

В.В. АЛЕКСАНДРОВ,
В.Г. БОЛТЯНСКИЙ, С.С. ЛЕМАК,
Н.А. ПАРУСНИКОВ, В.М. ТИХОМИРОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ

*Рекомендовано учебно-методическим Советом по математике
и механике УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов
высших учебных заведений, обучающихся по группе
направлений и специальностей механики*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2005

УДК 531.3:681.5.01;531.3:62-50

ББК 22.2

О 62

Оптимальное управление движением / В. В. Александров, В. Г. Болтянский, С. С. Лемак, Н. А. Парусников, В. М. Тихомиров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 376 с. — ISBN 5-9221-0401-2.

В книге рассматриваются экстремальные задачи, возникающие при построении многоуровневых систем управления движением сложных объектов.

Для студентов, аспирантов и специалистов по прикладной математике и механике.

ISBN 5-9221-0401-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2005

© В. В. Александров, В. Г. Болтянский,
С. С. Лемак, Н. А. Парусников,
В. М. Тихомиров, 2005

Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А.,
Тихомиров В.М.

Оптимальное управление движением Учеб. пособие Под ред.
В. В. Александрова

УДК 531.3:681.5.01;531.3:62-50 ББК 22.2

Рецензенты:

кафедра теоретической механики
Московского энергетического института,
профессор А. В. Шаронов

В книге рассматриваются экстремальные задачи, возникающие при
построении многоуровневых систем управления динамикой сложных
объектов.

Для студентов, аспирантов и специалистов по прикладной матема-
тике и механике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-----------------------	---

Часть I

Введение в динамику управляемых систем

Глава 1. Управляемые движения и процессы	9
§ 1. Математическая модель движущегося объекта с терминальными элементами и многоуровневое управление движением	9
§ 2. Уравнения в отклонениях и постановка задач синтеза позиционного управления	17
§ 3. Управляемые процессы в механике полёта и биотехнологии	25
Глава 2. Структурный анализ и линейный синтез	35
§ 1. Критерии управляемости и наблюдаемости	35
§ 2. Алгоритмы управления и оценивания с заданными свойствами переходных процессов	48
§ 3. Структура стационарных динамических систем с позиций управляемости и наблюдаемости	63
§ 4. Алгоритмы управления и оценивания системы со многими входами и выходами	73
§ 5. Математическая модель замкнутой управляемой системы и её устойчивость	80
§ 6. Синтез информационных процессов управления в механике полёта и биотехнологии	89
Глава 3. Влияние стохастических возмущений	103
§ 1. Некоторые понятия прикладной теории случайных процессов	103
§ 2. Случайные возмущения динамики линейных систем и формирующие уравнения	117

Часть II

Оптимизация движения

Глава 4. Общая теория экстремальных задач	127
§ 1. Постановка задач оптимизации	127
§ 2. Принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума	133
§ 3. Принцип максимума Понтрягина	145
§ 4. Вариационное исчисление как часть теории оптимального управления	149
§ 5. Фрагмент теории поля	153
§ 6. Существование решений экстремальных задач и алгоритмы их поиска.	155
Глава 5. Синтез оптимальных управлений	165
§ 1. Примеры Фельдбаума и Бушоу	165
§ 2. Метод шатров и принцип максимума.	169
§ 3. Синтез оптимальных быстродействий	183
§ 4. Метод динамического программирования и его обоснование	199
§ 5. Достаточное условие оптимальности в форме регулярного синтеза	205
Глава 6. Оптимальная стабилизация	214
§ 1. Оптимальное оценивание при случайных измерениях.	214
§ 2. Непрерывный фильтр Калмана.	226
§ 3. Меры оцениваемости	232
§ 4. Задача сглаживания.	240
§ 5. Оптимальная стабилизация линейных систем.	245
§ 6. Математическая модель замкнутой системы с двумя уровнями оптимального управления.	256
§ 7. Оптимизация динамики управляемого полёта	264
Глава 7. Робастная оптимизация и максиминное тестирование качества стабилизации	273
§ 1. Робастная оптимизация.	273
§ 2. Задача Булгакова о максимальном отклонении и вариационный критерий абсолютной устойчивости.	278
§ 3. Гарантированное тестирование и минимаксная стабилизация.	304
§ 4. Седловая точка динамической игры и решение задач тестирования и стабилизации	318
§ 5. Максиминное тестирование точности стабилизации стохастических систем	342
Заключение	359
Упражнения	360
Список литературы	368

Предисловие

Более 60 лет назад в научной литературе появились постановки и решения конкретных экстремальных задач по анализу и синтезу управляемых динамических систем (Б. В. Булгаков — 1937 г., А. А. Фельдбаум — 1948 г. и др.). Затем были созданы и общие методы решения таких экстремальных задач (Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе — 1956 г., Р. Беллман — 1957 г. и др.). Постепенно сформировалась новая область математики — оптимальное управление динамическими системами, или теория оптимизации управляемых систем. Число решённых конкретных задач и приложений результатов этой теории на практике огромно и не поддаётся детальному описанию. Число монографий и учебных пособий, посвящённых полностью или частично этим вопросам, также велико. Например, хорошо известные монографии Н. Н. Красовского, А. М. Летова. Однако среди них отсутствует книга, где были бы изложены одновременно и специфика различных экстремальных задач, возникающих при построении многоуровневых систем управления движением сложных объектов, и строгий подход к решению этих задач. Поэтому сотрудники механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и Математического института им. В. А. Стеклова решили создать учебное пособие «Оптимизация динамики управляемых систем» (изд-во Моск. ун-та, 2000) на базе тех книг, которые были написаны ими ранее: *Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления* (М.: Наука, 1969); *Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989); *Александров В. В., Злочевский С. И., Лемак С. С., Парусников Н. А. Введение в динамику управляемых систем* (М.: Мех.-мат. ф-т МГУ, 1993).

Данное учебное пособие состоит из двух частей. В первой части — «Введение в динамику управляемых систем» — собраны сведения, необходимые для математической постановки различных экстремальных задач по анализу и синтезу управляемых систем.

Во второй части — «Оптимизация динамики» — рассматриваются экстремальные задачи, возникающие при аналитическом конструировании двух уровней управления динамической системой: верхнего уровня — программного управления и нижнего уровня — позиционного управления.

Во втором, переработанном издании этого учебного пособия, которое выходит под названием «Оптимальное управление движением», сохранена структура книги и в то же время улучшено изложение отдель-

ных результатов. Это связано с тем, что математическое моделирование управляемых динамических систем (УДС) требует гораздо больше усилий, чем математическое моделирование неуправляемых систем, так как математическая модель любой УДС описывает сложный процесс, состоящий из двух взаимосвязанных процессов: движения управляемого объекта и процесса формирования сил и моментов, управляющих этим движением. При этом решение задач вариационного анализа чередуется с решением задач оптимального синтеза. Поэтому более подробно излагается постановка задач оптимизации, строгие подходы по их решению и решение конкретных задач на основе этих подходов.

Первая глава написана В. В. Александровым, вторая и шестая — В. В. Александровым, Н. А. Парусниковым и С. С. Лемаком, третья — Н. А. Парусниковым, четвёртая — В. М. Тихомировым, пятая — В. Г. Болтянским, седьмая — В. В. Александровым, С. С. Лемаком и В. Г. Болтянским.

Отзывы просьба направлять по адресу: 119 899, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет.

В. В. Александров

Часть I

**ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ
УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ**

Глава 1

УПРАВЛЯЕМЫЕ ДВИЖЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ

§ 1. Математическая модель движущегося объекта с терминальными элементами и многоуровневое управление движением

В курсах теоретической механики и механики сплошных сред изучаются статические и динамические системы. При этом вопросы управления такими системами не рассматриваются. В то же время и в природе, и в технике имеются динамические системы, снабжённые исполнительными механизмами (двигателями), что позволяет изменять позицию (состояние) этих систем, т. е. управлять ими. Будем говорить в этом случае, что рассматривается движение управляемого объекта, которое описывается дифференциальными уравнениями с функциональным включением

$$\dot{y} = f(y, u), \quad (1.1)$$

$$u(\cdot) \in W. \quad (1.2)$$

Здесь y — n -мерный вектор-столбец координат, описывающий состояние управляемого объекта, u — s -мерный вектор-столбец управляющих воздействий, $f(y, u)$ — дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция своих координат, W — функциональное множество, описывающее имеющиеся ресурсы по управлению движением объекта.

Физический смысл управляющих воздействий может быть различным: это могут быть непосредственно управляющие силы и моменты, в случае если исполнительные механизмы идеальны, или управляющие сигналы, подающиеся на эти механизмы, когда необходимо учесть их функционирование. Описание функционального множества W позволяет представить разнообразные ограничения на управления u , встречающиеся на практике, в компактном виде: ограничения на величину или производную, ограничения на интеграл или ограничение в средне-квадратичном (по энергии) и т. д.

Пример 1.1. Рассмотрим динамическую систему с конечным числом степеней свободы, которая является голономной и склерономной (т. е. наложенные связи стационарны [45]). Тогда уравнения движения

имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.3)$$

Здесь q_i — обобщённые координаты системы; \mathcal{L} — лагранжиан системы, равный

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q}^\top A(q) \dot{q} - \mathcal{V}_0(q),$$

где q — m -мерный вектор обобщённых координат q_i , $A(q)$ — матрица, определяющая кинетическую энергию системы, $\mathcal{V}_0(q)$ — потенциальная энергия системы, верхний индекс \top обозначает транспонирование. Пусть $Q_i = C_i(q)r$ — обобщённые силы, где r — s -мерный вектор-столбец координат, описывающих функционирование исполнительных механизмов.

