Бутузов В.Ф.
Кадомцев С.Б.
Позняк Э.Г.
Шестаков С.А. и др.

Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 514.1
ББК 22.151
К 13

Книга подготовлена под научным руководством академика РАН В. А. Садовничего в рамках программы «МГУ — школе»

Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, С. А. Шестаков, И. И. Юдина. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 488 с. — ISBN 5-9221-0635-X.

В настоящем пособии дается систематическое изложение углубленного курса планиметрии. Наряду с основными геометрическими сведениями, входящими в стандартную школьную программу по геометрии, содержится большой дополнительный материал, расширяющий и углубляющий основные сведения. Стиль изложения, принятый в пособии, заметно отличается от традиционного: теорема — доказательство. В ряде случаев авторы не формулируют теоремы и аксиомы заранее, а ищут их формулировки вместе с читателем. Такой подход объясняется желанием авторов дать представление о том, как строится математика и как работают математики.

В книге значительное внимание уделяется геометрии Лобачевского, кривым постоянной ширины, изопериметрическим задачам, доказывается целый ряд замечательных теорем планиметрии.

Пособие ориентировано на учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, а также всех, кого привлекает красота геометрии. Оно может использоваться в классах с углубленным изучением математики, в работе математических кружков и факультативов, служить основным учебником в школах физико-математического профиля.

ISBN 5-9221-0635-X

Предисловие

Настоящее пособие ориентировано на учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, и предназначено, прежде всего, для классов с углубленным изучением математики, для математических кружков и факультативов. Оно состоит из 13 глав, соответствующих главам учебника «Геометрия 7–9» Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.Г. Позняка, И.И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 г. и последующие издания). Вместе с тем пособие вполне автономно, что позволяет использовать его как в тех классах, где преподавание геометрии ведется по другим учебникам, так и в качестве основного учебника в школах физико-математического профиля.

Следует отметить, что стиль изложения, принятый в пособии, отличается от традиционного: теорема — доказательство. В ряде случаев мы не формулируем теоремы и аксиомы заранее, а ищем их формулировки вместе с читателем. Такой подход объясняется желанием авторов дать представление о том, как строится математика и как работают математики.

В пособии наряду с основными геометрическими сведениями, входящими в стандартную школьную программу по геометрии, содержится большой дополнительный материал, расширяющий и углубляющий основные сведения. В частности, значительное внимание уделяется теории параллельных прямых и дается представление о связанной с ней геометрии Лобачевского. Так, уже в первой главе наряду с традиционным материалом, относящимся к начальным геометрическим сведениям, вводится понятие параллельных прямых, рассматриваются признаки параллельности прямых и обсуждается вопрос о существовании квадрата.

Вторая глава посвящена изучению тех свойств треугольников, которые справедливы как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского (т. е. в абсолютной геометрии). Здесь рассматриваются разнообразные (в том числе нетрадиционные) признаки равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольника, свойства серединного перпендикуляра к отрезку и биссектрисы угла, взаимное расположение прямой и окружности и двух окружностей, теорема об окружности, вписанной в треугольник, задачи на построение.

В третьей главе изучаются параллельные прямые. Здесь рассматриваются аксиомы и основные понятия геометрии, приводятся примеры решения задач на основе аксиом, подробно обсуждается связь между аксиомой параллельных прямых, фактом существования квадрата, пятым постулатом Евклида и связанной с ним задачей о построении треугольника по стороне и двум прилежащим углам. Здесь же впервые заходит речь о геометрии Лобачевского.

Четвертая глава существенно расширяет и углубляет геометрические сведения о треугольниках. Здесь практически единым рассуждением одновременно доказываются теорема о сумме углов треугольника и две теоремы о средней линии треугольника (свойство и признак), весьма подробно обсуждается специфика геометрии Лобачевского (например, объясняется, почему в этой геометрии имеет место признак равенства треугольников по трем углам), приводятся доказательства теорем о замечательных точках треугольника и об окружности, описанной около треугольника.

В пятой главе наряду с традиционным изучением параллелограмма и трапеции рассматриваются замкнутые выпуклые линии, вписанные и описанные по отношению к ним многоугольники, характеристические свойства некоторых четырехугольников (например, выпуклого четырехугольника), доказываются теорема Жордана (о внутренней области многоугольника), теоремы Вариньона и Гаусса.

В шестой главе, посвященной измерению площадей, вводятся понятия равновеликих и равносоставленных многоугольников и в связи с этим рассматривается ряд задач на разрезание многоугольников, а также приводится доказательство теоремы Бойяи–Гервина. Здесь же представлены задачи о площадях некоторых фигур, расположенных на целочисленной решетке. Особого внимания заслуживает теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу: с ее помощью удается построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины (причем как на евклидовой плоскости, так и на плоскости Лобачевского), вывести формулу Герона, дать три нетрадиционных доказательства теоремы Пифагора (всего в главе приведено девять различных доказательств этой теоремы), а позже (в главе «Окружность») вывести формулу, выражающую площадь треугольника через его стороны и радиус описанной окружности, что, в свою очередь, позволяет дать простое доказательство теоремы синусов в ее усиленной формулировке.

В седьмой главе рассматриваются разнообразные (в том числе нетрадиционные) признаки подобия треугольников, тригонометрические функции острого угла, обобщенная теорема Фалеса, теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике, теоремы Чевы и Менелая, ряд теорем о свойствах замечательных точек треугольника.

Восьмая глава посвящена изучению углов, связанных с окружностью, и примыкающих к этой теме теорем (например, теоремы Паскаля о вписанном шестиугольнике). Здесь же рассказывается о кривых постоянной ширины, что выходит за рамки обычной школьной геометрии.

Изложение темы «Векторы» в девятой главе отличается от традиционного, главным образом, пунктуальностью при доказательстве теорем, в частности, дано обоснование транзитивности сонаправленности.

В десятой главе рассматриваются вопросы, так или иначе связанные с методом координат: уравнения прямой и окружности, радикальная ось и радикальный центр, теорема Брианшона для описанного шестиугольника, построение касательной при помощи одной линейки.

В одиннадцатой главе выводятся теоремы синусов и косинусов, основные тригонометрические формулы, изучаются свойства скалярного произведения и в связи с этим доказывается ряд классических теорем геометрии (Эйлера, Лейбница, Морлея, Брахмагупты и др.).

В двенадцатой главе вводятся понятия длины линии (в частности, окружности), площади фигуры (в частности, круга), рассматриваются теорема Барбье, первый замечательный предел и изопериметрическая задача.

Последняя, тринадцатая глава книги посвящена изучению геометрических преобразований (движений, центрального подобия и инверсии) и их использованию при решении задач и доказательстве теорем, в том числе: при решении задачи Аполлония, при доказательстве теорем Наполеона, Птолемея, Фейербаха, теорем о прямой Симсона, о прямой и окружности Эйлера, об окружностях Аполлония, при выводе формулы Эйлера. Приложения в конце книги существенно расширяют и углубляют сведения учащихся о геометрии Лобачевского и теории вещественных чисел.

В каждой главе по мере изложения теоретического материала даются задачи с решениями, иллюстрирующие применение тех или иных утверждений. К каждому параграфу главы даны задачи для самостоятельной работы, снабженные ответами и указаниями. Наиболее трудные задачи и разделы отмечены звездочкой. Имеется также предметный указатель, позволяющий легко ориентироваться в книге.

Мы надеемся, что наша книга окажется интересной не только для учителей и учеников из классов с углубленным изучением математики, но и для всех, кого привлекает красота геометрии.

Авторы

Глава 1

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Точки, прямые, отрезки

1. Точка. Что такое *точка*? Наверное каждый ответит, что это нечто совсем маленькое. Возьмем остро отточенный карандаш и прикоснемся им к бумаге (рис. 1). Получим изображение точки. Это действительно только изображение точки, а сама точка еще меньше. Если мы посмотрим на рисунок 1 в увеличительное стекло, то увидим, что наша точка довольно большая. Есть предметы, которые вообще не видны невооруженным глазом, их можно увидеть только в микроскоп (например, бактерии). Но и это еще не точки. Бактерии хотя и маленькие, но имеют размеры. Точки же не имеют размеров, настолько они малы. В окружающем нас мире таких объектов, разумеется, нет. И все же каждый из нас отчетливо представляет, что такое точка — это геометрическая фигура, не имеющая размеров.

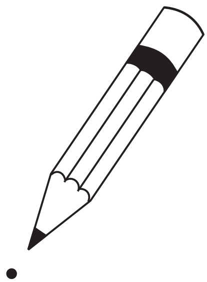


Рис. 1. Изображение точки

Обычно точки обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B и т. д. Точка — самая простая геометрическая фигура.

2. Прямая линия. Что такое *линия*? Можно сказать так: линия — это геометрическая фигура, не имеющая ширины.

Прямая дорога в степи, уходящая за горизонт, дает представление о *прямой* линии. Как и дорога, прямая линия представляется нам безграничной.

На рисунке мы не можем изобразить всю прямую линию. Но часть ее изобразить можно. Для этого надо взять линейку, приложить ее к бумаге и провести вдоль края линейки карандашом (рис. 2).

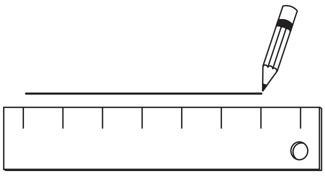


Рис. 2. Изображение прямой

Этим способом изображения прямых пользуются, например, в черчении. Как правило, прямые обозначаются малыми латинскими буквами: a, b и т. д.

На рисунке 3 изображена линия. Эта линия искривленная. Когда мы говорим о прямой, то представляем себе линию, не имеющую искривлений.

Рис. 3. Изображение линии

Отметим на листе бумаги две точки — A и B. Через точки A и B с помощью линейки проведем линию. Затем перевернем линейку (перевернутая линейка на рисунке 4 изображена пунктиром) и снова через точки A и B проведем линию. Если обе линии совпадают, то линейка не искривлена. Если же проведенные таким способом линии не совпадают, то этот край линейки искривлен и не пригоден для проведения прямых линий.

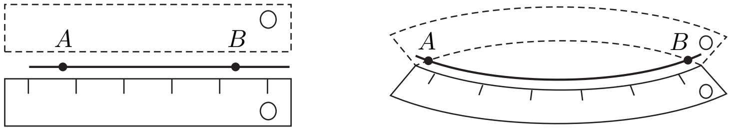


Рис. 4

Тем самым мысль о том, что прямая линия не имеет искривлений, можно выразить такой фразой:

через любые две точки [1] *проходит прямая и притом только одна* (рис. 5).

