрезанности» (количество пиков у компоненты $u(x)$) возрастает, однако в силу принципа подобия их характеристики (ширина, высота и т. д.) меняются мало.

§ 3. Особенности динамики диссипативных структур

Условия 2.1, 2.2 обеспечивают следующую динамику диссипативных структур (2.23) при фиксированном $\mu > 0$ и при уменьшении параметра ν . Рассмотрим номер n , удовлетворяющий неравенству (2.40). Тогда сначала, т. е. при прохождении ν через критическое значение $\nu_2(\mu)/n^2$, диссипативные структуры (2.23) бифурцируют из неустойчивого нулевого решения и сами, естественно, неустойчивы (см. лемму 2.4). Однако при дальнейшем уменьшении ν они становятся устойчивыми и заведомо остаются таковыми на отрезке (2.41) (см. лемму 2.3). Затем они теряют устойчивость (см. лемму 2.4) и «умирают» на неустойчивом нулевом состоянии равновесия при прохождении ν через критическое значение $\nu_1(\mu)/n^2$. И наконец, следует отметить, что при $\nu \rightarrow 0$ происходит бесконечная последовательность описанных перестроек с состояниями равновесия (2.23) со все большими номерами n .

Итак, возникает вопрос о характере бифуркаций, которые претерпевают диссипативные структуры (2.23) при уменьшении ν от $\nu_2(\mu)/n^2$ до $\nu_1(\mu)/n^2$. В этом параграфе ответ на него дается в рамках эвристической теории, базирующейся на методе квазинормальных форм Ю. С. Колесова [78, 84].

3.1. Алгоритмическая часть. Положим в краевой задаче (1.1), (2.1) $\nu = \varkappa\mu$, $\varkappa > 0$, и будем считать, что ее стационарные режимы зависят от двух пространственных переменных x и $y = nx$, причем $\nu n^2 = \nu_0 + \delta\sqrt{\mu}$. Тогда приходим к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (D_0 + \mu D_1)Lu + F(u), \quad u(t, x, y + 2\pi) \equiv u(t, x, y), \quad (3.1)$$

где оператор

$$L \equiv \varkappa\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sqrt{\varkappa\mu(\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (\nu_0 + \delta\sqrt{\mu}) \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Отметим, что краевая задача (3.1) (аналог которой впервые введен в [84]) вполне естественна, так как отражает взаимодействие высоких мод $\cos nx$, на которых формируются диссипативные структуры (2.23), с низкими модами $\cos kx$, $k \sim 1$.

Опираясь на алгоритмическую часть метода квазинормальных форм (см. [78, 84]), стационарные режимы краевой задачи (3.1) будем искать в виде

$$u = \sqrt{\mu} u_1(\tau, x, y) + \mu u_2(\tau, x, y) + \mu^{3/2} u_3(\tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \mu t, \quad (3.2)$$

$$u_1 = a[\eta(\tau, x) \exp(iy) + \bar{\eta}(\tau, x) \exp(-iy)], \quad (3.3)$$

где $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ — неизвестная комплексная амплитуда. Так как при подстановке $y = nx$ функции (3.2), (3.3) должны удовлетворять граничным условиям из (1.1), то будем считать, что

$$\left. \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right|_{x=\pi} = \eta_2|_{x=0} = \eta_2|_{x=\pi} = 0. \quad (3.4)$$

Подставляя равенства (3.2), (3.3) в краевую задачу (3.1), привлекая теилоровское разложение (2.8) и приравнявая коэффициенты при μ , получаем краевую задачу для уравнения ($L_0 \equiv \nu_0 D_0 d^2/dy^2 + A$)

$$L_0 u_2 + \delta D_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2\sqrt{\varkappa\nu_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + F_2(u_1, u_1) = 0$$

с граничными условиями 2π -периодичности по y (переменные τ, x рассматриваем как параметры). Несложный анализ данной краевой задачи с учетом равенства (2.6), обеспечивающего ее разрешимость, приводит к формуле

$$u_2 = a_1 \left[\left(\delta\eta - 2\sqrt{\varkappa\nu_0} i \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \exp(iy) + \left(\delta\bar{\eta} + 2\sqrt{\varkappa\nu_0} i \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \right) \exp(-iy) \right] + 4v|\eta|^2 + 2w[\eta^2 \exp(2iy) + \bar{\eta}^2 \exp(-2iy)], \quad (3.5)$$