Предположим, что уравнения функционирования исполнительных механизмов имеют вид

$$\frac{d^l r_j}{dt^l} = \chi_j \left(u_j, r_j, \dots, \frac{d^{l-1} r_j}{dt^{l-1}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.4)$$

где u_j — управляющий сигнал и $l \geq 1$.

Уравнения (1.3) можно переписать в виде

$$A_i(q) \ddot{q} + \dot{q}^\top B_i(q) \dot{q} + \mathcal{V}_i(q) = C_i(q)r, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.5)$$

где $A_i(q)$ — строки матрицы $A(q)$,

$$\mathcal{V}_i(q) = \frac{\partial \mathcal{V}_0(q)}{\partial q_i}, \quad B_i(q) = \left(\frac{\partial A_i^\top(q)}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial A(q)}{\partial q_i} \right)$$

— $(m \times m)$ -матрицы.

Так как матрица $A(q)$ является положительно определённой, то систему уравнений (1.5) и (1.4) можно записать в форме Коши (1.1), где

$$y^\top = \left(q^\top, \dot{q}^\top, r^\top, \dots, \frac{d^{l-1} r^\top}{dt^{l-1}} \right), \quad n = 2m + sl.$$

Можно было бы рассматривать и более сложные математические модели динамических систем, чем модель (1.1), например уравнения в частных производных при описании движения тех или иных сплошных сред. Однако для простоты изложения ограничимся обыкновенными дифференциальными уравнениями. Часто такая модель используется как приближённая и для описания динамических систем с распределёнными параметрами.

Пример 1.2. Рассмотрим изгибные колебания консоли центрифуги, вращающейся с заданной скоростью $\omega(t)$ в горизонтальной плоскости. Пусть консоль представляет собой многозвенник со звеньями длиной l_i и массой m_i ($i = 1, \dots, k$), расположенной на конце невесомого звена. Там же расположены и спиральные пружины с жёсткостями c_{i+1} (рис. 1.1.1). В качестве управления возьмём программную угловую

скорость $\omega(t)$, предполагая, что двигатель, вращающий консоль, является идеальным. Тогда уравнения (1.3) будут иметь вид

$$A(\varphi)\ddot{\varphi} + B(\varphi)\dot{\varphi}^2 + C_0\varphi = -\left(\dot{\omega}A(\varphi)\mathbf{1} + \omega^2B(\varphi)\mathbf{1} + 2\omega B(\varphi)\dot{\varphi}\right), \quad (1.6)$$

где $A_{ij} = a_{ij} \cos(\varphi_i - \varphi_j)$ ($a_{ij} = l_i l_j \sum_{\tau \geq i, j}^k m_\tau$), $i, j = 1, \dots, k$,

$$B_{ij} = a_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad (\dot{\varphi}^2)^\top = (\dot{\varphi}_1^2, \dots, \dot{\varphi}_k^2), \quad \mathbf{1}^\top = (1, \dots, 1),$$

$$C_0 = \{c_{ij}\}, \quad c_{ij} = \begin{cases} l_j + l_{j+1} & \text{при } j = i \quad (l_{k+1} = 0), \\ -l_j & \text{при } j = i + 1, \\ -l_i & \text{при } j = i - 1, \\ 0 & \text{при } |j - i| > 1, \end{cases}$$

φ_i — обобщённые координаты, описывающие движение звеньев относительно оси, жёстко связанной с двигателем.

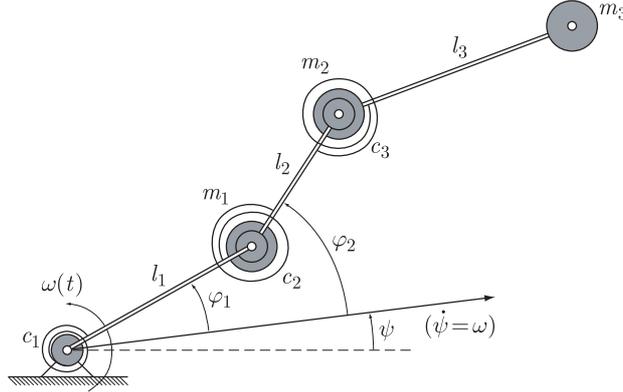


Рис. 1.1.1

1.1. Первый уровень управления. Перейдём теперь к постановке задачи позиционного управления движением объекта (1.1), (1.2). Заданы желаемое движение, которое в дальнейшем будем называть программным, $y^p(t), t \in [t_0, t_1], t_0 < t_1 \leq \infty$, и программное управление $u^p(t)$, реализующее это движение в силу тождества

$$\begin{cases} \dot{y}^p(t) \equiv f(y^p(t), u^p(t)), \\ u^p(\cdot) \in W, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \quad (1.7)$$

Совокупность, состоящую из трёх элементов $y^p(\cdot), u^p(\cdot), [t_0, t_1]$, будем называть *программным управляемым процессом* $\{y^p(\cdot), u^p(\cdot), [t_0, t_1]\}$. При этом различаются три ситуации:

- 1) программный управляемый процесс задан в явном виде;

- 2) программный управляемый процесс задан в неявном виде, например как решение экстремальной задачи;
- 3) программный управляемый процесс неизвестен.

Если программный процесс задан в явном виде, то можно рассмотреть задачу позиционного управления, заключающуюся в реализации программного движения $y^n(t)$. Для того чтобы осуществить эту постановку, необходимо знать отклонения реального движения $y(t)$ от программного $y^n(t)$. Предположим, что имеется m измерительных устройств, с помощью которых можно получить первичную информацию о реальном движении. Обработав эту информацию, можно оценить текущие отклонения $x(t) = y(t) - y^n(t)$ и построить алгоритмы формирования управляющих сигналов.

Систему, в которой реализуется информационный процесс от обработки первичной информации до передачи управляющих сигналов на исполнительные механизмы естественно назвать *системой управления движением* [2, 3, 60, 99]. Определим *управляемую динамическую систему* (УДС) как совокупность, состоящую из движущегося объекта, системы управления движением этого объекта и терминальных элементов

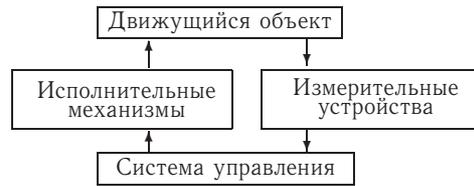


Рис. 1.1.2

элементов (измерительных устройств и исполнительных механизмов), соединённых в соответствии с функциональной схемой, представленной на рис. 1.1.2 [3, 103].

Итак, ещё до математической постановки задачи синтеза УДС становится ясным отличие управляемой динамической системы

от неуправляемой. В случае УДС имеют место два процесса, взаимно влияющих друг на друга:

- *механический процесс* — движение управляемого объекта;
- *информационный процесс* — процесс формирования управляющих сигналов.

Информационный управляющий процесс состоит из получения первичной информации о движении с помощью измерительных устройств, обработки этой информации и формирования на основе результатов этой обработки управляющих сил и моментов. Осуществляемая таким образом связь между движением объекта и управляющими силами и моментами получила название *обратной связи*.

Для постановки задачи позиционного управления ограничимся простейшей моделью, описывающей получение первичной информации z :

$$z = \varphi(y) + \gamma(t), \quad (1.8)$$

где $\gamma(t)$ — инструментальные погрешности измерительных устройств.

Если $y(t_0) = y^n(t_0)$, то при $u(t) \equiv u^n(t)$ движение объекта (1.1), (1.2) будет совпадать с программным. К сожалению, почти всегда существуют начальные отклонения (возмущения) $x(t_0) \neq 0$. Таким образом, имеет место следующая задача позиционного управления: используя первичную информацию (1.8), построить оператор управления $u = P[z, t]$, позволяющий уменьшить начальные отклонения. Иногда такой оператор управления называют регулятором. Прежде чем переходить к математической постановке, отметим, что математическая модель движущегося объекта и терминальных элементов дана: это уравнения (1.1), (1.8) и включение (1.2). Кроме того, дан программный процесс (1.7).

Требуется осуществить синтез системы позиционного управления и тем самым построить полную математическую модель УДС в соответствии с функциональной схемой, представленной на рис. 1.1.2.

Пример 1.3. На практике часто возникает ситуация, когда только часть программного движения задана в явном виде. Для знакомства с такой ситуацией рассмотрим полёт аппарата на постоянной высоте с постоянной скоростью.

Для определённости будем считать, что в экваториальной плоскости Земли движется летательный аппарат (ЛА), представляющий собой абсолютно твёрдую оболочку с плоскостью симметрии, совпадающей с экваториальной плоскостью. Центр масс (ЦМ) летательного аппарата расположен на продольной оси и не меняет своего положения. При выгорании топлива создаётся реактивная сила P , которая также направлена по продольной оси ЛА. Влияние гравитационного поля учтём в виде гравитационной силы mg , а влияние атмосферы — в виде силы лобового сопротивления X , подъёмной силы Y и аэродинамического момента M_z (атмосфера предполагается спокойной). Тогда уравнения (1.1) будут иметь вид [78, 80]

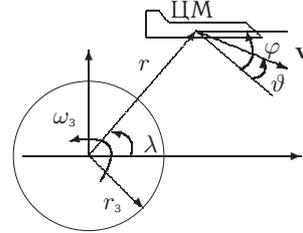


Рис. 1.1.3

$$\begin{aligned}
 m\dot{v} &= m\omega_3^2 r \sin \vartheta + P \cos \alpha - X - mg(r) \sin \vartheta, \\
 mv\dot{\vartheta} &= m\left(\left(\omega_3^2 r + \frac{v^2}{r}\right) \cos \vartheta - 2\omega_3 v\right) + P \sin \alpha + Y - mg(r) \cos \vartheta, \\
 J_z \dot{\omega} &= M_z, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\lambda} = -\frac{v}{r} \cos \vartheta, \\
 \dot{r} &= v \sin \vartheta, \quad \dot{h} = -u_1.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь $r = r_3 + h$, где r_3 — радиус Земли, h — высота полёта; λ — долгота; φ — угол тангажа (угол между горизонтом и продольной осью ЛА); v — скорость центра масс ЛА относительно Земли; ω_3 — угловая скорость вращения Земли; ϑ — траекторный угол (угол между

горизонтом и вектором скорости центра масс); $\varphi = \alpha + \vartheta$, где α — угол атаки (рис. 1.1.3); J_z — момент инерции ЛА; g — гравитационное ускорение; u_1 — скорость выгорания топлива; $P = -\nu u_1$, где ν — относительная скорость истечения газов из сопла двигателя (предполагается постоянной).