Рис. 5. Через две точки A и B проходит только одна прямая

Если на прямой отмечены две точки, обозначенные, например, буквами A и B, то прямую можно обозначить этими двумя буквами: AB или BA (рис. 5).

Две прямые могут пересекаться, т. е. иметь общую точку, а могут не пересекаться. На рисунке 6 прямые p и q пересекаются, а прямые a и b не пересекаются. Если две прямые не пересекаются, то они называются *параллельными*. Иногда вместо слов «прямые a и b параллельны» используют следующее обозначение: $a \parallel b$.

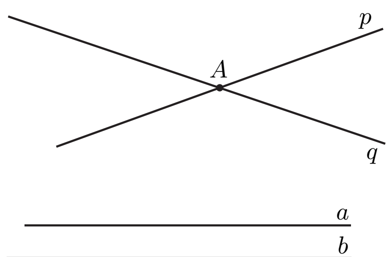


Рис. 6. Прямые p и q пересекаются в точке A. Прямые a и b не пересекаются, они параллельны

Прямые p и q на рисунке 6 пересекаются в точке A. Но, может быть, они пересекаются еще в одной точке? Конечно, нет! В другой

[1] Говоря «две точки», «три прямые» и т. д., мы считаем, что эти точки, прямые и т. д. различны.

точке B прямые p и q пересекаться не могут — тогда через точки A и B проходили бы две прямые, а этого не может быть. Теперь совершенно ясно, что

две прямые могут пересекаться только в одной точке.

Обратите внимание на то, что это свойство прямых мы установили путем рассуждений. Такие рассуждения называются *доказательством*. Мы доказали, что две прямые могут пересекаться только в одной точке.

Как уже отмечалось, прямые a и b, изображенные на рисунке 6, не пересекаются, т. е. параллельны. А можно ли это проверить? Это трудный вопрос. Ведь на рисунке изображены только части прямых a и b. Полностью их изобразить невозможно, так как прямые безграничны. А, может быть, и вообще нет параллельных прямых, т. е. любые две прямые пересекаются? На этот вопрос мы пока не можем ответить, но постараемся ответить тогда, когда будем знать больше о свойствах геометрических фигур. С подобной ситуацией нам предстоит столкнуться неоднократно. Поэтому советуем Вам завести специальный блокнот, чтобы записывать туда все вопросы — и те, которые возникнут у Вас, и те, на которые мы обратим Ваше внимание. В качестве первого мы рекомендуем записать такой вопрос:

есть ли параллельные прямые?

Рассмотрим на прямой a какие-нибудь три точки: A, B и C (рис. 7). Из этих точек только одна (в данном случае B) лежит между двумя другими (между A и C). Таким образом,

из любых трех точек прямой только одна лежит между двумя другими.

На первый взгляд кажется, что это, вроде бы, очевидное свойство можно не выделять. Но посмотрите на рисунок 8, где изображена окружность (замкнутая линия) и три точки A, B и C на ней. Можно ли сказать, что из трех точек на окружности только одна лежит между двумя другими? Конечно, нет! Наоборот, каждая из трех точек на окружности (а также на любой замкнутой линии, рис. 9) лежит между двумя другими.

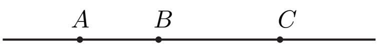


Рис. 7. Точка B лежит между точками A и C

Сказанное можно проиллюстрировать таким примером: если трое ребят сидят за круглым столом, то каждый из них сидит между двумя другими. Но если они сидят на скамейке, то только один из них сидит между двумя другими. Теперь понятно, в чем дело: выделенное нами свойство прямой указывает на то, что *прямая — незамкнутая линия*.

Иногда вместо слов «точка B лежит между точками A и C» используют слова «точки A и C лежат по разные стороны от точки B» или «точки A и B лежат по одну сторону от точки C».

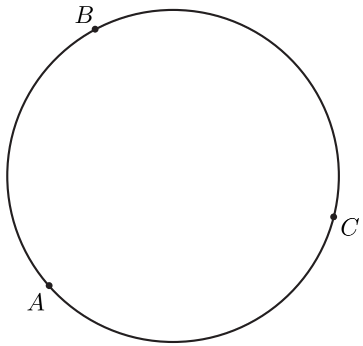


Рис. 8. Каждая из трех точек A, B и C на окружности расположена между двумя точками

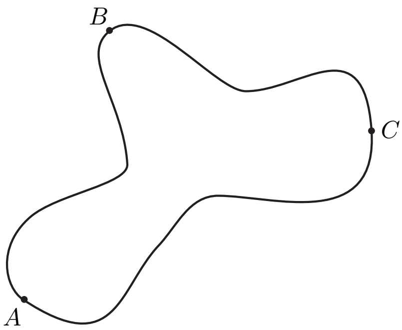


Рис. 9. Каждая из трех точек на любой замкнутой линии лежит между двумя другими точками

3. Луч и отрезок. Любая точка O прямой разделяет ее на две части (рис. 10). Каждая из этих частей называется *лучом, исходящим из точки O — начала луча*. Отметим очевидное свойство двух лучей, на которые прямая разделяется точкой O:

любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.

Рис. 10. Точка O разделяет прямую на два луча. Один из них выделен жирной линией

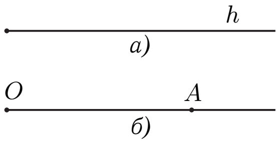


Рис. 11

Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 11, *а*), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на этом луче (например, луч OA на рисунке 11, *б*).

Обратимся к рисунку 7, на котором изображены два луча с общим началом (BA и BC), лежащие на одной прямой. В таком случае говорят, что каждый из этих лучей является *продолжением* другого луча.

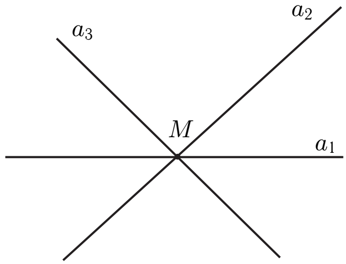
Перейдем теперь к отрезкам. Каждый отрезок получается так: на прямой берут две точки A и B (рис. 12). Их называют *концами отрезка*. Сам же *отрезок* состоит из этих выделенных точек A и B и всех точек прямой, лежащих между ними. Точки, лежащие между концами отрезка, называются *внутренними точками отрезка*. Отрезок с концами A и B обозначается AB или BA.

Рис. 12. Точки A и B — концы отрезка. Любая точка C, лежащая между точками A и B, — внутренняя точка отрезка

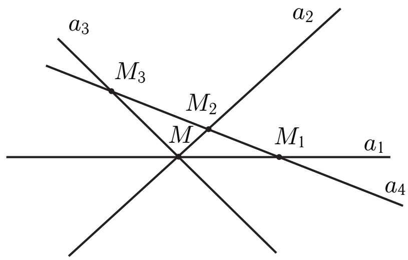
4. Несколько задач.

Задача 1. *Даны четыре попарно пересекающиеся прямые* (т. е. каждая прямая пересекается с любой другой). *Известно, что через точку пересечения любых двух из них проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Найти число точек пересечения этих прямых.*

Решение. Обозначим данные прямые через a_1, a_2, a_3, a_4. Рассмотрим прямые a_1 и a_2. По условию они пересекаются в некоторой точке M, и через эту точку проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Пусть, например, через точку M проходит прямая a_3 (рис. 13, *а*).



а)



б)

Рис. 13

Если прямая a_4 не проходит через точку M, то она пересекает прямые a_1, a_2 и a_3 в точках M_1, M_2 и M_3 (рис. 13, *б*). Рассмотрим одну из них, например точку M_1. Через нее проходят прямые a_1 и a_4, и не проходят прямые a_2 и a_3. Но по условию задачи через точку пересечения прямых a_1 и a_4 должна проходить по крайней мере еще одна из данных прямых, а такой третьей прямой для точки M_1 нет. Что же это означает? Это означает, что прямая a_4 должна проходить через точку M, иначе получается противоречие с условием задачи. Таким образом, все данные прямые проходят через точку M, т. е. имеют только одну точку пересечения.

Задача 2. *На плоскости проведены n прямых. Каждые две из них пересекаются. Кроме того, через точку пересечения каждых двух прямых не проходит больше ни одной из наших прямых. Найти число всех точек пересечения этих прямых.*

Решение. Будем рассуждать так. Проведем первую прямую (рис. 14, *а*). Затем проведем вторую прямую (рис. 14, *б*). Появится одна точка пересечения. Проведем третью прямую (рис. 14, *в*). Она пересечется с первой и второй прямыми, поэтому общее число точек пересечения станет равным $1 + 2$. Проведем четвертую прямую (рис. 14, *г*). Она пересечется с первой, второй и третьей. Количество точек пересечения станет равным $1 + 2 + 3$. После проведения пятой прямой число точек

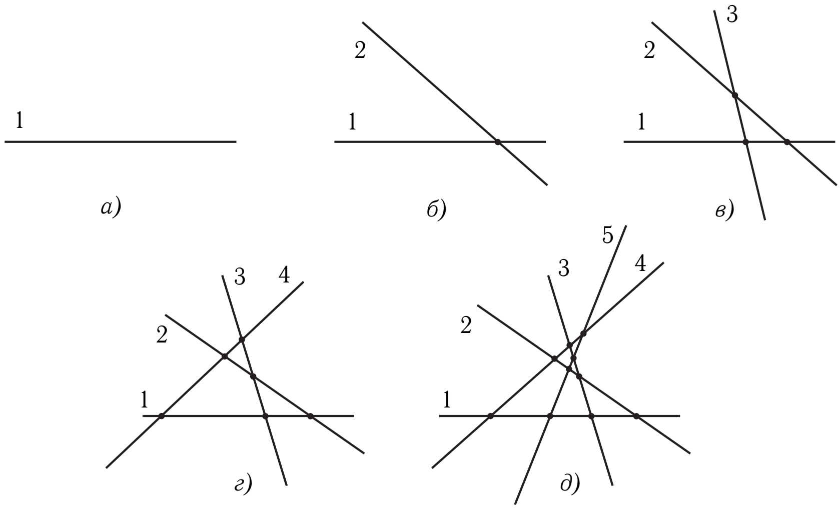


Рис. 14

пересечения станет равным $1+2+3+4$ (рис. 14, *д*). Теперь ясно, что поскольку всего проведено n прямых, то число точек пересечения равно $1+2+3+4+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)$.

Замечание. С практической точки зрения выведенная нами формула не очень удобна — слишком громоздкая. Например, при $n=101$ в ней 100 слагаемых! Можно ли получить более удобную формулу? Оказывается, можно.