где векторы a_1, v, w те же, что и в (2.14). Приравнявая в (3.1) коэффициенты при $\mu^{3/2}$, получаем краевую задачу

$$L_0 u_3 - \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \varkappa D_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2\sqrt{\varkappa\nu_0} D_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \delta \sqrt{\frac{\varkappa}{\nu_0}} D_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \delta D_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \nu_0 D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2F_2(u_1, u_2) + F_3(u_1, u_1, u_1) = 0,$$

$$u_3(\tau, x, y + 2\pi) \equiv u_3(\tau, x, y).$$

Подставляя в нее уже известную функцию (3.5), после некоторых преобразований убеждаемся, что условие ее разрешимости имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 4(D_0 a_1, b) \left[s^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + i\delta s \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + [-\nu_0(D_1 a, b) - \delta^2(D_0 a_1, b)]\eta + 4d_0|\eta|^2\eta, \quad (3.6)$$

где $s = \sqrt{\nu_0 \varkappa}$, а постоянная d_0 по-прежнему определяется формулой (2.9). Наконец, дополняя уравнение (3.6) граничными условиями (3.4), приходим к краевой задаче для нахождения амплитуды η . Следуя

[78, 84], эту краевую задачу будем называть квазинормальной формой исходной краевой задачи (1.1), (2.1).

Сделаем ряд замечаний. Во-первых, отметим, что в силу независимости ν и μ параметр $s = \sqrt{\nu_0\nu/\mu}$ в (3.6) может принимать любые значения. Однако нас интересует случай фиксированного μ и малого ν , моделирующей нелокальную ситуацию. Поэтому всюду ниже считаем, что $0 < s \ll 1$.

Во-вторых, краевая задача (3.6), (3.4) имеет состояния равновесия

$$\eta_{\pm}(\delta) = \pm \frac{1}{2}\xi(\delta), \quad |\delta| < \Delta_0 \quad (3.7)$$

(см. (2.16)), устойчивые (неустойчивые) при любом фиксированном δ , $|\delta| < \Delta_0/\sqrt{3}$ ($> \Delta_0/\sqrt{3}$), и при всех $0 < s \ll 1$.

В-третьих, сравнивая асимптотические представления (2.11) и (3.2), убеждаемся, что этим состояниям равновесия (при $\delta = \delta_n(\nu, \mu)$) соответствуют диссипативные структуры (2.23) исходной краевой задачи (1.1), (2.1), причем уменьшение ν при фиксированном n эквивалентно уменьшению параметра δ в (3.7) от Δ_0 до $-\Delta_0$.

Наконец, в-четвертых, свойства устойчивости состояний равновесия (2.23) и (3.7) совпадают при всех $\delta \in (-\Delta_0, \Delta_0)$ (см. леммы 2.3, 2.4).

Изложенные факты позволяют предположить, что краевая задача (3.6), (3.4) отвечает не только за устойчивость диссипативных структур (2.23), но и за их бифуркации. В рамках данной гипотезы интересующий нас вопрос сводится к исследованию бифуркаций состояний равновесия (3.7) при прохождении параметра δ через значение $\Delta_0/\sqrt{3}$ (случай $\delta = -\Delta_0/\sqrt{3}$ в изучении не нуждается, так как краевая задача (3.6), (3.4) не меняется при заменах $\delta \rightarrow -\delta$, $\pi - x \rightarrow x$).

Итак, полагая в (3.6)

$$\eta = \eta_+(\delta)(1+h), \quad \delta = \Delta_0/\sqrt{3} + \gamma s^2, \quad \gamma \sim 1,$$

после подходящих нормировок времени τ и параметров γ , s получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau} = s^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + s(1 + \gamma s^2) i \frac{\partial h}{\partial x} - \\ - \frac{1}{2}(1 - \gamma s^2)(h + \bar{h} + 2|h|^2 + h^2 + |h|^2 h), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} h \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} h \Big|_{x=\pi} = \operatorname{Im} h \Big|_{x=0} = \operatorname{Im} h \Big|_{x=\pi} = 0. \quad (3.9)$$