Таким образом, шесть первых уравнений описывают движение механической системы с тремя степенями свободы, а седьмое — функционирование реактивного двигателя.

Рассмотрим сначала возможность космического полёта, т. е. полёта на постоянной большой высоте $h_n > 400$ км, где атмосфера практически отсутствует ($X \equiv Y \equiv M_z \equiv 0$). Так как $h_n \equiv \text{const}$, то $\vartheta_n \equiv 0$. Пусть $v_n \equiv v_k$ — космическая путевая скорость. Тогда из первого уравнения (1.9) следует, что $P \equiv 0$, т. е. топливо тратить не надо. Последние пять уравнений обращаются в тождество при $u_1 \equiv 0$ и $\lambda = \lambda_0 - (v_k/r_n)(t - t_0)$, $\omega \equiv 0$, $\varphi \equiv \text{const}$. Чтобы задать программное движение в явном виде, осталось определить v_k . Из второго уравнения (1.9) следует, что $v_k = \pm \sqrt{r_n g(r_n)} + \omega_3 r_n$, где $r_n = r_3 + h_n$ и знак первого слагаемого определяется в зависимости от направления орбитального полёта.

Замечание 1.1. Достижение космической скорости v_k — самостоятельная задача, которая здесь не рассматривается.

Рассмотрим теперь возможность полёта с постоянной скоростью на постоянной малой высоте $h_n < 10$ км. Эта задача была решена Н. Е. Жуковским [78]. Ограничимся следующим приближённым рассмотрением этой задачи: временной интервал $[t_0, t_1)$ невелик, изменением массы m пренебрегаем и $v_n \ll v_k$, тогда $g - \omega_3^2 r_n - v_n^2/r_n - 2\omega_3 v_n \approx g$.

Пусть дана неполная программа полёта

$$h \equiv h_n, \quad v \equiv v_n > v_{\min}, \quad \vartheta \equiv 0, \quad \varphi \equiv \alpha_n = ?,$$

$$\omega \equiv 0, \quad l = \lambda r_n = l_0 - v_n(t - t_0).$$

Если аэродинамические силы и момент имеют вид

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho(h_n)v_n^2}{2} S c_x(\alpha), & Y &= \frac{\rho(h_n)v_n^2}{2} S c_y(\alpha), \\ M_z &= \frac{\rho(h_n)v_n^2}{2} S l_1 m_z(\alpha, \omega, \delta), \end{aligned} \quad (1.10)$$

(где c_x, c_y, m_z — аэродинамические коэффициенты, $c_x = c_x^0 + B c_y^2$, $c_y = c_y^0 + c_y^\alpha \alpha$, $m_z = m_z^0 + m_z^\alpha \alpha + m_z^\omega \omega + m_z^\delta \delta$, S — характерная площадь ЛА, l_1 — средняя аэродинамическая хорда крыла ЛА, ρ — плотность атмосферы, δ — угол поворота руля высоты), то $v_{\min} \cong \sqrt{\frac{2m}{c_y^0 \rho(h_n) S}}$.

Для программного управления полётом, т. е. для выполнения тождества (1.7), необходимо обеспечить следующие условия. Из первого

уравнения находится потребная тяга

$$P_n = \frac{1}{\cos \alpha_n} \rho(h_n) \frac{v_n^2}{2} S c_x(\alpha_n). \quad (1.11)$$

Для реализации полёта необходимо выполнение включения (1.7) (потребная тяга должна быть располагаемой по Н. Е. Жуковскому). Подставив значение тяги (1.11) во второе уравнение (1.9), получим трансцендентное уравнение для определения неизвестного угла атаки α_n . Это уравнение получило название балансирующего. При $v_n > v_{\min}$ балансирующее уравнение имеет решение. Например, в линейном приближении по α уравнение принимает вид

$$c_y^0 + (c_y^\alpha + c_x^0 + Bc_y^{0^2})\alpha \cong \frac{2mg(h_n)}{\rho(h_n)v_n^2 S}. \quad (1.12)$$

Решив уравнение (1.12), полностью зададим программное движение в явном виде. Второе программное управление — поворот руля высоты $\delta_n = u_2$ — определяется из третьего уравнения (1.9):

$$m_z^0 + m_z^\alpha \alpha + m_z^\omega \omega + m_z^\delta \delta = 0. \quad (1.13)$$

Таким образом, программный управляемый процесс

$$\{y^n(\cdot), u^n, [t_0, t_1]\}$$

задан полностью в явном виде. Для этого, как следует из (1.11), (1.13), пришлось решить приближённо обратную задачу механики: по заданному движению $h_n, \vartheta_n, v_n, \omega_n$ и решению балансирующего уравнения (1.12) найти необходимые управляющие силы и моменты.

1.2. Второй уровень управления. Более сложная процедура управления возникает в случае, если программное управление и программное движение объекта, реализуемое с помощью этого управления, неизвестны заранее по тем или иным причинам. Пусть движение управляемого объекта происходит на интервалах времени $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots$. Известны функционалы $\chi_k(y(t_k))$, минимальные значения которых определяют стратегию движения, т. е. оптимальный управляемый процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_{k-1}, t_k]\}$. Предположим для простоты дальнейших рассуждений, что решения соответствующих экстремальных задач существуют и единственны. Почти всегда оптимальные управления $u^0(t)$ и движения $y^0(t)$ на практике находятся приближённо. Эти приближённые значения и будем называть программными управлениями и траекториями: $\{y^n(\cdot), u^n(\cdot), [t_{k-1}, t_k]\}$. Программный управляемый процесс, таким образом, становится известным, и можно говорить о его реализации с помощью измерений реального движения и организации позиционного управления. Будем формировать управление u как сумму программного и позиционного управления:

$$u = u^n(t) + \tilde{u}(\tilde{x}, t),$$

где \tilde{x} — оценка отклонений $x = y - y^n$, полученная с помощью алгоритма оценивания, позволяющего обработать первичную информацию.

Здесь координаты $\tilde{x}_i(t)$ описывают первый уровень управления, координаты $y_i^n(t)$ — второй уровень управления.

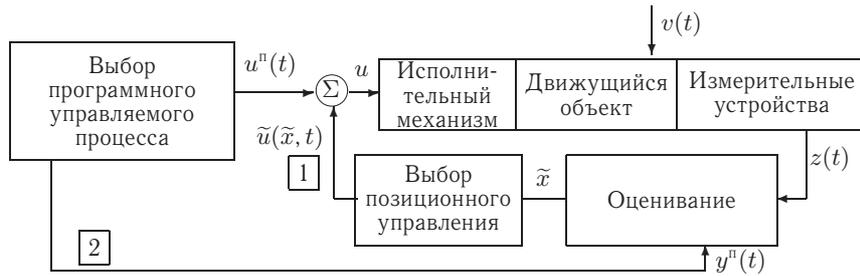


Рис. 1.1.4

В силу наличия как инструментальных погрешностей измерительных устройств (1.8), так и возмущающих сил и моментов, действующих на объект, на практике часто возникает именно такая ситуация. При этом вместо математической модели (1.1) приходится рассматривать более сложную модель

$$\dot{y} = f(y, u, v), \quad (1.14)$$

где v — вектор-функция, описывающая влияние возмущающих сил и моментов.

Поэтому на каждом временном интервале $[t_k, t_{k+1}]$ приходится одновременно решать две задачи:

- задачу нахождения программного управляемого процесса;
- задачу реализации программного движения объекта (при этом используются оставшиеся ресурсы управления),

т. е. мы имеем замкнутую УДС с двухуровневой системой управления (рис. 1.1.4).

1.3. Два уровня полуавтоматического управления. В случае полуавтоматического управления движением возникает ещё одна возможная схема двухуровневого управления. Предположим, что второй уровень управления представлен человеком (пилотом), который, используя в реальном времени собственные данные о движении объекта, управляет им. Первый уровень (автоматического) управления вступает в действие в экстремальной ситуации либо автоматически, либо по сигналу от верхнего (второго) уровня. Таким образом система двухуровневого полуавтоматического управления имеет иную функциональную схему, представленную на рис. 1.1.5 (более подробно см. § 2).

Возможно также и большее количество уровней управления, образующих иерархическую систему управления движением. Так в послед-

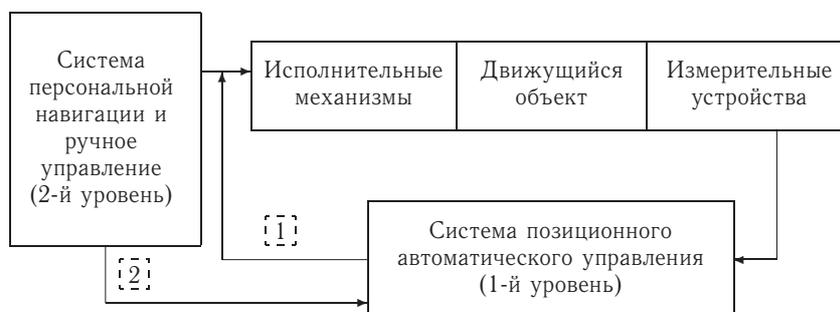


Рис. 1.1.5

ней главе представлена трёхуровневая система управления тестирующим динамическим стендом-тренажёром.