Рассказывают, что однажды учителю младших классов гимназии в немецком городе Брауншвейге понадобилось по каким-то делам уйти с урока арифметики. Чтобы не оставлять класс без дела, он, недолго думая, предложил учащимся решить такую задачу: найти сумму всех целых чисел от 1 до 100. Будучи абсолютно уверенным в том, что теперь до конца урока можно заниматься своими делами, он уже сделал несколько шагов по направлению к выходу, как вдруг один из учеников поднял руку.

— У тебя какой-то вопрос? — спросил учитель.

— Нет, — ответил тот. — Я решил задачу. У меня получилось 5050.

— Как ты получил это число?! — спросил совершенно ошарашенный учитель.

— Очень просто, — сказал ученик и написал две строчки, одну под другой. — Теперь совершенно ясно, что наша сумма равна 5050.

Изумленный учитель некоторое время молча смотрел на написанные строчки, а затем произнес:

— Ты станешь великим математиком!

И не ошибся. Этот 9-летний ученик — Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — действительно стал одним из величайших математиков.

Какие же две строчки написал Гаусс? Не можем ли мы применить ту же идею к решению нашей задачи? Давайте попробуем. Поступим так. Запишем нашу формулу еще раз и под ней запишем ее же, но взяв слагаемые в обратном порядке:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & (n-3) & + & (n-2) & + & (n-1) \\ (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + \ldots + & 3 & + & 2 & + & 1. \end{array}$$

К. Ф. Гаусс

Сложим теперь эти две суммы следующим способом. Сначала сложим первое слагаемое 1 в первой строчке с первым слагаемым $(n-1)$ во второй строчке. Получим в сумме n. Затем ко второму слагаемому 2 в первой строчке прибавим второе слагаемое $(n-2)$ во второй строчке. Опять получим n. И так далее. В результате получим:

$$\underbrace{n+n+n+\ldots+n+n+n}_{n-1} = (n-1)n.$$

Итак, мы сложили две наши суммы и получили число $(n-1)n$. Следовательно, наша сумма в два раза меньше этого числа, т. е. равна $\frac{(n-1)n}{2}$. Например, для пяти прямых, т. е. когда $n=5$, число точек пересечения равно $\frac{(5-1)5}{2} = 10$ (см. рис. 14, *д*), а для 101 прямой число точек пересечения равно $\frac{(101-1)101}{2} = 5050$.

Задача 3*. *Точка C лежит на прямой между точками A и B, а точка D лежит между точками A и C. Лежит ли точка D между точками A и B?*

Решение. Проведем прямую, отметим на ней точки A и B, а затем C, лежащую между точками A и B, и точку D, лежащую между A и C (рис. 15). Мы лежит между точками A видим, что точка D и B. Тем самым ответ на вопрос задачи получен. Но давайте этим не ограничимся, а поставим вопрос так: можно ли путем рассуждений (а не с помощью рисунка) обосновать тот факт, что точка D лежит между A и B? Оказывается, можно. Но рассуждения не очень простые. Попытайтесь в них разобраться, чтобы проводить потом аналогичные рассуждения в других задачах. Будем рассуждать следующим образом.

Рис. 15

По условию точка C лежит между A и B. Как уже отмечалось ранее, это можно выразить другими словами:

1^0 *точки A и B лежат по разные стороны от точки C.*

Также по условию точка D лежит между A и C, что можно выразить так:

2^0 *точки A и C лежат по разные стороны от точки D*,
или так:

3^0 *точки A и D лежат по одну сторону от точки C*.

Сопоставим утверждения 1^0 и 3^0. Можно сделать вывод, что точки B и D лежат по разные стороны от точки C, т. е. точка C лежит между B и D, а значит,

4^0 *точки B и C лежат по одну сторону от точки D*.

Сопоставим теперь утверждения 2^0 и 4^0. Из них следует, что точки A и B лежат по разные стороны от точки D, т. е. точка D лежит между A и B.

Итак, тот факт, что точка D лежит между A и B, мы обосновали путем рассуждений. Иначе говоря, мы доказали, что точка D лежит между A и B.

5. Угол. Геометрическая фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки, называется *углом*. Лучи называются *сторонами угла*, а их общее начало — *вершиной угла*. На рисунке 16 изображен угол с вершиной O, на сторонах h и k которого отмечены точки A и B. Этот угол можно обозначить разными способами: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$, или $\angle 1$.

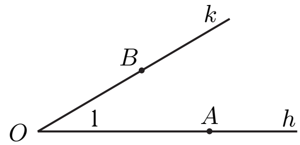


Рис. 16

Если стороны угла лежат на одной прямой, то угол называют *развернутым* (рис. 17). Можно сказать, что каждая сторона развернутого угла является продолжением другой стороны.

Рис. 17. Развернутый угол

Каждый угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвернутый, то одна из этих частей называется *внутренней*, а другая — *внешней* областью этого угла. На рисунке 18 изображен угол и указаны его внутренняя и внешняя области. Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

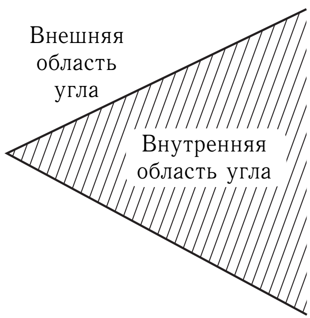


Рис. 18

Если луч исходит из вершины неразвернутого угла и проходит внутри этого угла (т. е. в его внутренней области), то он *делит угол на два угла*, внутренние области которых лежат по разные стороны от этого луча. На рисунке 19, *а* луч OC делит угол AOB на два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$. Если угол AOB — развернутый, то любой луч OC, не совпа-

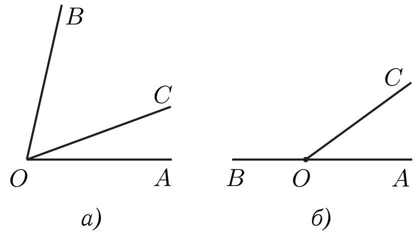


Рис. 19. Луч OC делит угол AOB на два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$

дающий с лучами OA и OB, делит этот угол на два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$ (рис. 19, *б*).

6. Полуплоскость. Наше представление о внутренней и внешней областях угла наглядное, оно связано с рисунком — изображением угла. А как описать словами, что такое внутренняя область угла? Это можно сделать с помощью понятия полуплоскости.

Любая прямая разделяет плоскость на две части, каждая из которых называется *полуплоскостью*, а сама прямая служит *границей* этих полуплоскостей. На рисунке 20, *а* одна из полуплоскостей с границей a заштрихована. Отметим такое очевидное свойство полуплоскостей:

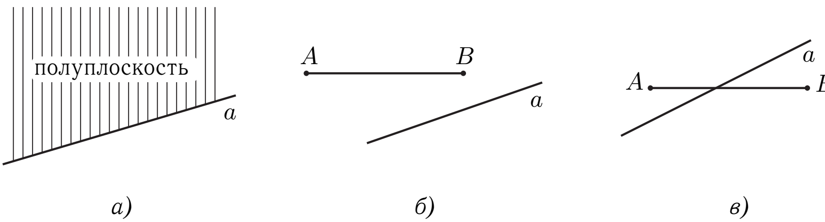


Рис. 20. а) Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости; б) если точки A и B лежат в одной полуплоскости с границей a, то отрезок AB не пересекается с прямой a; в) если точки A и B лежат в разных полуплоскостях с границей a, то отрезок AB пересекается с прямой a

если две точки A и B лежат в одной полуплоскости с границей a, то отрезок AB не пересекается с прямой a (рис. 20, *б*), *а если в разных полуплоскостях, то отрезок AB пересекается с прямой a, т. е. имеет внутреннюю точку, общую с прямой a* (рис. 20, *в*).

В первом случае говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a (рис. 20, *б*), а во втором — что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a (рис. 20, *в*).

Обратимся теперь к рисунку 21. На нем изображен угол hk, внутренняя область которого заштрихована. Эту область можно получить так. Разрежем плоскость по прямой a, содержащей сторону h. Мы видим, что после разреза внутренняя область угла останется в полуплоскости α, которая содержит сторону k. Затем разрежем плоскость

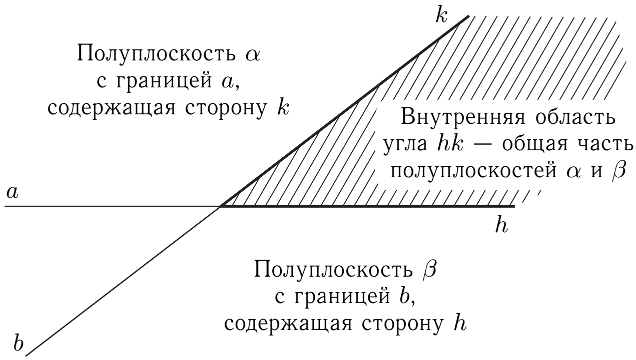


Рис. 21. Выделение внутренней области угла с помощью полуплоскостей

по прямой b, содержащей сторону k. После этого разреза внутренняя область угла останется в полуплоскости β, которая содержит луч h. Теперь ясно, что внутренняя область угла — это общая часть полуплоскостей α и β.

Разрезы, которые мы проводили, можно рассматривать как отрезание всего лишнего, того что не содержит точек внутренней области угла.

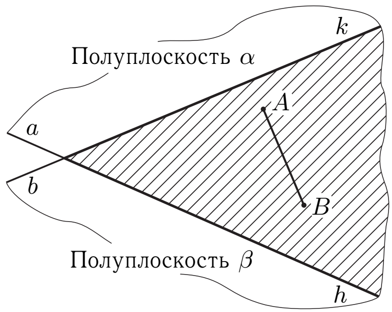


Рис. 22

Давайте теперь обсудим такой вопрос. Пусть точки A и B расположены во внутренней области угла hk (рис. 22). Как Вы думаете, будет ли отрезок AB также целиком расположен во внутренней области угла hk? Посмотрим еще раз на рисунок. Мы видим, что действительно отрезок AB целиком расположен во внутренней области угла hk. А можно ли путем рассуждений убедиться в том, что это действительно так? Мы только что обсудили, как с помощью полуплоскостей выделить внутреннюю область угла. Может быть, этим и воспользоваться? Попробуем.

Мы уже отмечали, что если две точки A и B лежат в одной полуплоскости с границей a, то отрезок AB не пересекается с прямой a, и следовательно, весь отрезок AB лежит в этой полуплоскости. Ну, теперь все ясно! Ведь внутренняя область угла — это общая часть полуплоскостей α и β (рис. 22). Так как отрезок AB лежит и в полуплоскости α, и в полуплоскости β, то он целиком расположен в их общей части, т. е. во внутренней области угла.