Снова опираясь на метод квазинормальных форм, стационарные режимы задачи (3.8), (3.9) будем искать в виде

$$\begin{aligned} h = s h_1 + s^2 h_2 + s^3 h_3 + s^4 h_4 + s^5 h_5 + \dots, \\ h_j = h_j(\sigma, x), \quad j = 1, \dots, 5, \quad \sigma = s^4 \tau, \quad h_1 = i\theta(\sigma, x), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где θ — подлежащая определению вещественная функция. Подставляя формулы (3.10) в уравнение (3.8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s , последовательно находим

$$\begin{aligned} h_2 &= -\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{1}{2}\theta^2, \quad h_3 \equiv 0, \\ h_4 &= -\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \theta^2\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{1}{8}\theta^4 - 2\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial^3\theta}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}\right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

а для h_5 получаем уравнение

$$i\frac{\partial h_4}{\partial x} + i\gamma\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{1}{2}(h_5 + \bar{h}_5 + 2i\theta h_4 + i\theta h_2^2) + \frac{\gamma}{2}i(2\theta h_2 + \theta^3) = i\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}.$$

Подставляя в него выражения (3.11) и полагая $h_5 = 0$, после некоторых преобразований для θ приходим к уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = -\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4} - 3\gamma\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - 6\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \quad (3.12)$$

которое, согласно (3.9) и (3.10), (3.11), следует дополнить граничными условиями

$$\theta|_{x=0} = \theta|_{x=\pi} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}|_{x=0} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}|_{x=\pi} = 0. \quad (3.13)$$

В качестве фазового пространства краевой задачи (3.12), (3.13) возьмем гильбертово пространство $\dot{W}_2^2(0, \pi)$ функций класса W_2^2 , удовлетворяющих нулевым граничным условиям Дирихле. Несложная проверка показывает, что нулевое решение этой краевой задачи экспоненциально устойчиво (неустойчиво) в метрике данного фазового пространства при $\gamma < 1/3$ ($\gamma > 1/3$), что в свою очередь совпадает с условиями устойчивости нулевого состояния равновесия задачи (3.8), (3.9). Поэтому, как и выше, уместно принять краевую задачу (3.12), (3.13) за новый объект исследования.

Анализ задачи (3.12), (3.13) проведем с использованием стандартных бифуркационных методов (см. аналогичное рассмотрение в п. 2.1). А именно, положим в ней

$$3\gamma = k^2(1 - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (3.14)$$

где k — произвольно фиксированное натуральное число, и будем искать ее состояния равновесия в виде ряда по степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\theta = \sqrt{\varepsilon}\xi \sin kx + \varepsilon\theta_2(x) + \varepsilon^{3/2}\theta_3(x) + \dots, \quad (3.15)$$

где ξ — подлежащая определению вещественная постоянная. Действуя, далее, обычным образом, сначала находим $\theta_2(x)$, а затем из

условия разрешимости линейной неоднородной краевой задачи для θ_3 определяем ξ . Опуская соответствующие выкладки, приведем сразу окончательный результат:

$$\theta_2(x) = \frac{1}{4k}\xi^2 \sin 2kx, \quad \xi = k\sqrt{2/3}. \quad (3.16)$$

Лемма 3.1. *При условии (3.14) краевая задача (3.12), (3.13) имеет два экспоненциально неустойчивых (с размерностью неустойчивых многообразий, равной k) состояния равновесия:*

$$\theta_1(x, \varepsilon) = \theta_0(x, \varepsilon), \quad \theta_2(x, \varepsilon) = -\theta_0(\pi - x, \varepsilon), \quad \theta_0(x, 0) \equiv 0. \quad (3.17)$$

Здесь функция $\theta_0(x, \varepsilon)$ допускает асимптотическое представление (3.15), (3.16) (в метрике пространства $\dot{W}_2^0(0, \pi)$).

Для доказательства достаточно заметить, что при условии (3.14) в окрестности нулевого решения краевая задача (3.12), (3.13) имеет одномерное инвариантное многообразие, на котором укороченная нормальная форма после соответствующих нормировок записывается в виде

$$d\xi/d\sigma = -k^2\xi + \frac{3}{2}\xi^3.$$

Заметим, далее, что двум ее неустойчивым состояниям равновесия $\xi = \pm k\sqrt{2/3}$ в исходной задаче отвечают два неустойчивых состояния равновесия (3.17). И наконец, степень неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) решений (3.17) равна $m + 1$, где m — количество положительных собственных значений в спектре устойчивости нулевого решения задачи (3.12), (3.13) при условии (3.14) и при $\varepsilon = 0$. Последнее же, как нетрудно увидеть, равно $k - 1$.