§ 2. Уравнения в отклонениях и постановка задач синтеза позиционного управления

2.1. Для текущих отклонений $x(t) = y(t) - y^n(t)$ можно выписать дифференциальные уравнения, определяющие их поведение при $u(t) = u^n(t)$ для $t \in [t_0, t_1]$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} - \dot{y}^n = f(y, u^n) - f(y^n, u^n) = \\ &= f(y - y^n + y^n, u^n) - f(y^n, u^n) = \tilde{f}(x, t), \quad (2.1) \end{aligned}$$

где $\tilde{f}(0, t) \equiv 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ и $x(t_0) \neq 0$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (2.1) имеет тривиальное решение, соответствующее программному движению $y^n(t)$ управляемого объекта. Теоретической основой анализа текущих отклонений, т. е. нетривиальных решений системы (2.1), является теория устойчивости, разработанная русским учёным А. М. Ляпуновым более ста лет назад. Напомним определения устойчивости, необходимые для постановки задач синтеза.

Ограничимся при этом частным, но важным для дальнейшего изложения случаем — стационарным программным движением $y^n(t) = y^c(t)$ и условием $t_1 = \infty$. Для этого определим понятие «циклической» координаты. Координату y_i ($i = 0, 1, \dots, k; 0 \leq k < n$) будем называть «циклической», если $\frac{\partial f(y, u)}{\partial y_i} = 0$ и $\frac{\partial f_i(y, u)}{\partial u} = 0$. Движение $y^c(t)$ называется стационарным, если $\dot{y}_i^c \equiv \text{const}, i = 1, 2, \dots, k$ ($k \geq 0$), $\dot{y}_j^c \equiv 0, j = k + 1, \dots, n$, где y_1, \dots, y_k — циклические координаты. (При $k = 0$ «циклических» координат у объекта нет.)

Для осуществления стационарного движения в соответствии с (1.7) требуется, чтобы имели место k равенств

$$\dot{y}_i^c = f_i(y_{k+1}^c, \dots, y_n^c), \quad i = 1, \dots, k,$$

и $n - k$ уравнений

$$f_j(y_{k+1}^c, \dots, y_n^c, u_1, \dots, u_s) = 0, \quad j = k + 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Предположим, что $n - k$ уравнений (2.2) с s неизвестными u_1, \dots, u_s имеют хотя бы одно решение u_1^c, \dots, u_s^c . Тогда определим *стационарный управляемый процесс* $\{y^c(t), u^c, [t_0, \infty)\}$ как тройку $\{y^n(t), u^n, [t_0, t_1)\}$, где $y^n(t) = y^c(t)$, $u^n(t) = u^c$ — решение уравнений (2.2). В случае управляемого стационарного процесса правая часть уравнений (2.1) не зависит явным образом от t :

$$\dot{x} = \tilde{f}(x), \quad (2.3)$$

где $\tilde{f}(0) \equiv 0$ и $x(t_0) \neq 0$.

Определение 2.1. *Тривиальное решение системы (2.3) называется устойчивым (по Ляпунову), если для любого положительного ε существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из выполнения в начальный момент неравенства $|x(t_0)| \leq \delta$ следует выполнение неравенства $|x(t)| < \varepsilon$ в любой текущий момент $t > t_0$.*

Определение 2.2. *Тривиальное решение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову (см. определение 1) и существует открытая окрестность нуля $X_0 \subset \mathbb{R}^n$, такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(t_0) \in X_0$.*

Для анализа устойчивости большое значение имеют линейные уравнения в отклонениях (уравнения в вариациях)

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.4)$$

где $A = \frac{\partial \tilde{f}(0)}{\partial x} = \frac{\partial f(y^c, u^c)}{\partial y}$ — постоянная матрица размера $(n \times n)$. Рассмотрим корни λ_i характеристического уравнения матрицы A (собственные числа матрицы A):

$$\det(\lambda E_n - A) = 0.$$

Тогда имеют место следующие теоремы А. М. Ляпунова [87].

Теорема 2.1 (об устойчивости по первому приближению). *Если все собственные числа λ_i матрицы A имеют отрицательные действительные части ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$), то тривиальное решение системы (2.3) асимптотически устойчиво.*

(Алгебраический критерий Гурвица выполнения условий теоремы 2.1 приведён в гл. 2 (§ 2)).

Теорема 2.2 (о неустойчивости по первому приближению). *Если матрица A имеет хотя бы одно собственное число с положительной действительной частью, то тривиальное решение неустойчиво.*

Пример 2.1. Уравнение колебаний математического маятника относительно вертикального положения в однородном поле силы тяжести при наличии вязкого трения в точке подвеса (рис. 1.2.1) имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \varepsilon \dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0,$$

где $\varepsilon > 0$, $\omega^2 = g/l > 0$. Запишем линейные уравнения в отклонениях $x_1 = \Delta\varphi$, $x_2 = (\Delta\dot{\varphi})$:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \varepsilon x_2.$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \omega^2 = 0.$$

Так как $\varepsilon > 0$ и $\omega^2 > 0$, то $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, 2$, и вертикальное положение асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

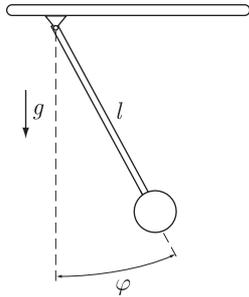


Рис. 1.2.1

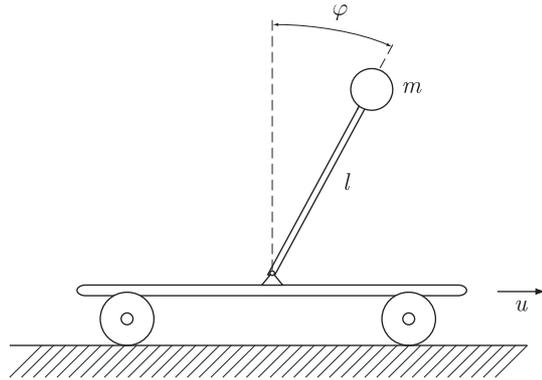


Рис. 1.2.2

Рассмотрим теперь перевёрнутый маятник, установленный на тележке, перемещающейся с ускорением $u_1(t)$ (рис. 1.2.2). Запишем уравнение в отклонениях от вертикального положения:

$$\ddot{\varphi} + \varepsilon \dot{\varphi} - \omega^2 \sin \varphi = \frac{1}{l} u_1 \cos \varphi.$$

Если $u_1(t) \equiv 0$, то линейные уравнения в отклонениях примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \omega^2 x_1 - \varepsilon x_2.$$

Им соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 + \varepsilon\lambda - \omega^2 = 0$. Таким образом, $\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \omega^2}$. Следовательно, один из корней

положителен. Поэтому вертикальное положение является неустойчивым (в случае неподвижной тележки) и возникает необходимость в разработке системы управления движением тележки для стабилизации вертикального положения перевёрнутого маятника.

В общем случае уравнений (2.1) при $t_1 \leq \infty$ воспользуемся определениями экспоненциальной устойчивости и устойчивости с оценкой [65, 66].

Определение 2.3. Тривиальное решение называется устойчивым с оценкой $\nu(t)$, если существует положительная конечная кусочно-непрерывная функция $\nu(t)$ ($\sup_{t_0 \leq t < t_1} \nu(t) < \infty$), такая, что выполняется неравенство

$$|x(t)| \leq \nu(t)|x(t_0)| \quad (2.5)$$

$\forall x(t_0) \in X_0, \forall t \in [t_0, t_1]$ и при $t_1 = \infty$ выполняется равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu(t) = 0$, а при $t_1 < \infty$ — неравенство $\nu(t_1) < 1$.

Определение 2.4. Тривиальное решение называется экспоненциально устойчивым, если существуют положительные числа α и β , такие, что выполняется неравенство

$$|x(t)| \leq \beta|x(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall x(t_0) \in X_0, \quad \forall t \in [t_0, \infty). \quad (2.6)$$

Если окрестность X_0 совпадает со всем пространством состояний \mathbb{R}^n , то говорят об экспоненциальной асимптотической устойчивости тривиального решения в целом. Очевидно, что из экспоненциальной устойчивости следует асимптотическая устойчивость.

При $t_1 = \infty$ и $y^n(t) = y^c(t)$, $u^n(t) \equiv u^c$ в случае выполнения условия теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению и условия принадлежности функции $\tilde{f}(x)$ классу дважды непрерывно дифференцируемых функций можно показать, что тривиальное решение является и экспоненциально устойчивым [87].