У Вас может возникнуть вопрос: а зачем нужно объяснять словами, что такое внутренняя область угла? Почему нельзя сказать просто:

внутренняя область угла — это то, что изображено на рисунке 18? Но любая ли фигура, изображенная на рисунке, есть изображение какой-то действительно существующей фигуры? Посмотрите на рисунки 23 и 24. На первом из них изображен куб, сделанный из деревянных реек. А что изображено на втором рисунке? Не знаете? То-то и оно! Оказывается, нарисовать можно такое, чего нет на самом деле.

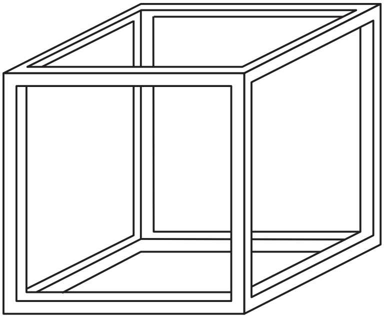


Рис. 23. Куб из реек

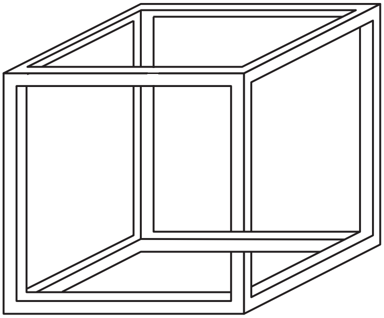


Рис. 24. А что изображено на этом рисунке?

Задачи

1. Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из них, содержит по крайней мере еще одну из данных точек. Докажите, что все данные точки лежат на одной прямой.

2. Даны пять попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух из них проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Докажите, что все данные прямые проходят через одну точку.

3*. Решите задачу 1 для случая, когда даны пять точек.

4. Точки O, A и B лежат на одной прямой, причем точки A и B лежат по разные стороны от точки O. Лежат точки A и B на одном луче или на разных лучах с началом O? Ответ обоснуйте.

5*. Точка B лежит между точками A и C, а точка C лежит между точками B и D. Лежит ли точка C между точками A и D? Ответ обоснуйте.

6*. Точка N лежит между точками M и O, а точка O лежит между точками M и P. Лежит ли точка O между точками N и P? Ответ обоснуйте.

7*. Точка M — внутренняя точка отрезка AB. Докажите, что: а) все точки отрезка AM принадлежат отрезку AB; б) отрезки AM и MB не имеют общих внутренних точек.

8. Отрезок AB пересекается с прямой a, а отрезок AC не пересекается с этой прямой. Пересекается ли отрезок BC с прямой a? Ответ обоснуйте.

9*. Даны четыре точки A, B, C, D и прямая a, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что отрезки AB и CD пересекаются с прямой a, а отрезок BC не имеет общих точек с этой прямой. Пересекается ли отрезок AD с прямой a? Ответ обоснуйте.

§ 2. Измерение отрезков и углов

7. Равенство геометрических фигур. Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры (одинаковые листы бумаги, книги, автомобили и т. п.). В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

Каким образом можно проверить равенство фигур $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ (рис. 25 и 26)? Можно представить себе, что фигура $\varPhi_1$ накладывается на фигуру $\varPhi_2$ той или другой стороной. Если в результате фигуры $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ совместятся, то они равны.

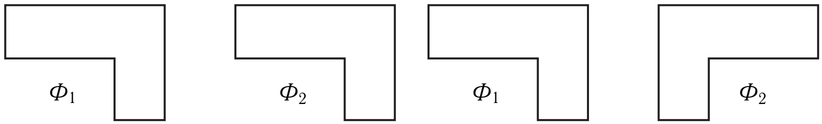


Рис. 25. Фигуры $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ равны

Рис. 26. Фигуры $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ также равны. Подумайте, как совместить их наложением

Итак, *две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением*.

8. Сравнение отрезков и углов. Пусть даны два отрезка (рис. 27, *а, б*). Наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого. Если при этом совместятся и два других конца этих отрезков, то отрезки совместятся, и значит, они равны (рис. 27, *а*); если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составит часть другого (рис. 27, *б*).

Обратимся теперь к углам. Пусть даны два неразвернутых угла (углы 1 и 2 на рисунке 28). Наложим один угол на другой так,

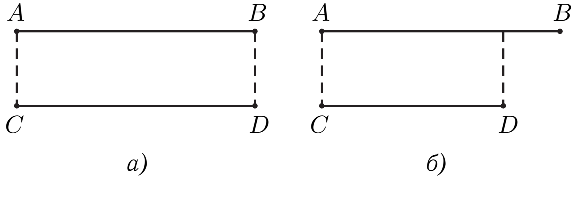
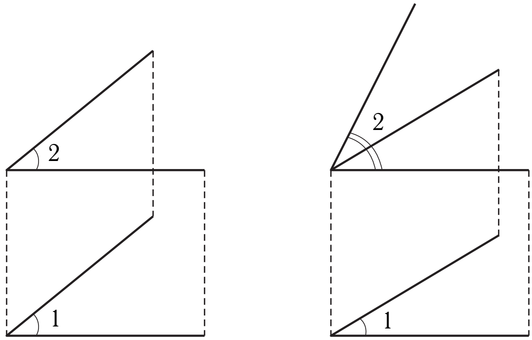


Рис. 27. а) $AB = CD$; б) $CD < AB$



а) *б)*

Рис. 28. а) $\angle 1 = \angle 2$; б) $\angle 1 < \angle 2$

чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие стороны оказались по одну сторону от совместившихся сторон. Если при этом две другие стороны также совместятся, то и углы совместятся — значит, они равны (на рисунке 28, *а* $\angle 1 = \angle 2$). Если же две другие стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составит часть другого (на рисунке 28, *б* $\angle 1 < \angle 2$).

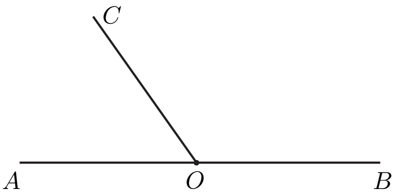
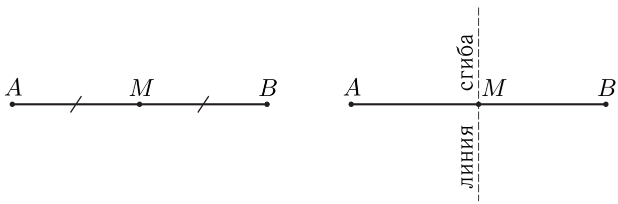


Рис. 29. $\angle AOC < \angle AOB$, $\angle BOC < \angle AOB$

Неразвернутый угол является частью развернутого угла (рис. 29). Поэтому развернутый угол больше любого неразвернутого угла. Любые два развернутых угла, очевидно, равны.

9. Середина отрезка и биссектриса угла. Точка отрезка, делящая его пополам, т.е. на два равных отрезка, называется *серединой* этого отрезка (рис. 30, *а*). Чтобы найти середину отрезка AB, изображенного на листе бумаги, можно поступить так: перегнуть лист таким образом, чтобы точки A и B совместились. Ес-



а) *б)*

Рис. 30. $AM = MB$. Точка M — середина отрезка AB

ли теперь разогнуть лист и отметить точку M пересечения отрезка AB с линией сгиба (рис. 30, *б*), то эта точка и будет серединой отрезка AB. В самом деле, при повторном перегибании листа точка M останется на месте, а точки A и B совместятся. Следовательно, отрезок MA совместится с отрезком MB, а значит, $MA = MB$, т. е. точка M — середина отрезка AB.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется *биссектрисой* этого угла (рис. 31). Как провести биссектрису угла, изображенного на листе бумаги (рис. 32, *а*)? Можно поступить таким образом: перегнуть этот лист так, чтобы стороны p и q угла совместились (рис. 32, *б*). Тогда линия сгиба будет биссектрисой угла pq. Докажите это самостоятельно.

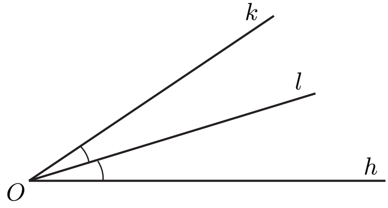


Рис. 31. $\angle hl = \angle lk$. Луч l — биссектриса угла hk

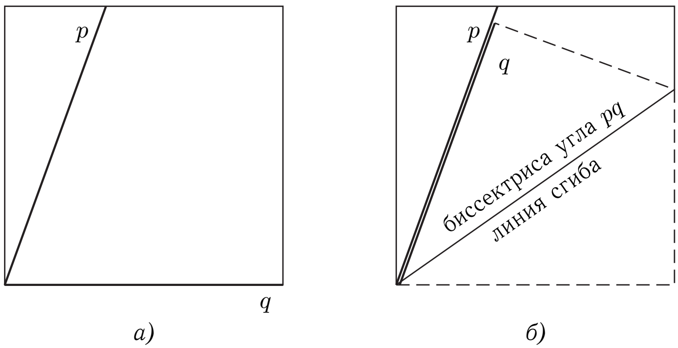


Рис. 32. Сторона q угла pq совпадает с нижним краем листа бумаги (а). После перегибания листа бумаги, сторона q должна совместиться со стороной p (б). Тогда линия сгиба — биссектриса угла pq

10. Измерение отрезков и углов. Как измеряются отрезки? Пусть A_0B_0 — измеряемый отрезок, PQ — выбранная единица измерения отрезков. На луче A_0B_0 отложим отрезок $A_0A_1 = PQ$, на луче A_1B_0 — отрезок $A_1A_2 = PQ$ и т. д. до того момента, когда либо точка A_n совпадет с точкой B_0, либо точка B_0 окажется лежащей между A_n и A_{n+1} (рис. 33). В первом случае говорят, что длина отрезка A_0B_0 при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке A_0B_0 n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка A_0B_0 при единице измерения PQ приближенно выражается числом n. Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей,

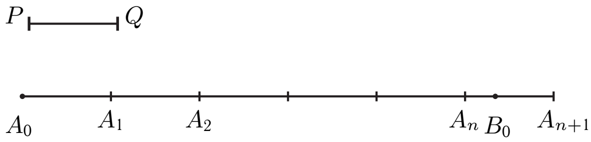


Рис. 33

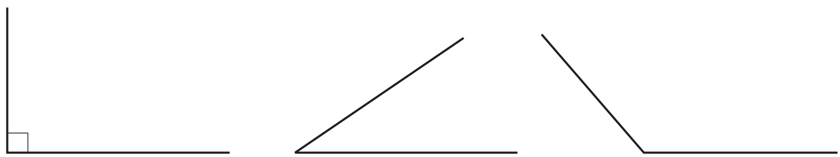
и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB_0. Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то ее также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Иными словами,

при выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

Измерение углов аналогично измерению отрезков и основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают *градус* ($^\circ$) — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. $\frac{1}{60}$ часть градуса называется *минутой* ($'$), а $\frac{1}{60}$ минуты — *секундой* ($''$). *Градусной мерой угла* называют положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле.