3.2. Выводы. Прделанные выше исследования показывают, что при уменьшении параметра γ и при прохождении его через значения $k^2/3$, $k = 1, 2, \dots$, от нулевого решения краевой задачи (3.12), (3.13) каждый раз ответвляется по паре неустойчивых состояний равновесия. Интерпретируя эти результаты в терминах исходной задачи (1.1), (2.1), убеждаемся в существовании для каждой пары диссипативных структур (2.23) с достаточно большим (удовлетворяющим оценке (2.40)) номером n бифуркационных значений

$$\nu_1(\mu)/n^2 < \underline{\nu}_{1,n} < \dots < \underline{\nu}_{p,n} < \bar{\nu}_{r,n} < \dots < \bar{\nu}_{1,n} < \nu_2(\mu)/n^2 \quad (3.18)$$

со следующими свойствами.

Во-первых, при уменьшении параметра ν и прохождении его через значения $\bar{\nu}_{j,n}$, $j = 1, \dots, r$, от диссипативных структур (2.23) последовательно ответвляется по паре неустойчивых состояний равновесия, что

понижает каждый раз их степень неустойчивости на единицу и приводит в конечном итоге к устойчивости на интервале $\underline{\nu}_{p,n} < \nu < \overline{\nu}_{r,n}$.

Во-вторых, при прохождении ν через значения $\underline{\nu}_{j,n}$, $j = 1, \dots, p$, ситуация обратная: на диссипативных структурах (2.23) каждый раз «умирает» по паре неустойчивых состояний равновесия, увеличивая их степень неустойчивости на единицу.

В третьих, $p, r \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, причем всегда $r < p$, так как $p + 1$ и $r + 1$ суть размерности неустойчивого многообразия нулевого решения задачи (1.1), (2.1) при $\nu = \nu_1(\mu)/n^2$ и $\nu = \nu_2(\mu)/n^2$ соответственно.

Остановимся на естественно возникающем вопросе о степени строгости изложенных эвристических рассуждений. Используя развитые в работе [78] методы, можно обосновать законность перехода от краевой задачи (1.1), (2.1) к ее квазинормальной форме (3.6), (3.4) только при $s \sim 1$. Если же $0 < s \ll 1$, то он носит лишь эвристический характер. Напротив, переход от краевой задачи (3.8), (3.9) к задаче (3.12), (3.13) правомерен именно при $0 < s \ll 1$, что также устанавливается по методике из работы [78]. В целом же есть все основания ожидать, что приведенные результаты, хотя и получены эвристически, правильно отражают качественную сторону вопроса.

Подводя итог, приведем достаточно полный перечень основных особенностей динамики диссипативных структур (2.23) при фиксированном $\mu > 0$ и при уменьшении ν .

1). *Ячеистость*. При $\nu \rightarrow 0$ состав диссипативных структур (2.23) постоянно обновляется, так как каждая из них «живет» лишь в ячейке (2.22).

2). *Принцип подобия*. Все диссипативные структуры (2.23) получаются с помощью описанного в п. 1.1 правила из одной уникальной пары диссипативных структур (2.18).

3). *Буферность*. Как уже отмечалось во введении, феномен буферности заключается в том, что при подходящем выборе параметров можно добиться существования у рассматриваемой системы любого фиксированного числа одностепенных аттракторов. В нашем случае буферность имеет место, так как при $\nu \rightarrow 0$ количество сосуществующих устойчивых диссипативных структур (2.23) неограниченно растет. Ясен также и механизм возникновения этого явления: каждая пара диссипативных структур (2.23) с номером n , удовлетворяющим оценке (2.40), рождается из нулевого состояния равновесия неустойчивой, однако при дальнейшем уменьшении параметра ν и при прохождении его через критические значения $\overline{\nu}_{j,n}$, $j = 1, \dots, r$ (см. (3.18)), раз за разом сбрасывает неустойчивые «оболочки» и, наконец, становится устойчивой при $\underline{\nu}_{p,n} < \nu < \overline{\nu}_{r,n}$. Отметим, что, по всей видимости, впервые описанный механизм был обнаружен А. А. Виттом [17] при анализе автоколебаний в одной конкретной гиперболической краевой задаче из радиопизики. В случае параболических систем с малой диффузией

данный механизм возникновения буферности выявлен в работе [90], где изучались вопросы о существовании и устойчивости периодических решений типа бегущих волн на окружности. И наконец, в монографии [59] было установлено, что описанный механизм типичен для широкого класса радиофизических задач.