2.2. Перейдём теперь к математической постановке задач синтеза позиционного управления. Ограничимся при этом следующим описанием функционального множества W : это множество кусочно-непрерывных функций, в каждый момент времени принадлежащих замкнутому множеству Ω пространства управлений \mathbb{R}^s ,

$$W = \{u(\cdot) \in KC | u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^s, \quad t \in [t_0, t_1]\}.$$

Предположим, что $u^n(t) \in \text{int } \Omega$ при $t \in [t_0, t_1]$. Физический смысл этого предположения заключается в том, что исполнительный механизм обладает ещё некоторыми дополнительными ресурсами для уменьшения возможных текущих отклонений. Выберем линейную стратегию управления

$$u = u^n(t) + \tilde{u}(z, t), \quad (2.7)$$

где \tilde{u} — дополнительное (позиционное) управление. Рассмотрим уравнения, линейные по отклонениям $x = y - y^n$ в случае, когда правая

часть исходных уравнений (1.1) имеет вид

$$f(y, u) = f^0(y) + \sum_{i=1}^s f^i(y)u_i. \quad (2.8)$$

Тогда уравнения, линейные по отклонениям, можно записать в матричной форме:

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{i=1}^s A_i(t)\tilde{u}_i \right) x + B(t)\tilde{u}, \quad (2.9)$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f(y^n(t), u^n(t))}{\partial y} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial f^i(y^n(t))}{\partial y} u_i^n(t),$$

$$A_i = \frac{\partial f^i(y^n(t))}{\partial y}, \quad B(t) = (f^1(y^n(t)), \dots, f^s(y^n(t))).$$

К уравнениям (2.9) добавим ещё линейную модель первичной информации, используя (1.8):

$$\tilde{z} = H(t)x + \gamma(t), \quad (2.10)$$

где

$$H(t) = \frac{\partial \varphi(y^n(t))}{\partial y}, \quad \tilde{z} = z - \varphi(y^n(t)).$$

Требуется найти однородный оператор

$$\tilde{u} = P[\tilde{z}(t)], \quad (2.11)$$

такой, чтобы текущие отклонения удовлетворяли неравенству (2.5) при $\gamma(t) \equiv 0$. Задачу (2.9)–(2.11) будем называть задачей стабилизации программного движения. Это одна из основных задач синтеза позиционного управления. Действительно, при $t_1 = \infty$ имеем асимптотическое уменьшение начальных отклонений. При $t_1 < \infty$ (стабилизация на конечном интервале) следует потребовать выполнения неравенства

$$\nu(t_1) < 1. \quad (2.12)$$

В случае отсутствия ограничений на ресурсы дополнительного управления \tilde{u} и формирования его в виде линейной комбинации отклонений (это возможно, например, если $m = n$, $\gamma(t) \equiv 0$ и $\det H(t) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$) модель (2.9) может быть упрощена до вида

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{u}. \quad (2.13)$$

При использовании математической модели (2.13) будем говорить о задаче линейного синтеза.

В случае модели (2.9) имеет смысл говорить о билинейном синтезе.

Если рассматривается задача стабилизации стационарного движения $y^c(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, и функция $\varphi(y)$ является линейной по цикли-

ческим координатам, то матрицы A , B , H постоянны, что значительно облегчает решение задачи стабилизации.

Пример 2.2. Продолжая рассмотрение примера 1.2, сформулируем задачу стабилизации равномерного (стационарного) вращения консоли центрифуги, или задачу активного демпфирования изгибных колебаний в линейной постановке. Пусть

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \tilde{u}_1(\tau) d\tau,$$

где $\omega_0 \equiv \text{const}$, и имеется полная и точная информация об обобщённых скоростях $z = \dot{\varphi}$. Тогда требуется найти такую скалярную однородную функцию \tilde{u}_1 векторного аргумента z , чтобы тривиальное решение уравнений малых изгибных колебаний

$$A_0 \ddot{\varphi} + (C_0 + \omega_0^2(G - A_0))\varphi = -\tilde{u}_1(z)A_0 \mathbf{1}, \quad (2.14)$$

где

$$A_0 = \{a_{ij}\}, \quad G = \text{diag} \{g_{ii}\} \quad \left(g_{ii} = \sum_{j=1}^k a_{ij} \right),$$

было асимптотически устойчиво.

2.3. Постановка задачи (2.9)–(2.11) синтеза УДС не является единственно возможной. В качестве примера приведём постановку ещё одной задачи линейного синтеза позиционного управления, получившей название задачи *слежения*.

Предположим, что имеется нестационарное желаемое движение $y^n(t)$, $t \in [t_0, \infty)$. Соответствующее основное управляющее воздействие $u^n(t)$ не существует или неизвестно, зато известно, что $y^n(t) = y^c(t) + \Delta y(t)$, где $y^c(t)$ — реализуемое стационарное движение, т. е. известен стационарный управляемый процесс $\{y^c(t), u^c, t \in [t_0, \infty)\}$. Тогда, воспользовавшись (2.7) и (2.13), где $x = y - y^c$, получим следующую задачу: требуется найти такое дополнительное управляющее воздействие $\tilde{u}(\cdot)$, чтобы текущее отклонение отслеживало со временем разность $\Delta y(t)$:

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Delta y(t). \quad (2.15)$$

Задача линейного синтеза (2.15) называется *задачей слежения*, а УДС, реализующая решение этой задачи, — *слеящей системой*.

Следует отметить, что данные постановки задач синтеза УДС, являясь простейшими, в то же время позволяют наиболее быстро войти в круг проблем динамики управляемых систем. Оправданием такой методики изложения служит тот факт, что линейная стратегия управления (2.7) соответствует известному в теоретической механике представлению движения как суммы двух движений — переносного и относительного.

2.4. Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию — как возникает многоуровневое управление, когда человек управляет движением какого-либо объекта (самолёт, автомобиль и др.) Предположим, что математическая модель управляемого объекта имеет следующий безразмерный вид:

$$\mu \frac{dz}{d\tau} = \varphi(z, y, u_1), \quad z(\tau_0) = a, \quad (2.16)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = f(z, y, u_2), \quad y(\tau_0) = b. \quad (2.17)$$

Здесь $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ — безразмерное время; z — вектор быстрых переменных движущегося объекта; y — вектор медленных переменных; u_1, u_2 — два скалярных управления; μ — малый параметр ($0 < \mu \equiv \text{const} \ll 1$).

Зададимся вопросом: может ли человек (будем называть его пилотом) успешно управлять движением такого объекта? Пусть до момента t_0 (t — размерное время) была та или иная экстремальная ситуация, которая привела к начальным условиям a по быстрым переменным и возникла необходимость погасить нежелательные движения по быстрым переменным и одновременно осуществлять необходимое управление по медленным переменным. Например, снижение ЛА по глиссаде при наличии ветровых возмущений или занос автомобиля на скользкой дороге. Посмотрим, возможно ли в этом случае помочь пилоту. Если раньше он должен был формировать оба управления: и u_1 , и u_2 , то теперь оставим за ним верхний (второй) уровень и сформируем управление u_1 (нижний уровень) в автоматическом режиме. Пусть $\tau_0 = 0$ и $\tau_1 < \infty$.

Рассмотрим подсистему по z в быстром (компьютерном) времени $\tilde{\tau} = \tau/\mu$ (при $\mu \rightarrow 0$, $\tilde{\tau}_1 \rightarrow \infty$):

$$\frac{dz}{d\tilde{\tau}} = \varphi(z, y, u_1). \quad (2.18)$$

Зафиксируем вектор медленных переменных y и рассмотрим уравнение

$$\varphi(z, y, u_1) = 0. \quad (2.19)$$

Будем формировать управление нижнего уровня u_1 в виде суммы $u_1 = u_1^0 + \Delta u_1$, где u_1^0 — основное управление нижнего (первого) уровня выберем таким образом, чтобы уравнение (2.19) при $u_1 = u_1^0(y)$ имело один изолированный корень $z^0 = z^0(y)$, т. е.

$$\varphi(z^0(y), y, u_1^0(y)) = 0. \quad (2.20)$$

Будем считать, что поведение $z^0 = z^0(y)$ является желаемым для целей управления (см. пример в § 3). Займёмся теперь формированием дополнительного управления Δu_1 в виде отрицательной обратной связи $\Delta u_1 = -k^\top(z - z^0)$ таким образом, чтобы желаемый изолированный корень z^0 был асимптотически устойчивым и область его притяжения

захватывала начальные условия $z(\tau_0) = a$. Для того чтобы первый уровень функционировал, необходимы: бортовой компьютер, работающий в машинном ускоренном времени $\tilde{\tau}$, сенсоры, дающие информацию о текущих значениях $z(\tilde{\tau})$, и информация с верхнего (второго) уровня управления о медленных переменных y . При этом можно воспользоваться теоремой А. Н. Тихонова [96], которая утверждает, что в этом случае справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} z(\tau) &= \tilde{z}(\tau), & \tau \in (\tau_0, \tau_1], \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} y(\tau) &= \tilde{y}(\tau), & \tau \in [\tau_0, \tau_1], \end{aligned}$$

где $\tilde{z}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ — решения вырожденной системы

$$\begin{cases} \varphi(\tilde{z}, \tilde{y}, u_1(y, \tilde{z} - z^0)) = 0, \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = f(\tilde{z}, \tilde{y}, u_2). \end{cases} \quad (2.21)$$

Таким образом, создав первый уровень, работающий в автоматическом режиме (автопилот), удаётся помочь пилоту и облегчить его роль, так как теперь для формирования стратегии второго уровня управления u_2 необходимо знание только вырожденной системы (2.21). Функциональная схема двухуровневого полуавтоматического управления представлена на рис. 1.2.3.



Рис. 1.2.3

Сформированное таким образом двухуровневое полуавтоматическое управление даёт возможность эффективно нейтрализовать различного рода возмущения. Например, во время заноса автобуса водителю помогает антиблокировочная система (ABS), которая вместе с человеком составляет два уровня управления автобусом при заносе.

В § 3 будет рассмотрена реализация двухуровневого полуавтоматического управления в динамике полёта.