Развернутый угол равен 180° (так как градус — это $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла). Неразвернутый угол меньше 180°.

Угол называется *прямым*, если он равен 90°. Угол, который меньше прямого, называется *острым*, а угол, который больше прямого, но меньше развернутого, — *тупым* (рис. 34).



Прямой угол равен 90° Острый угол меньше 90° Тупой угол больше 90°, но меньше 180°

Рис. 34

11. О числах. Мы говорили, что при выбранной единице измерения длина отрезка выражается некоторым положительным числом. Таким образом, при измерении отрезков используются числа. В этом пункте мы поговорим о числах.

Вам знакомы разные числа. Это, прежде всего, целые положительные числа: 1, 2, 3 и т. д. Их называют также натуральными числами. Они возникли из потребностей счета. Можно сказать, что натуральные числа понадобились для *измерения* количества предметов. Если, например, на книжной полке находится какое-то количество книг, то измерить его (это количество) можно с помощью натурального числа: на этой полке находится 20 книг, а на другой полке — 23 книги.

Натуральных чисел для измерений недостаточно. Если разрезать яблоко пополам, то каждая половина равна $\frac{1}{2}$ яблока. Если же разрезать яблоко на четыре равные части, то каждая часть равна $\frac{1}{4}$ яблока. Обозначение $\frac{1}{4}$ показывает, что 1 (одно яблоко) разделили на 4 части. Число $\frac{3}{7}$ получается, если 3 разделить на 7. Такого рода числа, когда в числителе и в знаменателе стоят натуральные числа, называют рациональными положительными (рацио — значит деление). Итак, *рациональные положительные числа* — это числа вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа.

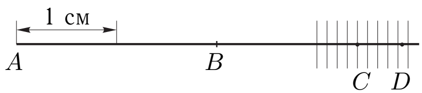


Рис. 35. $AB = 2$ см, $AC = 3{,}4$ см, $AD = 3{,}8$ см

На практике часто используют десятичные дроби, в частности, они появились у нас при измерении отрезков. Так, на рисунке 35 длина отрезка AC равна 3,4 см, а длина отрезка AD приближенно равна 3,8 см. Число 3,8 — десятичная дробь. Его можно записать в виде $3{,}8 = 3 + \frac{8}{10} = \frac{38}{10}$, поэтому десятичная дробь 3,8 — это рациональное число. Любая другая десятичная дробь также является рациональным числом. Например, $4{,}79 = 4 + \frac{7}{10} + \frac{9}{100} = \frac{479}{100}$, т. е. число 4,79 — рациональное число.

При измерении отрезков с определенной точностью, например с точностью до миллиметра, мы получаем их длины в виде рациональных чисел. Итак,

рациональных чисел достаточно для приближенных измерений с любой заданной точностью.

Но оказывается, что точное значение длины отрезка может не быть рациональным числом. Приведем пример.

Вспомним, что такое *квадрат*. Это четырехугольник, у которого стороны равны и все четыре угла — прямые (рис. 36, *а*). Из курса математики 6 класса известно, что площадь квадрата со стороной a равна a^2. Например, квадрат со стороной 10 мм имеет площадь 100 мм^2, что можно увидеть на миллиметровой бумаге (рис. 36, *б*).

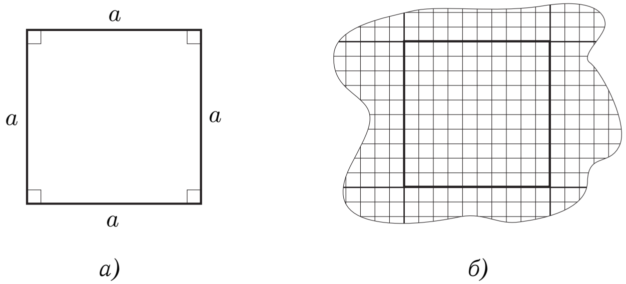


Рис. 36. а) Квадрат со стороной a, его площадь равна a^2; б) квадрат со стороной 10 мм имеет площадь 100 мм^2

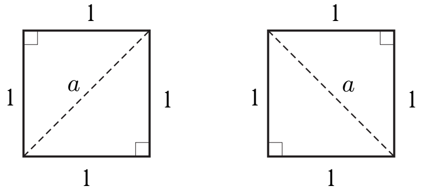


Рис. 37. Квадраты со стороной 1. Площадь каждого из них равна 1. Число a — длина диагонали, по которой разрезается каждый квадрат

Пусть имеются два одинаковых квадрата, стороны которых равны 1 (рис. 37). Разрежем каждый квадрат по диагонали (они проведены пунктиром) на два треугольника, а затем составим из получившихся четырех треугольников новый квадрат, который изображен на рисунке 38. Если мы обозначим длину диагонали квадрата на рисунке 37 буквой a, то площадь квадрата на рисунке 38 будет равна a^2. С другой стороны, площадь этого квадрата равна сумме площадей двух квадратов, изображенных на рисунке 37, т. е. равна 2. Итак,

$$a^2 = 2. \tag{1}$$

Докажем, что число a не является рациональным.

Будьте внимательны — может быть, это первое в Вашей жизни не простое доказательство! Напомним, что рациональное положительное число получается путем деления одного натурального числа на другое натуральное число. Например, число $\dfrac{3}{7}$ получается, когда натуральное число 3 делят на натуральное число 7. Отметим, что числитель (число 3) и знаменатель (число 7) не имеют общих множителей (отличных от единицы). А вот

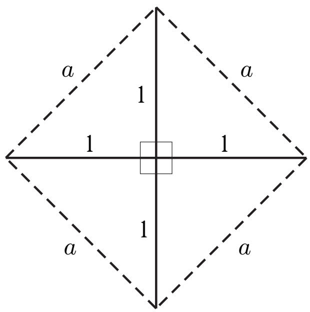


Рис. 38. Из треугольников, на которые разрезаны квадраты на рис. 37, составлен новый квадрат со стороной a. Площадь этого квадрата равна a^2 и, конечно, равна 2 (сумме площадей квадратов на рис. 37)

у рационального числа $\frac{8}{6}$ числитель (число 8) и знаменатель (число 6) имеют общий множитель 2, так как $8 = 2 \cdot 4$ и $6 = 2 \cdot 3$. На этот общий множитель числитель и знаменатель можно сократить, так что

$$\frac{8}{6} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3}.$$

Дальше сокращать невозможно, так как у числителя и знаменателя нет общих множителей.

Рассмотрим еще один пример. Число $\frac{30}{48}$ путем сокращения числителя и знаменателя на общие множители можно привести к виду, когда у числителя и знаменателя нет общих множителей:

$$\frac{30}{48} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{5}{8}.$$

Таким способом — путем сокращения на общие множители числителя и знаменателя — можно привести любое данное рациональное число к несократимому виду (у числителя и знаменателя нет общих множителей).

Посмотрим теперь, что получится, если мы предположим, что число a, квадрат которого равен 2, — рациональное. При этом, конечно, можно считать, что число a приведено к несократимому виду:

$$a = \frac{p}{q}, \tag{2}$$

где числа p и q не имеют общих множителей. Из равенства (2) получаем:

$$a^2 = a \cdot a = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p^2}{q^2}.$$

Но $a^2 = 2$ (см. (1)). Поэтому $\frac{p^2}{q^2} = 2$, т. е.

$$p^2 = 2q^2. \tag{3}$$

Из равенства (3) можно сделать вывод: *число p делится на* 2. Действительно, число p^2 делится на 2, так как оно равно числу 2, умноженному на натуральное число q^2. Но $p^2 = p \cdot p$, и если бы число p не делилось на 2, то и число p^2 не делилось бы на 2. Значит, число p делится на 2, и его можно записать в виде

$$p = 2r, \tag{4}$$

где r — натуральное число. Подставим это выражение для p в левую часть равенства (3). Получим:

$$(2r)^2 = 2q^2.$$

Но $(2r)^2 = 2r \cdot 2r = 2 \cdot 2 \cdot r^2$, поэтому

$$2 \cdot 2 \cdot r^2 = 2q^2.$$

Сократим на общий множитель 2 левую и правую части этого равенства. После этого оно запишется так:

$$2r^2 = q^2,$$

откуда следует, что q^2 делится на 2, а значит, и q делится на 2.

Что же мы получили? Мы предположили, что число a, квадрат которого равен 2, рациональное, т. е. равно $\frac{p}{q}$, причем числа p и q не имеют общих множителей. После этого путем рассуждений мы доказали, что числа p и q имеют общий множитель — число 2. Но это противоречит нашему предположению. Следовательно, наше предположение не верно, и поэтому число a не является рациональным.

Итак, кроме рациональных чисел есть еще и другие числа. Их называют *иррациональными*. Приставка «ир» в переводе означает «не». Примером такого числа служит наше число a, равное длине стороны квадрата, площадь которого равна 2. Это число обычно обозначают так: $a = \sqrt{2}$ (читается «корень из двух»).

Естественно возникает вопрос: как записать число $\sqrt{2}$ с помощью десятичной дроби? Иными словами, есть ли способ, с помощью которого можно найти:

1) целую часть числа $\sqrt{2}$;
2) число десятых числа $\sqrt{2}$;
3) число сотых числа $\sqrt{2}$ и т. д.?

Такой способ есть. Он заключается вот в чем: будем подбирать десятичные дроби, квадраты которых будут все ближе и ближе к числу 2.

Так как квадрат числа $\sqrt{2}$ равен 2, то целая часть должна быть меньше 2, и значит, равна 1. Итак, $\sqrt{2} = 1,\ldots$

Далее, мы знаем, что $(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2$, $(1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2$. Следовательно, $\sqrt{2} = 1{,}4\ldots$

Возьмем теперь числа 1,41 и 1,42. Имеем: $(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2$, $(1{,}42)^2 = 2{,}0164 > 2$. Поэтому $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

Ясно, что таким способом можно найти любой десятичный знак числа $\sqrt{2}$. Найдите самостоятельно третий после запятой десятичный знак этого числа.

Задачи

10. Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Как связаны между собой числа a и b?

11. Длина отрезка AB при единице измерения E_1F_1 выражается числом m, а при единице измерения E_2F_2 — числом n. Каким числом выражается длина отрезка E_1F_1 при единице измерения E_2F_2?

12. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

13*. На луче с началом A отмечены последовательно точки B, C, D, E и F. Длина отрезка AF равна $7a$, расстояние между серединами отрезков AB и EF равно $6a$, а между серединами отрезков BC и DE — $4a$. Найдите длину отрезка CD.