4). *Принцип максимума амплитуды.* Устойчивыми могут быть лишь диссипативные структуры с достаточно большими амплитудами (2.16). В частности, состояние равновесия с наибольшей амплитудой всегда устойчиво (см. леммы 2.3, 2.4).

5). *Принцип минимальности.* Как показано в п. 3.1, при бифуркациях состояния равновесия диссипативные структуры (2.23) не порождают никаких других устойчивых стационарных режимов. В связи с этим весьма правдоподобна гипотеза, что устойчивыми парами диссипативных структур (2.23) исчерпываются, вообще говоря, все аттракторы краевой задачи (1.1), (2.1).

6). *Флуктуационный хаос.* В п. 1.2 замечено, что при $n \rightarrow \infty$ устойчивость диссипативных структур (1.10) становится все более слабой, так как отвечающие им спектральные задачи (1.11) имеют собственные числа, стремящиеся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Описанное поведение спектра устойчивости приводит, как правило, к тому, что с ростом n области притяжения состояний равновесия (1.10) в фазовом пространстве системы (1.1) сужаются. Количество же их, напротив, при $\nu \rightarrow 0$ неограниченно увеличивается. В подобной ситуации случайные малые возмущения начальных условий системы приводят к спонтанному ее переходу от одного устойчивого стационарного режима к другому, т. е. наблюдается так называемый *флуктуационный хаос*. Данный феномен, как и явление буферности, представляет собой одну из фундаментальных закономерностей функционирования сложных систем, присущую не только диссипативным средам. Например, в [59] флуктуационный хаос был обнаружен при экспериментальном анализе автоколебаний в целом ряде генераторов с распределенными параметрами.

В заключение добавим, что часть перечисленных свойств в определенной мере была известна и ранее, в основном благодаря численному анализу модели (2.42) (являющейся в данной тематике типовой). Для примера, наряду с [24] укажем работы [13] и [9], где говорится о росте числа устойчивых диссипативных структур краевой задачи (2.42) при увеличении l , и работу [135], в которой отмечен аналог принципа подобия — свойство скейлинга.

3.3. Обсуждение полученных результатов с позиций синергетики. В этом пункте дадим естественнонаучную интерпретацию полученных нами результатов, опираясь на развитые в [18, 111, 116, 122, 128] представления. Напомним, что, как неоднократно отмечалось в указанных работах, в сложной системе наряду с процессами

разрушения и распада могут идти и противоположные процессы, связанные с пространственной и временной самоорганизацией. Последнее означает, что в рассматриваемых системах из хаоса могут возникнуть устойчивые самоподдерживающиеся структуры или, как их принято называть, диссипативные структуры (от латинского слова *dissipatio* — рассеяние). Данное название оправдано тем, что такие структуры возникают и существуют исключительно в термодинамически неравновесных условиях, т. е. при постоянном рассеянии энергии во внешнюю среду.

Рассмотрим некоторую сложную систему (биофизическую, экологическую, социальную и т. д.), математической моделью которой является краевая задача (1.1). Отметим, что такая система может функционировать в режиме максимальной пространственной симметрии, так как задача (1.1) допускает, очевидно, решения, не зависящие от x . Более того, если наша система термодинамически равновесна или близка к равновесной, то она стремится к единственному устойчивому состоянию равновесия $u = 0$. Именно это и наблюдается при достаточно больших значениях параметра ν , т. е. при интенсивном диффузионном факторе выравнивания. При уменьшении же ν может происходить, казалось бы, ничем не мотивированное (не обусловленное какими-либо внешними факторами) нарушение пространственной симметрии.