§ 3. Управляемые процессы в механике полёта и биотехнологии

3.1. Управляемый полёт по глissаде. Как и в примере 1.3, будем считать летательный аппарат (ЛА) имеющим плоскость симметрии, совпадающую с вертикальной плоскостью. Тогда можно отдельно рассматривать боковое движение ЛА и движение в вертикальной плоскости. Для полётов в районе аэродрома пренебрегаем сферичностью и вращением Земли и полагаем $v^2/(gr) \ll 1$. Поскольку изменение высоты невелико, можно считать $r \cong r_3$, $g \cong g_0$ и $\rho \cong \rho_0$. Так как время посадки относительно невелико, то можно пренебречь изменением массы самолёта. Тогда уравнения ЛА в вертикальной плоскости (1.9) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= P \cos \alpha - X(v, \alpha) - mg \sin \vartheta, \\ mv\dot{\vartheta} &= P \sin \alpha + Y(v, \alpha) - mg \cos \vartheta, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ J_z \dot{\omega} &= M_z(v, \alpha, \omega, \delta), \\ \dot{l} &= -v \cos \vartheta, \\ \dot{h} &= v \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $l = r_3 \lambda$ — дальность полёта, h — высота полёта, v — скорость ЛА, ω — угловая скорость поворота корпуса ЛА, $\alpha = \varphi - \vartheta$ — угол атаки, φ — угол тангажа, ϑ — траекторный угол, J_z — момент инерции корпуса (рис. 1.3.1).

Аэродинамические силы X и Y и момент M_z вычисляются согласно соотношениям (1.10). В рассматриваемом случае управляемый объект имеет три степени свободы и два управляющих воздействия — величину тяги P и отклонение руля высоты δ . Желаемым движением является полёт с постоянной скоростью по наклонной прямой, задаваемой с помощью радиолуча (такая прямая называется глissадой):

$$v(t) \equiv v_0, \quad \frac{h(t)}{l(t)} \equiv \operatorname{tg} \varepsilon_0, \quad (3.2)$$

где ε_0 — угол наклона глissады, v_0 — постоянная скорость полёта по глissаде.

Дополнительно потребуем, чтобы во время спуска корпус ЛА занимал горизонтальное положение (спуск по комфортабельной глissаде).

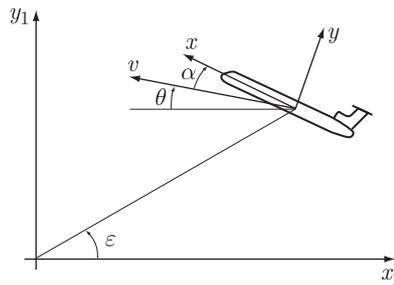


Рис. 1.3.1

В этом случае желаемое движение удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\omega(t) &\equiv 0, & \varphi(t) &\equiv 0, \\ \vartheta(t) &\equiv -\varepsilon_0, & \alpha(t) &\equiv \varepsilon_0.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Предположим далее, что система управления тягой ЛА работает идеально, т.е. точно выполняется требование постоянства скорости движения $v(t) \equiv v_0$. Тогда аналогично (1.11) из первого уравнения (3.1) находим требуемую величину тяги:

$$P = \frac{1}{\cos \alpha} [X(v_0, \alpha) + mg \sin \vartheta]. \quad (3.4)$$

Из (3.1)–(3.4) следует, что управляемый процесс спуска по заданной комфортабельной гласседе осуществим, если аэродинамические характеристики ЛА, наклон гласседы ε_0 и угол отклонения руля высоты δ_0 удовлетворяют условиям

$$Y(v_0, \varepsilon_0) + \operatorname{tg} \varepsilon_0 [X(v_0, \varepsilon_0) - mg \sin \varepsilon_0] - mg \cos \varepsilon_0 = 0, \quad (3.5)$$

$$M_z(\varepsilon_0, 0, \delta_0) = 0. \quad (3.6)$$

Здесь первое соотношение следует из второго уравнения системы (3.1) с учётом (3.4), а второе условие — из четвёртого уравнения (3.1).

Предположим, что имеет место равенство (3.5) и уравнение (3.6) разрешимо относительно δ_0 , $\delta_0 = M_z^{-1}(\varepsilon_0, 0)$.

Изменение глассадного угла ε удовлетворяет кинематическому соотношению

$$\dot{\varepsilon} = \frac{v_0 \sin \varepsilon}{h} \sin(\vartheta + \varepsilon),$$

которое получается дифференцированием второго равенства (3.2).

Таким образом, управляемый процесс снижения ЛА с учётом рассмотренных выше требований имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{h} &= v_0 \sin \vartheta, & \dot{\varepsilon} &= v_0 \frac{\sin \varepsilon}{h} \sin(\varepsilon + \vartheta), \\ m v_0 \dot{\vartheta} &= [X(v_0, \alpha) + mg \sin \vartheta] \operatorname{tg} \alpha + Y(v_0, \alpha) - mg \cos \vartheta,\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad J_z \dot{\omega} = M_z(v_0, \alpha, \omega, \delta), \quad \alpha = \varphi - \vartheta,$$

$$\begin{aligned}\{h(t) &= h_0 - v_0(t - t_0) \sin \varepsilon_0, & \varepsilon(t) &\equiv \varepsilon_0, & \vartheta(t) &\equiv -\varepsilon_0, & \varphi(t) &\equiv 0, \\ \omega(t) &\equiv 0, & \delta_0 &\equiv M_z^{-1}(v_0, \varepsilon_0, 0), & t &\in [t_0, t_0 + h_0/(v_0 \sin \varepsilon_0)]\}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Рассматриваемый программный управляемый процесс (3.8) для системы (3.7) имеет место, если только балансирующий угол $\delta_0 = M_z^{-1}(\varepsilon_0, 0)$ является допустимым углом отклонения руля высоты. В большинстве случаев это требование выполняется. Линейные урав-

нения в отклонениях (2.8) в данном случае примут вид

$$\begin{aligned}
 (\Delta \dot{h}) &= v_0 \cos \varepsilon_0 \Delta \vartheta, \\
 (\Delta \dot{\varepsilon}) &= \frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{h_0 - v_0(t - t_0) \sin \varepsilon_0} (\Delta \vartheta + \Delta \varepsilon), \\
 (\Delta \dot{\vartheta}) &= -c_\alpha \Delta \vartheta + c_\alpha \Delta \varphi, \\
 (\Delta \dot{\varphi}) &= \Delta \omega, \\
 (\Delta \dot{\omega}) &= m_\alpha \Delta \vartheta - m_\alpha \Delta \varphi - m_\omega \Delta \omega - m_\delta \Delta \delta,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\Delta \vartheta = \vartheta + \varepsilon_0$, $\Delta \delta = \delta - \delta_0$, $\Delta h = h - h_0$, $\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$, $\Delta \varphi = \varphi$, $\Delta \omega = \omega$. Величины $c_\alpha, m_\alpha, m_\omega, m_\delta$ — производные правых частей (3.7) по соответствующим переменным — являются положительными аэродинамическими параметрами ЛА. При выводе (3.9) использовалось условие, справедливое для комфортабельной глиссады,

$$c_\vartheta = mg(\operatorname{tg} \alpha \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0) = 0.$$

При $\Delta \delta \equiv 0$ нулевое решение уравнений в отклонениях (3.9) не является асимптотически устойчивым (проверьте!). Поэтому возникает необходимость построения дополнительного управляющего воздействия $\Delta \delta$, такого, чтобы $\Delta h \rightarrow 0$, $\Delta \varepsilon \rightarrow 0$, $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta \omega \rightarrow 0$, $\Delta \vartheta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_1$. Таким образом, приходим к задаче синтеза, которая получила название задачи синтеза автопилота для спуска по глиссаде.

Для решения этой задачи нам нужно иметь информацию о текущих отклонениях, следовательно, требуются соответствующие датчики и алгоритмы обработки измерительной информации и формирования управления $\Delta \delta$. Решение задачи синтеза автопилота будет рассмотрено в следующей главе (§ 5).

3.2. Полуавтоматическое снижение ЛА. Рассмотрим первые четыре уравнения системы (3.1) в предположении, что

$$M_z = M_z(v, \alpha, \delta) = -\frac{\rho v^2}{2} Sb(m_z^0 + m_z^\delta \delta + m_z^\alpha \alpha).$$

Пусть время спуска ЛА ≈ 30 секунд. Введём новые (безразмерные) переменные: $v = \tilde{v}v_*$, $\omega = \tilde{\omega}\omega_*$, $t = \tau T_*$, где $v_* = 300$ м/с, $T_* = v_*/g$. Для определения ω_* возьмём полупериод собственных колебаний ЛА относительно центра масс (при $m_z^\alpha = 1$)

$$T_1^2 = \frac{\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{2J_z \pi^2}{m_z^\alpha \rho v_* Sb} \approx 4 \text{ с}^2$$

— характерное время для ЛА определённого класса. Определим $\omega_* = 1/T_1$, а вторую компоненту управления как $u_2 = P = pp_*$, где p — безразмерно (управление $u_1 = \delta$ уже является безразмерным). Так как время спуска небольшое, то пренебрежём расходом массы топлива, т. е. будем считать $m \equiv \text{const}$.