14*. Из вершины угла в $160°$ проведены три луча, разделяющие данный угол на четыре части. Угол между биссектрисами крайних частей равен $140°$. Найдите угол между биссектрисами средних частей.

15*. Докажите, что число a, удовлетворяющее условию $a^2 = 3$, является иррациональным числом.

16. Запишите число $\frac{3}{7}$ с помощью десятичной дроби.

17. Напишите три десятичных знака числа a, удовлетворяющего условию $a^2 = 3$.

§ 3. Перпендикулярные и параллельные прямые

12. Перпендикулярные прямые. Два угла, у которых одна сторона — общая, а две другие являются продолжениями друг друга, называются *смежными* (рис. 39). Рассуждения, приведенные под рисунком 39, показывают, что

сумма смежных углов равна $180°$.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. На рисунке 40 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные. Рассуждения, приведенные под рисунком 40, показывают, что

вертикальные углы равны.

Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвернутых угла (углы 1, 2, 3, 4 на рисунке 40). Если один из них — прямой, то и остальные — прямые (рис. 41). Докажите это.

Две прямые называются перпендикулярными (или *взаимно перпендикулярными*), *если они образуют четыре прямых угла*.

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «прямая AC перпендикулярна к прямой BD»). Отрезки

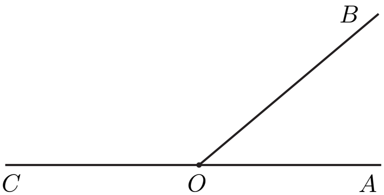


Рис. 39. Углы AOB и BOC — смежные. Общая сторона OB этих углов делит развернутый угол AOC на два смежных угла. Поэтому сумма смежных углов равна $180°$

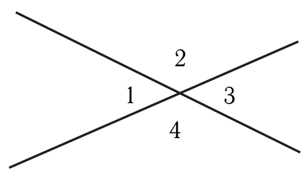


Рис. 40. Углы 1 и 3 — вертикальные. Углы 2 и 4 — также вертикальные. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Поэтому $\angle 1 = \angle 3$. Точно также доказывается, что $\angle 2 = \angle 4$

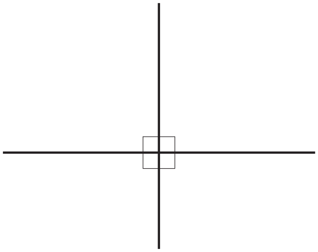
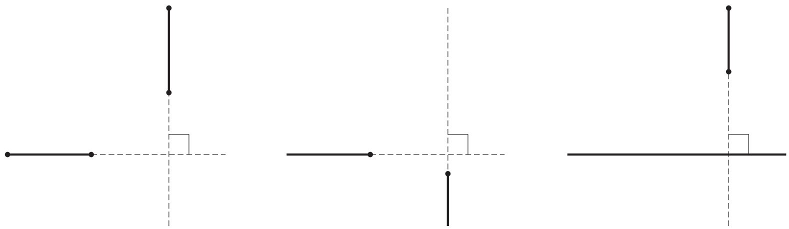


Рис. 41. Перпендикулярные прямые

называются перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых (рис. 42). Аналогично можно определить перпендикулярные лучи, луч и отрезок, луч и прямую, отрезок и прямую (см. рис. 42).

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней (рис. 43). Отрезок, соединяющий точку A с точкой H прямой a, называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a*, если прямые AH и a перпендикулярны. При этом точка H называется *основанием перпендикуляра* или *проекцией точки A на прямую a.*



а) *б)* *в)*

Рис. 42. а) Перпендикулярные отрезки; б) перпендикулярные лучи; в) перпендикулярные отрезок и прямая

Мы ввели понятие перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой. А есть ли такой перпендикуляр? И если есть, то сколько перпендикуляров можно провести из данной точки к данной прямой? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо провести рассуждения.

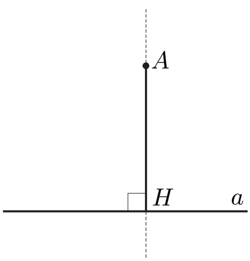


Рис. 43. Отрезок AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, а точка H — основание этого перпендикуляра

В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется *теоремой*, а сами эти рассуждения называются *доказательством теоремы*. Обычно сначала формулируют теорему (т. е. то утверждение, которое хотят доказать), а затем ее доказывают. Например, когда мы рассматривали число a, удовлетворяющее условию $a^2 = 2$, то сначала сформулировали теорему (хотя и не называли ее теоремой): число a не является рациональным. Затем мы привели доказательство этой теоремы.

Докажем теперь *теорему о перпендикуляре к прямой.*

Теорема. *Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один.*

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на данной прямой a (рис. 44). Докажем сначала, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой a. Мысленно перегнем плоскость по прямой a и отметим точку A_1, на которую наложится при этом точка A. Проведем через точки A и A_1 прямую и обозначим буквой H точку пересечения прямых AA_1 и a. При перегибании плоскости по прямой a все точки этой прямой останутся на месте, а луч HA совместится с лучом HA_1. Следовательно, угол 1 совместится с углом 2. Таким образом, эти углы равны, а поскольку они являются смежными, то каждый из них — прямой. Итак, отрезок AH — перпендикуляр к прямой a.

Докажем теперь, что из точки A нельзя провести другой перпендикуляр к прямой a. Предположим, что можно провести еще один перпендикуляр AB (рис. 45). При перегибании плоскости по прямой a точка B останется на месте, а точка A наложится на точку A_1, поэтому луч BA совместится с лучом BA_1, и следовательно, прямой угол 3 совместится с углом 4. Таким образом, угол 4 — также прямой, а значит, угол ABA_1 — развернутый. Отсюда следует, что точки A, B и A_1 лежат на одной прямой. Тем самым, мы получили, что через точки A и A_1 проходят две прямые (одна из них пересекается с прямой a в точке H, а другая — в точке B). Но через две точки проходит только одна прямая. Следовательно, наше предположение неверно, а значит, из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой a. Теорема доказана.

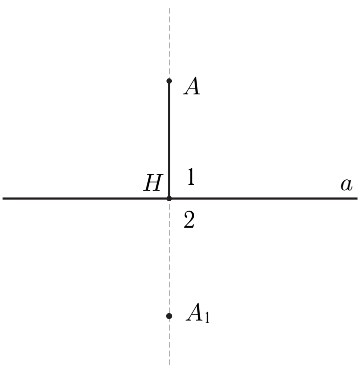


Рис. 44. После перегибания плоскости по прямой a точка A наложится на точку A_1

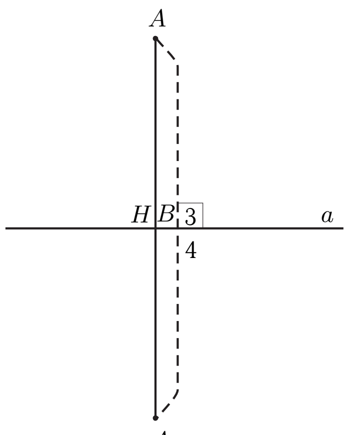


Рис. 45

Замечание. Мы сказали, что обычно сначала формулируют теорему (т. е. то утверждение, которое хотят доказать), а затем ее доказывают. На самом деле это не совсем так. Ведь тому, кто впервые формулирует и доказывает теорему, заранее неизвестна ее формулировка! В действительности все начинается с того, что в виде гипотезы формулируется утверждение, которое кажется правильным. Это утверждение пытаются доказать на «черновике». Если в ходе доказательства выясняется, что утверждение ошибочно, то возвращаются назад, т. е. формулируют новую гипотезу с учетом допущенных ошибок и вновь пытаются доказать ее справедливость. Иногда этот процесс повторяется многократно. Когда же, наконец, доказательство истинности очередной гипотезы удается провести до конца, ее формулируют в виде теоремы и доказывают на «чистовике».

13. Признаки параллельности двух прямых. Теперь мы можем утвердительно ответить на один из поставленных ранее вопросов: а есть ли параллельные прямые? В самом деле, рассмотрим две прямые a и b, каждая из которых перпендикулярна к прямой c (рис. 46). Если бы прямые a и b пересекались, то из точки их пересечения оказались бы проведенными два перпендикуляра к прямой c, что невозможно. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. параллельны. Итак,

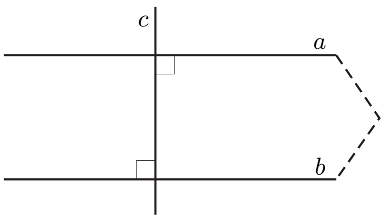


Рис. 46

две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, параллельны.

Сформулированное утверждение выражает признак (перпендикулярность двух прямых к третьей прямой), по которому можно сделать вывод о параллельности двух прямых, или, коротко говоря, *признак параллельности двух прямых*.

Рассмотрим теперь прямые a и b, а также прямую c, которая пересекает их в точках A и B (рис. 47). Прямую c назовем *секущей* по отношению к прямым a и b, а углы 1 и 2 и также углы 3 и 4 на рисунке 47 — *накрест лежащими углами*. Глядя на рисунок, можно предположить, что если накрест лежащие углы равны, то прямые a и b параллельны. Но так ли это?

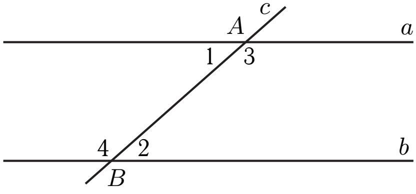


Рис. 47. Прямая c — секущая. Углы 1 и 2 — накрест лежащие. Углы 3 и 4 — накрест лежащие

Давайте рассуждать. Если накрест лежащие углы — прямые (рис. 46), то прямые a и b перпендикулярны к прямой c и поэтому параллельны, это мы знаем. А можно ли это доказать, не ссылаясь на теорему о перпендикуляре к прямой? Можно, и весьма просто. Если мысленно перегнуть плоскость по прямой c (см. рис. 46), то одна половина рисунка совместится с другой. Поэтому если бы прямые a и b пересекались по одну сторону от прямой c, то они пересекались бы и по другую сторону от этой прямой, чего не может быть, так как через две точки можно провести только одну прямую.