Итак, возникновение в данной системе устойчивых пространственно неоднородных состояний равновесия уместно считать простейшей формой самоорганизации: система как бы сама выбирает «из шума» характерную для себя (определяемую значениями параметров и начальными условиями) длину пространственной волны, усиливает ее и делает устойчивой. Или, другими словами, из хаоса рождается порядок. Нетривиальным здесь является то обстоятельство, что этот порядок зачастую носит множественный характер, т. е. одновременно может существовать любое фиксированное число «островков порядка» (устойчивых диссипативных структур краевой задачи (1.1)). Тем самым, при достаточно малых значениях ν в фазовом пространстве рассматриваемой системы имеется целый набор устойчивых дискретных состояний, разделенных неустойчивыми промежутками (образ горной страны).

Подводя итог, отметим, что явление буферности представляет собой одну из характерных особенностей процесса самоорганизации в сложных системах. Естественно, данный вывод не нов, так как в той или иной форме о множественности режимов самоорганизации говорится и в [18, 111, 116, 122, 128] (см. также статьи [26, 65, 92], посвященные проблемам самоорганизации и буферности в задачах экологии). Однако в настоящей работе, по всей видимости, впервые строгое математическое обоснование этого положения дано в классической модельной ситуации, когда речь идет о существовании и устойчивости диссипа-

тивных структур в системах типа реакция–диффузия с граничными условиями Неймана на отрезке.

§ 4. Приложение к задаче о параметрической буферности

Физические основы теории параметрических колебаний представлены в классических работах Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, а математический аспект проблемы изложен, например, в монографии [11], содержащей теорию нелинейного параметрического резонанса для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для некоторых классов волновых уравнений формализм построения возбуждаемых параметрических колебаний предложен в работе [107]. Однако теория линейного параметрического резонанса продвинута столь далеко [121, 129], что позволяет придать результатам из [107] строгий смысл.

Изучение параметрического резонанса в сингулярно возмущенных системах по инициативе Ю. С. Колесова начато в заметке [56], в которой исследовались параболические системы типа реакция–диффузия с малыми коэффициентами диффузии. В дальнейшем эта тематика развивалась в работах [47, 83, 88, 77], посвященных, главным образом, анализу параметрических колебаний в случае сингулярно возмущенных телеграфных уравнений.

В данном параграфе остановимся на связи, казалось бы, весьма далеких друг от друга проблем: нелинейного параметрического резонанса в сингулярно возмущенных системах и теории диссипативных структур. А именно, опираясь на полученные выше результаты, покажем, что в системах параболических и гиперболических уравнений с малой диффузией может реализовываться так называемый феномен параметрической буферности, т. е. существование у рассматриваемых систем при подходящем выборе параметров внешнего воздействия любого фиксированного числа устойчивых параметрических колебаний.

4.1. Описание объектов исследования. Начнем с описания исследуемого класса гиперболических систем. На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (A_0 + \varepsilon A_1) \frac{\partial u}{\partial t} + (B_0 + \varepsilon B_1(\tau))u &= \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$; $0 < \varepsilon \ll 1$; A_0, B_0, D — постоянные матрицы, причем $D^* = D$, $D > 0$; π -периодическая по τ (где $\tau = (1 + \varepsilon\delta)t$, $\delta = \text{const}$) гладкая матрица $B_1(\tau)$ имеет на периоде нулевое среднее значение; тейлоровское разложение в нуле вектор-функции $f(u, v) \in C^\infty$ начинается с квадратичных слагаемых. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $(u, \partial u/\partial t)$) задачи (4.1) возьмем $\overset{\circ}{W}_2^2 \times W_2^1$ (по поводу определения $\overset{\circ}{W}_2^2$ см. п. 1.1).

Сформулируем ограничения, при которых будет изучаться проблема существования и устойчивости периодических по t решений краевой задачи (4.1), бифурцирующих из ее нулевого состояния равновесия. Первое ограничение касается автоколебательных свойств уравнения из (4.1) при $\varepsilon = 0$.

Условие 4.1. *Предполагаем, что квадратичный пучок матриц $\lambda^2 I + \lambda A_0 + B_0$, где I — единичная матрица, имеет простую пару чисто мнимых собственных значений $\pm i$, т. е. существуют такие векторы a и b , что*

$$\begin{aligned} (-I + iA_0 + B_0)a = 0, \quad (-I - iA_0^* + B_0^*)b = 0, \\ (2ia + A_0a, b) = 1, \quad (2ia + A_0a, \bar{b}) = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $(*, *)$ — обычное скалярное произведение в комплексификации \mathbb{R}^m . Остальные же собственные значения рассматриваемого пучка матриц считаем лежащими в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Следующее ограничение обеспечивает нужное согласование «обыкновенной» и «диффузионной» частей в (4.1).