Осуществим замену переменных и управления u_2 :

$$\begin{aligned}\frac{v_* m}{T_*} \frac{d\tilde{v}}{d\tau} &= p_* p \cos \alpha - v_*^2 \frac{\varrho \tilde{v}^2}{2} S c_x(\alpha) - mg \sin \vartheta, \\ \frac{v_* m}{T_*} \frac{d\tilde{\vartheta}}{d\tau} &= p_* p \sin \alpha + v_*^2 \frac{\varrho \tilde{v}^2}{2} S c_y(\alpha) - mg \cos \vartheta, \\ \frac{1}{T_*} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \omega_* \tilde{\omega}, \\ J_z \frac{\omega_*}{T_*} \frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} &= -(m_z(\alpha, \delta) v_*^2 \frac{\varrho}{2} S b) \tilde{v}^2.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Обычно для характерного значения тяги p_* выполняются соотношения $p_* = mg = \frac{\varrho v_*^2}{2} S$. Тогда уравнения (3.10) можно записать в виде двух подсистем

$$\begin{aligned}\mu \frac{d\varphi}{d\tau} &= \tilde{\omega} \quad (\mu = \frac{T_1}{T_*} \ll 1), \\ \mu \frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} &= -m_z(\alpha, \delta) \tilde{v}^2, \\ \frac{d\tilde{v}}{d\tau} &= -p \cos \alpha - c_x(\alpha) \tilde{v}^2 - \sin \vartheta, \\ \frac{d\tilde{\vartheta}}{d\tau} &= -\frac{p}{\tilde{v}} \sin \alpha + c_y(\alpha) \tilde{v} - \frac{\cos \vartheta}{\tilde{v}}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Таким образом, можно рассмотреть ситуацию полуавтоматического управления, имеющего два уровня: нижний (первый) уровень — режим автоматической стабилизации и верхний (второй) уровень — режим пилотирования. Для формирования алгоритма автоматической стабилизации введём быстрое, или компьютерное, время $\tilde{\tau} = \tau/\mu$. Перепишем первую подсистему (3.11) в быстром времени и назовём её присоединённой

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tilde{\tau}} &= \tilde{\omega}, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{d\tilde{\tau}} &= -m_z^\alpha(\varphi - \vartheta) \tilde{v}^2 - m_z^\delta \delta \tilde{v}^2 - m_z^0 \tilde{v}^2.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Зафиксируем медленные переменные ϑ и \tilde{v} и будем их рассматривать как параметры. Алгоритм автоматической стабилизации представим в виде $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$ и выберем

$$\delta_0 = \frac{m_z^\alpha}{m_z^\delta} \vartheta - \frac{m_z^0}{m_z^\delta}.$$

Тогда спуск, как и в предыдущем пункте будучи комфортабельным ($\varphi \equiv 0$, $\omega \equiv 0$), является единственной особой точкой. Дополнительный сигнал автоматической стабилизации выбираем таким, чтобы эта изолированная особая точка была асимптотически устойчивой для под-

системы (3.12). Понятие асимптотической устойчивости здесь понимается в компьютерном времени ($\tilde{\tau}_1 \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow 0$). Предположим, что имеется точный датчик угловой скорости; тогда для асимптотической устойчивости достаточно взять $\Delta\delta = k_1\omega = (k_1\omega_*)\tilde{\omega}$, $k_1 > 0$. Таким образом алгоритм автоматической стабилизации имеет вид

$$\delta = \left(\frac{m_z^\alpha}{m_\delta} \vartheta - \frac{m_z^0}{m_\delta} \right) + (k_1\omega_*)\tilde{\omega}.$$

Одновременно, в данном случае можно утверждать, что выполнены все условия теоремы Тихонова [96] и поэтому можно ограничиться рассмотрением вырожденной системы для верхнего уровня:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}}{d\tau} &= -p \cos \vartheta - c_x(-\vartheta)\tilde{v}^2 - \sin \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \frac{p}{\tilde{v}} \sin \vartheta + c_y(-\vartheta)\tilde{v} - \frac{\cos \vartheta}{\tilde{v}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Естественно от скалярных уравнений (3.13) перейти к уравнениям в исходных переменных и в векторном виде:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{A} + m\mathbf{g} \quad (3.14)$$

Если ввести понятие перегрузки

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{P}}{mg_0} = \frac{1}{g_0} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{g} \right),$$

то можно говорить о системе персональной навигации пилота, одним из основных элементов которой являются отолитовы органы вестибулярного аппарата человека, реагирующие на кажущееся ускорение $g_0\mathbf{n}$. Таким образом, вырожденная система (3.13), приближённо описывающая движение центра масс ЛА, является очень важной для пилота, так как по своим ощущениям, благодаря реакции механорецепторов на перегрузку \mathbf{n} , он может составить правильное представление о полёте и соответственно изменить его в случае необходимости.

Полукружные каналы вестибулярного аппарата реагируют на угловое ускорение $\dot{\omega}$ и поэтому в принципе можно говорить и о возможности реакции на переменную угловую скорость. Однако эта реакция в основном используется для стабилизации взгляда и, кроме того, запаздывание этой первичной информации об угловом движении составляет 0,1–0,5 с. Поэтому реакция пилота, в том числе и его глазодвигательного аппарата (ещё одной из основных частей персональной навигации), на быстро меняющееся угловое движение ЛА не является своевременной. В случае, когда период собственных колебаний ЛА составляет секунды, пилоту предъявляются жёсткие требования по функционированию его системы персональной навигации. Поэтому несколько десятилетий тому назад для улучшения качества пилотиру-

вания стали переходить с ручного управления на полуавтоматическое двухуровневое управление полётом.

Аналогичная ситуация сейчас происходит в автомобильной промышленности, где всё большее значение находят антиблокировочные и антизаносные системы, которые функционируют в экстремальных ситуациях вождения автомобиля, когда управление движением становится двухуровневым и полуавтоматическим.

3.3. Управление ростом биомассы. Одна из бурно развивающихся в последнее время областей прикладной науки — биотехнология. Это связано, в частности, с новыми методами производства лекарств, среди которых важное место занимает управляемое культивирование микроорганизмов.

В настоящем пункте исследуется возможность управления ростом массы микроорганизмов на примере процесса культивирования бактерии *Escherichia coli* для получения α -интерферона. Приведём сначала краткие сведения о бактериях вообще. Большинство видов бактерий представлены одноклеточными формами размером до 0,001 мм. Одни бактерии являются причиной многих болезней, другие, наоборот, помогают людям, например, приготавливать сыр, простоквашу и т. д. Каким же образом удаётся бактериям выполнить такую работу? Ответ на этот вопрос следующий. Внутри бактериальных клеток находятся ферменты — биологические катализаторы, с помощью которых происходит химическое превращение веществ.

Бактерии размножаются делением, причём очень быстро: при благоприятных условиях спустя всего 10 ч из одной бактериальной клетки появляется свыше 4 млрд потомков. При этом они потребляют дешёвые питательные вещества (субстраты).

Получение большой массы бактерий — биомассы — поставлено в настоящее время на промышленную основу с помощью биотехнологии. Благодаря биотехнологии были разработаны новые методы производства лекарств с помощью управляемого культивирования микроорганизмов. Рассмотрим процесс роста колибактерий в зависимости только от субстрата. Процесс происходит в ёмкости, в которой в начальный момент t_0 имеется объём V_0 питательной среды с концентрацией s_0 субстрата S . В эту среду засевают определённое количество X_0 биомассы (микроорганизмов), при этом концентрация биомассы $x_0 = X_0/V_0$. Затем в ёмкость начинают подавать питательную среду с постоянной концентрацией s_{in} со скоростью $v = dV/dt$, где V — текущий объём в ёмкости. Выхода из ёмкости нет. Предполагается, что поступающий субстрат мгновенно перемешивается с помощью мешалки-мотора и все физические и химические условия постоянны и благоприятны для жизни микроорганизмов.

В этих условиях механизм роста биомассы подчиняется следующему закону [82]: скорость роста биомассы пропорциональна её количе-

ству, т. е.

$$\frac{dX}{dt} = \mu X. \quad (3.15)$$

Коэффициент пропорциональности μ зависит от концентрации субстрата в среде. Функция $\mu(s)$ полностью определена, если задан вид микроорганизмов и субстрат. Мы рассмотрим случай, когда

$$\mu(s) = \frac{\mu_m s}{K_m + s + s/K_i}, \quad (3.16)$$

где μ_m , K_m , K_i — положительные постоянные параметры.

Для построения математической модели роста биомассы введём понятие экономического коэффициента $1/K_1 = -dX/dS$, выражающего количественную потребность микроорганизмов в пище; в указанных условиях экономический коэффициент постоянен [82].

Учитывая, что в ёмкость поступает субстрат с концентрацией s_{in} , уравнение баланса субстрата можно записать в виде

$$dS = -K_1 dX + s_{in} dV,$$

откуда получаем уравнение изменения субстрата

$$\frac{dS}{dt} = -K_1 \mu(s) X + s_{in} \frac{dV}{dt}. \quad (3.17)$$

Перепишем уравнения (3.15), (3.17) в терминах концентраций, подставляя $X = Vx$, $S = Vs$ и вводя обозначение

$$u = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}.$$

Из (3.15) следует

$$V \frac{dx}{dt} = \mu(s) Vx - \frac{dV}{dt} x \iff \frac{dx}{dt} = (\mu(s) - u)x. \quad (3.18)$$

Из (3.17) получим

$$\begin{aligned} V \frac{ds}{dt} &= -K_1 \mu(s) Vx + s_{in} \frac{dV}{dt} - \frac{dV}{dt} s \iff \\ &\iff \frac{ds}{dt} = -K_1 \mu(s)x + (s_{in} - s)u. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Предположим, что имеется измерительное устройство, поставляющее первичную информацию

$$z = K_2 \mu(s)x, \quad (3.20)$$

где $K_2 > 0$.

Тогда система уравнений, описывающая процесс роста биомассы и поступающую информацию о нём, согласно (3.18)–(3.20) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu(s) - u)x, \\ \dot{s} = -K_1 \mu(s)x + (s_{in} - s)u, \\ z = K_2 \mu(s)x. \end{cases} \quad (3.21)$$

Величина

$$u = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = v \left/ \left(V_0 + \int_{t_1}^t v \, d\tau \right) \right. \geq 0$$

находится в нашем распоряжении, так как можно задавать нужную скорость поступления питательной жидкости в ёмкость. Таким образом, u — управление.