Допустим теперь, что накрест лежащие углы 1 и 2 равны, но прямыми не являются. Ясно, что смежные с ними накрест лежащие углы 3 и 4 также равны (рис. 48, *а*). Разрежем плоскость по прямой c (рис. 48, *б*) и повернем одну из половин рисунка на 180° (рис. 48, *в*). Теперь наложим одну половину на другую так,

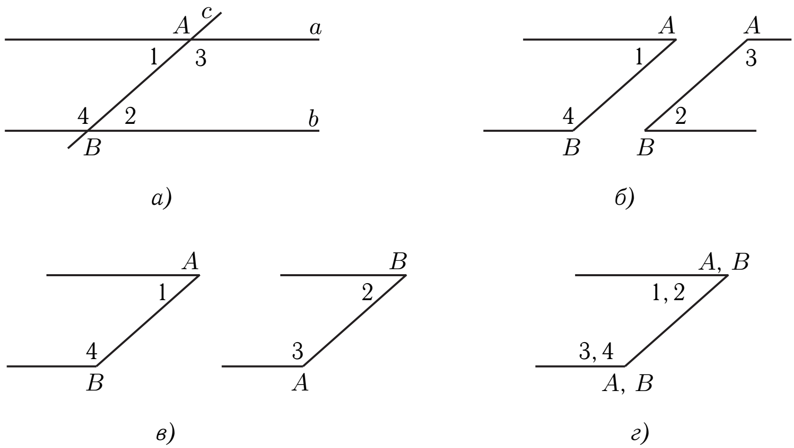
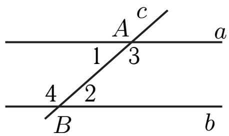


Рис. 48. а) $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $\angle 3 = \angle 4$; б) разрезали плоскость по прямой c; в) правую половину рисунка повернули на 180°; г) совместили две половины рисунка

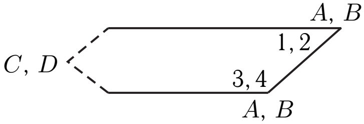
чтобы точка A на одной половине совместилась с точкой B на другой половине, и наоборот (рис. 48, *г*). Поскольку углы 1 и 2 равны, то они совместятся. По аналогичной причине совместятся углы 3 и 4. Таким образом, одна половина рисунка полностью совместится с другой его половиной. Теперь все ясно! Осталось сформулировать теорему и, пользуясь нашими наблюдениями, доказать ее.

Теорема. *Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны.*

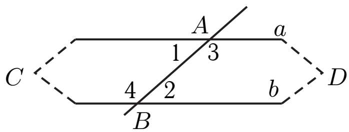
Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы 1 и 2 равны. Тогда смежные с ними углы 3 и 4 также равны (рис. 49, *а*). Мысленно разрежем плоскость по прямой AB, повернем одну из полуплоскостей на 180° и наложим ее на вторую полуплоскость так, чтобы точки A и B на ней совместились соответственно с точками B и A на второй полуплоскости. Поскольку



а)



б)



в)

Рис. 49. а) $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $\angle 3 = \angle 4$; б) совместили две половины рисунка. Если C — общая точка прямых a и b, то точка D, которая на нее наложилась, — также общая точка прямых a и b; в) через точки C и D проходят две прямые — a и b, чего не может быть

углы 1 и 2 равны, то угол 1 совместится с углом 2. Углы 3 и 4 также равны, поэтому и они совместятся.

Если предположить, что прямые a и b пересекаются в точке C одной из полуплоскостей, то точка D, с которой совместится точка C при нашем наложении, также окажется общей точкой прямых a и b (рис. 49, *б*). Тем самым окажется, что через точки C и D проходят две различные прямые — a и b (рис. 49, *в*). Но этого не может быть — через две точки проходит только одна прямая. Следовательно, прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Доказанная теорема является еще одним *признаком параллельности двух прямых*, причем ранее установленный признак является его частным случаем. В самом деле, если две прямые перпендикулярны к третьей прямой, то накрест лежащие углы, образованные при пересечении этих двух прямых третьей, равны (эти углы — прямые), поэтому прямые параллельны.

Прежде чем сформулировать еще два признака параллельности прямых, обратимся к рисунку 50, на котором прямые a и b пересечены секущей c. Образовавшиеся при этом углы обозначены цифрами. Назовем углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 *соответственными*, а углы 4 и 5, 3 и 6 — *односторонними*.

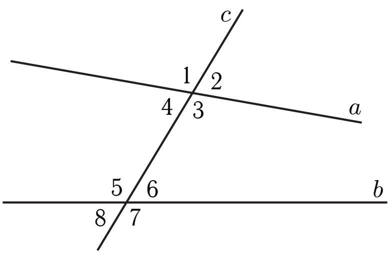


Рис. 50

Утверждения, которые непосредственно вытекают из теоремы, называют *следствиями*. Из доказанной теоремы вытекают такие следствия.

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то эти прямые параллельны.

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, *то эти прямые параллельны.*

Доказательства этих утверждений приведены под рисунками 51 и 52.

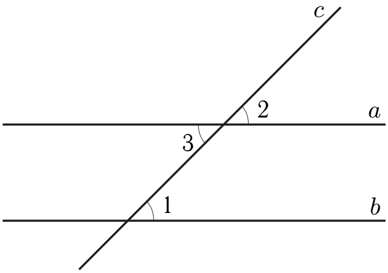


Рис. 51. Пусть соответственные углы $\angle 1$ и $\angle 2$ равны: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 2 = \angle 3$ (как вертикальные углы), то $\angle 1 = \angle 3$, т. е. равны накрест лежащие углы. Следовательно, $a \parallel b$

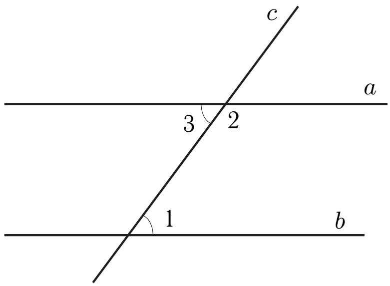


Рис. 52. Пусть сумма односторонних углов 1 и 2 равна 180°. Так как сумма смежных углов 3 и 2 также равна 180°, то $\angle 1 = \angle 3$, т. е. равны накрест лежащие углы. Следовательно, $a \parallel b$

14. Практические способы построения параллельных прямых. Признаки параллельности двух прямых лежат в основе практических способов построения параллельных прямых с помощью различных инструментов. Рассмотрим, например, способ построения параллельных прямых с помощью чертежного угольника и линейки.

Чтобы построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой a, сначала приложим чертежный угольник к прямой a, а к нему линейку так, как показано на рисунке 53. Затем, передвигая угольник вдоль линейки, добьемся того, чтобы точка M оказалась на стороне угольника, и проведем прямую b. Прямые a и b параллельны, так как соответственные углы, обозначенный на рисунке 53 буквами α и β, равны.

На рисунке 54 показан способ построения параллельных прямых при помощи *рейсшины*. Этим способом пользуются в чертежной практике.

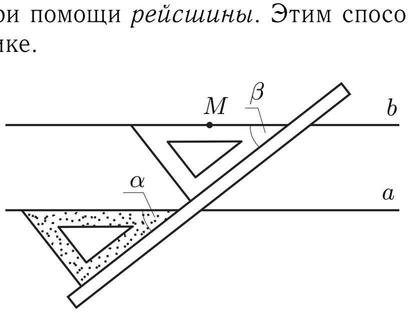


Рис. 53

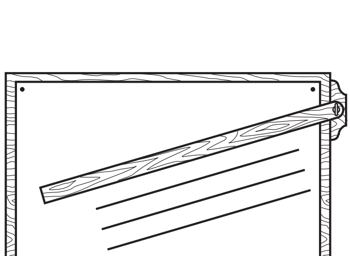


Рис. 54

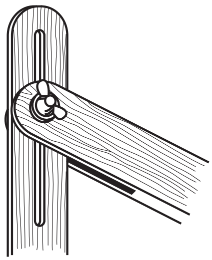


Рис. 55

Аналогичный способ применяется при столярных работах, где для разметки параллельных прямых используется *малка*, представляющая собой две деревянные планки, скрепленные шарниром (рис. 55).

15. А есть ли квадрат?. Вернемся к нашим геометрическим конструкциям, связанным с числом $\sqrt{2}$ (см. п. 11). Мы разрезали каждый из двух одинаковых квадратов с площадью 1 по диагонали и из получившихся четырех треугольников составили квадрат с площадью 2 (см. рис. 37 и 38). А почему получился квадрат? Если внимательно посмотреть на рисунок 38, то видно, что стороны получившегося четырехугольника одинаковы, так как каждая из них равна диагонали a исходного квадрата. Но ведь четырехугольник, все стороны которого равны, может и не быть квадратом (рис. 56). У квадрата каждый из углов — прямой. А вот являются ли у составленного нами четырехугольника все углы прямыми? Это нужно доказать!

Можно поступить так. Разрежем квадрат $ABCD$ со стороной 1 по диагонали (рис. 57). Докажем, что полученные при этом треугольники ABD и CBD равны. Для этого треугольник ABD наложим на треугольник CBD так, чтобы прямой угол при вершине A совместился с прямым углом при вершине C (рис. 58). Тогда сторона AB совместится со стороной CB, а сторона AD совместится со стороной CD. Теперь уже ясно, что треугольник ABD полностью совместится с треугольником CBD. Следовательно, эти треугольники равны. Поэтому $\angle ABD = \angle CBD$ (эти углы отмечены дугами на рисунках 57 и 58) и $\angle ADB = \angle CDB$. Равенство этих углов означает, что диагональ квадрата делит пополам каждый из углов квадрата, через вершины

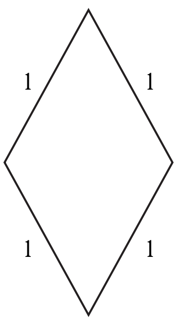


Рис. 56. Четырехугольник, у которого все стороны равны, называется *ромбом*. Ромб может и не быть квадратом

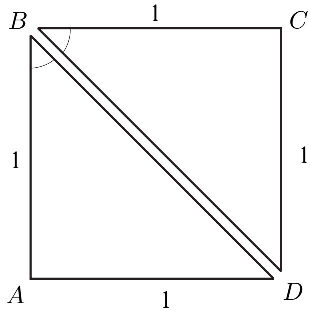


Рис. 57. Квадрат $ABCD$ разрезан по диагонали на два треугольника ABD и CBD

которых она проходит. Взглянув теперь еще раз на рисунок 38, мы сразу увидим, что углы при вершинах построенного нами четырехугольника (он изображен штрихами) — прямые, так как каждый из них составлен из двух половинок прямого угла. Стороны же четырехугольника равны, и поэтому этот четырехугольник — квадрат.