Условие 4.2. *Считаем, что при всех $z > 0$ собственные значения квадратичного пучка матриц*

$$\lambda^2 I + \lambda A_0 + B_0 + zD \quad (4.3)$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а при малых z те собственные значения $\lambda(z)$, $\bar{\lambda}(z)$ пучка (4.3), для которых $\lambda(0) = i$ (их существование вытекает из условия 4.1), отходят от мнимой оси общим образом, т. е. выполняется неравенство

$$-\operatorname{Re} \lambda'_z \Big|_{z=0} = \operatorname{Re} (Da, b) > 0. \quad (4.4)$$

Перед формулировкой очередного ограничения предположим для простоты, что все собственные значения $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, матрицы D различны, и обозначим через e_k , $k = 1, \dots, m$, соответствующую им ортонормированную систему собственных векторов.

Условие 4.3. *Предположим, что*

$$(A_0 e_k, e_k) > 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

Остановимся на связи условий 4.2 и 4.3. Заметим, что собственные значения $\lambda_k(z)$, $\bar{\lambda}_k(z)$, $k = 1, \dots, m$, пучка (4.3) допускают асимптотику

$$\lambda_k(z) = i\sqrt{\lambda_k z} - \frac{1}{2}(A_0 e_k, e_k) + O(z^{-1/2}), \quad z \rightarrow \infty.$$

А отсюда и из условия 4.2 автоматически следует, что

$$(A_0 e_k, e_k) \geq 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Строгие же неравенства (4.5) гарантируют, что с ростом z собственные значения $\lambda_k(z), \bar{\lambda}_k(z)$ не приближаются к мнимой оси. Отметим, далее, что при строгом нарушении условия 4.2 или 4.3, когда при некотором $z_0 > 0$ у пучка (4.3) есть собственное значение в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, нулевое решение краевой задачи (4.1) экспоненциально неустойчиво с показателем экспоненты порядка единицы. Тем самым, заведомо неустойчивыми будут и все бифурцирующие из него при $\varepsilon > 0$ периодические решения, т. е. проблема параметрического возбуждения колебаний становится нелокальной.

Наконец, последнее условие — два стандартных в этой тематике ограничения. Одно из них касается линейной части краевой задачи (4.1) и обеспечивает устойчивость ее нулевого решения при отсутствии внешнего воздействия, а другое представляет собой некоторое ограничение на фигурирующую в (4.1) нелинейность.

Условие 4.4. *Считаем, что $\operatorname{Re}(iA_1 a, b) > 0$, $\operatorname{Re} d < 0$, где d — комплексная ляпуновская величина обыкновенного уравнения, получающегося из (4.1) при $\varepsilon = 0$.*

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что при описанных ограничениях и при $\varepsilon = 0$ в задаче об устойчивости нулевого решения системы (4.1) реализуется критический случай резонанса 1 : 1 бесконечного порядка. В подобной ситуации для построения автоколебаний, бифурцирующих из нуля при $\varepsilon > 0$, в начале 80-х Ю. С. Колесов предложил специальный асимптотический метод, названный впоследствии методом квазинормальных форм [79, 82, 85]. Поскольку в дальнейшем этот метод будет применяться нами неоднократно в различных вариантах, то имеет смысл остановиться вкратце на его идейной части.

Для пояснения общей идеи метода квазинормальных форм выделим два этапа. На первом этапе к исходной сингулярно возмущенной системе применяется стандартная процедура «формальной нормализации», в процессе которой могут отбрасываться слагаемые хотя и малые по порядку относительно ε , но по силе отнюдь не являющиеся подчиненными остальным. Результатом данной процедуры оказывается некая модельная система (квазинормальная форма), которая уже не содержит малых параметров (точнее говоря, от них можно избавиться посредством надлежащих нормировок) и изначально представляет собой счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако в ряде случаев эту систему удастся «свернуть» в ту или иную модельную краевую задачу. Типовым примером здесь служит краевая задача (3.6), (3.4), являющаяся квазинормальной формой для исходной краевой задачи (1.1), (2.1) при $\nu = \varkappa\mu$ (в этом случае была выпол-