Рассмотрим поведение функции $\mu(s)$ при положительных значениях s :

$$\mu(s) = \frac{\mu_m s}{K_m + s + s^2/K_i}.$$

В этой полуплоскости $\mu(s)$ имеет только один экстремум — максимум в точке $s_n = \sqrt{K_m K_i}$ (рис. 1.3.2).

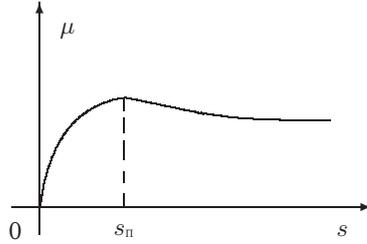


Рис. 1.3.2

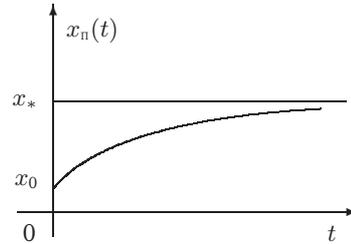


Рис. 1.3.3

Поставим задачу о нахождении управления, при котором скорость роста биомассы максимальна. Из (3.15) получаем, что эта задача сводится к поддержанию концентрации субстрата постоянной и равной s_n . При этом предполагается, что $s_{in} > s_n$.

Следовательно, требуется найти такое управление $u_n(t)$, при котором имеет место процесс

$$\mathcal{P}_n = \{x_n(t); s_n(t) \equiv s_n; t \in [t_0, t_1]\}.$$

Процесс \mathcal{P}_n назовём желаемым (программным) процессом.

Положим в системе (3.21) $x = x_n(t)$, $s \equiv s_n(t)$, $u = u_n(t)$, откуда

$$u_n(t) = \frac{\mu(s_n)}{x_*} x_n(t),$$

где $x_* = (s_{in} - s_n)/K_1$ и $x_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_n}{dt} = \left(\mu(s_n) - \frac{\mu(s_n)}{x_*} x_n(t) \right) x_n(t).$$

Это частный случай уравнения Риккати. Напишем решение с начальным условием $x_n(t_0) = x_0$:

$$x_n(t) = \frac{x_* x_0}{(x_* - x_0) e^{-\mu(s_n)(t-t_0)} + x_0}.$$

Будем предполагать, что x_0 мало, т. е. выполняются неравенства $0 < x_0 < x_*$ (рис. 1.3.3).

Желаемый процесс принимает вид

$$\mathcal{P}_\Pi = \left\{ x_\Pi(t) = \frac{x_* x_0}{(x_* - x_0)e^{-\mu(s_\Pi)(t-t_0)} + x_0}; \quad s_\Pi(t) \equiv s_\Pi; \quad t \in [t_0, \infty) \right\}. \quad (3.22)$$

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости этого процесса. Вначале получим представление о фазовом портрете системы (3.21). Из первого и второго уравнений вытекает, что

$$\begin{aligned} K_1 \dot{x} + \dot{s} &= -K_1 u x + (s_{\text{in}} - s) u \iff \\ &\iff \frac{d}{dt} (K_1 x + s - s_{\text{in}}) = -u (K_1 x + s - s_{\text{in}}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что точки прямой $K_1 x + s = s_{\text{in}}$ не покидают её, и в силу того, что $u \geq 0$, точки, лежащие вне этой прямой, двигаются приближаясь (когда $u > 0$) или параллельно (когда $u = 0$) к ней. В самом деле, обозначив через $d = \frac{|K_1 x + s - s_{\text{in}}|}{\sqrt{K_1^2 + 1}}$ расстояние от точки (s, x) до прямой $K_1 x + s = s_{\text{in}}$, получим

$$\dot{d} = -ud.$$

Так как $x_\Pi(t)$ монотонно возрастает и $\lim_{t \rightarrow \infty} x_\Pi(t) = x_*$, то

$$\gamma(t) = \mu(s_\Pi) - u_\Pi(t) = \frac{\mu(s_\Pi)}{x_*} (x_* - x_\Pi(t))$$

монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ (рис. 1.3.4).

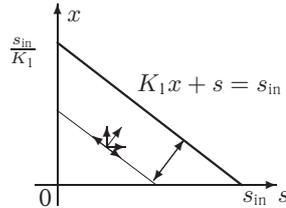


Рис. 1.3.4

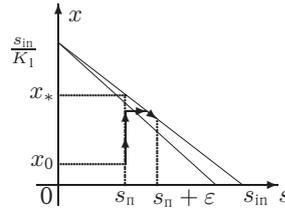


Рис. 1.3.5

Рассмотрим сколь угодно малое отклонение от желаемого процесса $s = s_\Pi + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и обозначим $\delta(\varepsilon) = \mu(s_\Pi) - \mu(s_\Pi + \varepsilon)$. Пусть t достаточно большое и выполняется неравенство

$$\mu(s_\Pi + \varepsilon) - u_\Pi(t) = \gamma(t) - \delta(\varepsilon) < 0.$$

Для простоты предположим, что точка (s, x) оказалась на прямой $K_1 x + s = s_{\text{in}}$. Из того что точка не покидает этой прямой, следует,

что движение на фазовой плоскости определяется изменением только одной из переменных: s или x .

Так как $\dot{x} = (\mu(s_n + \varepsilon) - u_n(t))x < 0$, то точка (s, x) движется в сторону возрастания s , при этом $\delta(\varepsilon) = \mu(s_n) - \mu(s_n + \varepsilon)$ возрастает, а $\gamma(t)$ монотонно убывает. Следовательно, неравенство

$$\mu(s_n + \varepsilon) - u_n(t) = \gamma(t) - \delta(\varepsilon) < 0$$

сохраняется в дальнейшем, т. е. точка движется вниз по прямой к точке $(s_{in}, 0)$ (рис. 1.3.5).

Таким образом, на этом примере показана неустойчивость нестационарного процесса (3.16), когда $u = u_n(t)$, т. е. необходима стабилизация с помощью управления $u = u_n + \tilde{u}$.

Глава 2

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И ЛИНЕЙНЫЙ СИНТЕЗ

§ 1. Критерии управляемости и наблюдаемости

В гл. 1 была поставлена задача стабилизации динамической системы путём введения в систему обратной связи. Было сказано, что во многих случаях допустима линеаризация относительно программного движения, и тогда задача сводится к следующему.

Вводится вектор рассогласования — вектор состояния x , поведение которого описывается уравнениями в вариациях

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + q, \\ z &= Hx + r.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь A, B, H — известные, зависящие, вообще говоря, от времени матрицы, u — вектор входа (управления) системы, z — вектор выхода (измерения), q и r — немоделируемые возмущения. Мы полагаем, что параметры моделируемых возмущений включены в вектор состояния x .

Систему (1.1) будем называть *стабилизируемой*, если существует такой оператор $L[z]$ ($L[0] = 0$), что при $u = L[z]$ и равных нулю q и r тривиальное (нулевое) решение уравнения

$$\dot{x} = Ax + BL[Hx]\tag{1.2}$$

асимптотически устойчиво.

Точно так же вектор $x^* = Gx$ (G — некоторая матрица) будем называть *стабилизируемым*, если существует управление $u = L[z]$, при котором в отсутствие возмущений q и r $x^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где x — решение уравнения (1.2).

При $\text{rang } G < \dim x$ будем говорить о стабилизируемости системы относительно части переменных.

Как уже говорилось, одна из интерпретаций задачи стабилизации состоит в её расщеплении на две подзадачи. Первая из них — построение при помощи измерения z оценки $\hat{x} = L_1[z]$, вторая — построение управления $u = L_2[\hat{x}]$.

Возможность решения каждой из этих подзадач тесно связана с двумя характеристиками внутренних свойств системы, введёнными Калманом, — управляемостью и наблюдаемостью. К изучению резуль-

татов, связанных с указанными характеристиками, мы сейчас и приступаем. Заметим только, что соответствующая теория оказывается шире, чем просто ответ на вопрос о стабилизируемости.

Особое внимание будет уделено частному стационарному случаю (A , B и H — константы), для которого получены наиболее глубокие и конструктивные результаты.

Прежде, чем излагать теорию, опирающуюся на понятия управляемости и наблюдаемости, рассмотрим два примера, поясняющих суть обсуждаемых далее вопросов.

Пример 1.1. Рассмотрим систему с управлением u

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + u.\end{aligned}$$

Пусть величины x_1 и x_2 доступны измерению. Тогда управление u можно организовать в виде линейной обратной связи $u = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Характеристическое уравнение системы будет иметь вид

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + c_1 + c_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1 = 0.$$

Пусть целью управления является построение системы с заданным переходным процессом, что эквивалентно заданию характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Эта цель достигается при c_1 и c_2 , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= -a - \lambda_1 - \lambda_2, \\ \lambda_2 c_1 + \lambda_1 c_2 &= b - \lambda_1 \lambda_2.\end{aligned}$$

Решение однозначно при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Если $a > 0$, $b > 0$, система асимптотически устойчива и, значит, стабилизируема.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ сделаем замену переменных

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \lambda_0 y_1 + u, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_0 y_2.\end{aligned}$$

Из полученного следует, что в рассматриваемом случае можно управлять переходным процессом только частично.

Заметим, что при $\lambda_0 < 0$ система стабилизируема.

Пример 1.2. Рассматривается система с измерением z

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1, \quad z = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2.\end{aligned}$$