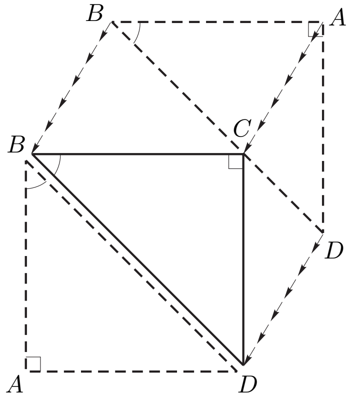


Рис. 58. На этом рисунке показан процесс наложения треугольника ABD на треугольник CBD. Начальное и промежуточное положения треугольника ABD показаны пунктиром. Стрелками указан путь вершин

Но возникает другой вопрос. При конструировании квадрата со стороной a мы исходили из того, что у нас есть квадрат со стороной 1, т. е. есть четырехугольник, все стороны которого равны 1 и все углы — прямые. А есть ли такой четырехугольник, т. е. есть ли квадрат со стороной 1? И вообще, существует ли квадрат с данной стороной d? Можно попытаться ответить на этот вопрос так: попробовать построить квадрат со стороной d.

Рассмотрим отрезок AD длины d (рис. 59). Через точку A под прямым углом к прямой AD проведем луч h и отложим на нем отрезок $AB = d$. Через точку B под прямым углом к лучу h проведем луч k и отложим на нем отрезок $BC = d$. Далее через точку C под прямым углом к лучу k проведем луч l. Теперь на этом луче отложим отрезок $CD_1 = d$. Наше построение завершено, но что мы получили? Если точка D_1 совпадет с точкой D, то мы получим четырехугольник с равными сторонами. Но откуда следует, что угол при вершине D этого четырехугольника будет прямым? А может быть и точка D_1 не совпадет с точкой D. Тогда даже четырехугольник не получится.

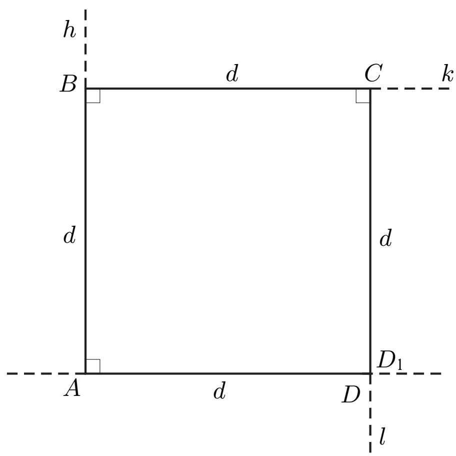


Рис. 59. Построение квадрата с заданной стороной d

Можно предложить иную конструкцию — через точку C не проводить луч l под прямым углом к лучу k, а просто соединить точки C и D отрезком. Но будет ли сторона CD равна d и будут ли углы при вершинах C и D прямыми? Самое удивительное, что без дополнительных предположений нельзя ответить ни на один из этих вопросов. Эти предположения мы обсудим в нашей книге позже и тогда докажем, что квадрат с заданной стороной есть, он существует. А пока запишите в свой блокнот вопрос:

есть ли квадрат?

16. Заключительные замечания. Мы познакомились с некоторыми начальными геометрическими понятиями. И уже появились вопросы, на которые мы пока не знаем ответа. Например, мы не знаем, есть ли квадрат.

Наполеон

В наших доказательствах мы широко использовали рисунки. Хотя, наверное, Вы почувствовали, что рисунки только поясняют суть дела, но не заменяют рассуждения. К рисункам надо относиться с осторожностью. Об этом уже говорилось в пункте 6. Вот еще два рисунка — 60 и 61, показывающие, что рисункам можно доверять далеко не всегда.

Геометрия развивает наши пространственные представления. Но не только для этого она нужна. Она важна для нашей практической деятельности. Но, пожалуй, и это не главное. Доказывая что-то, решая задачи, мы учимся рассуждать, а это важно в любом деле. Геометрия, как мы вскоре увидим, поражает воображение тем, что путем рассуждений в ней устанавливаются совершенно неожиданные факты. Не удивительно, что на протяжении многих столетий люди самых разнообразных профессий посвящали часы досуга занятиям геометрией. Даже Наполеон Бонапарт, будучи императором и великим полководцем, оставил свой след в геометрии в виде теоремы Наполеона.

Задачи

18. Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

19. Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов hk и hl. Докажите, что $\angle hk = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$, а $\angle hl = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

20. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

21. Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 62). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

22. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.

23. Квадрат разрезан по диагонали. Докажите, что сумма углов в каждом из полученных треугольников равна 180°.

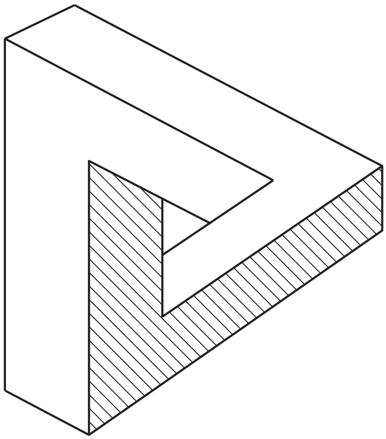


Рис. 60. Такая пространственная фигура невозможна. А на рисунке она есть. Этот рисунок придумал ученый Р. Пенроуз

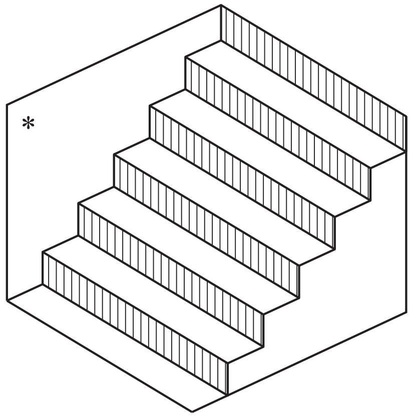


Рис. 61. Лестница Схоутена (по имени ученого, придумавшего этот рисунок). Звездочкой отмечена стена, в которую упирается лестница. Поверните рисунок на 180° и посмотрите, во что превратится стена, отмеченная звездочкой

24. Прямоугольник, составленный из двух равных квадратов (рис. 63), разрезан по диагонали на два треугольника (один из них на рисунке 63 заштрихован). Докажите, что эти треугольники равны. Докажите также, что сумма углов каждого из этих треугольников равна 180°.

25. На рисунке 64 прямые a и b пересечены секущей c. Докажите, что $a \parallel b$, если: а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$; б) $\angle 1 = \angle 6$; в) $\angle 1 = 45°$, а $\angle 7$ в три раза больше $\angle 3$.

26. Дан квадрат $ABCD$. Докажите, что $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$.

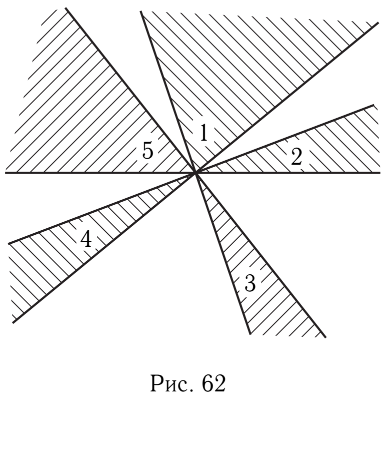


Рис. 62

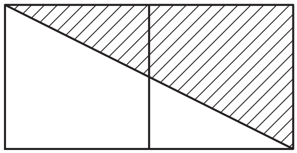


Рис. 63

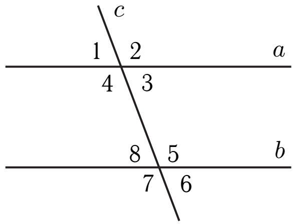


Рис. 64

27. На рисунке 65 $\angle BAC = \angle BCA$ и $\angle DCE = \angle DEC$. Докажите, что $AB \parallel DE$.

28. Исходя из рисунка 66, докажите, что: а) $BC \parallel DE$; б) прямые, содержащие биссектрисы углов ABC и DEF, параллельны.

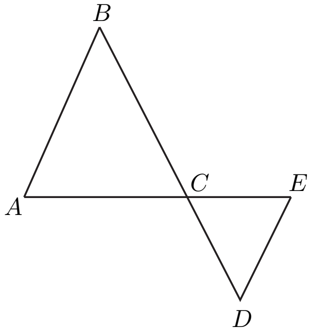


Рис. 65

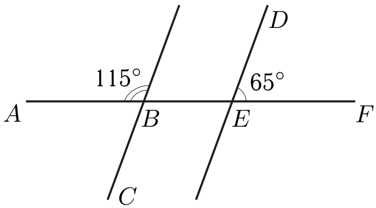


Рис. 66

29. Исходя из рисунка 67, докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла BCD, параллельна прямой AB.

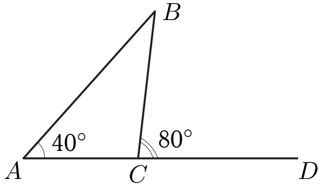


Рис. 67

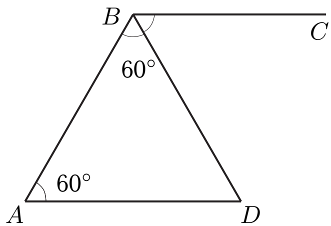


Рис. 68

30. На рисунке 68 луч BD — биссектриса угла ABC. Докажите, что $AD \parallel BC$.

Глава 2

ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 1. Треугольники и их виды

17. Треугольник. Вспомним, что такое треугольник. Это фигура, состоящая из трех отрезков — *сторон* треугольника, соединяющих три точки — *вершины* треугольника. К этому надо добавить еще, что вершины треугольника не должны лежать на одной прямой. Итак, *треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех отрезков, соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой*. Треугольник с вершинами A, B и C условимся обозначать так: ΔABC (рис. 69).

Углы $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ называют *углами треугольника* ABC. Эти углы часто обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$. Сумма трех сторон треугольника называется его *периметром*.

Каждый треугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю области (рис. 70). Как сказать словами, что такое *внутренняя область треугольника*? Можно сказать так: это общая часть внутренних областей трех его углов (рис. 71). Фигуру, состоящую из сторон треугольника и его внутренней области, также называют треугольником.

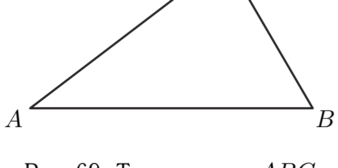


Рис. 69. Треугольник ABC

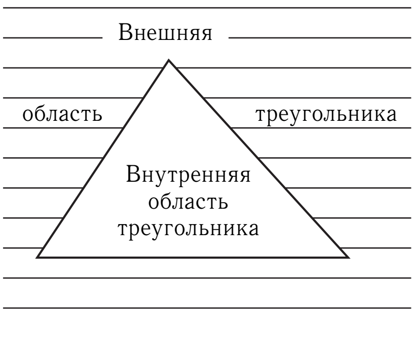


Рис. 70

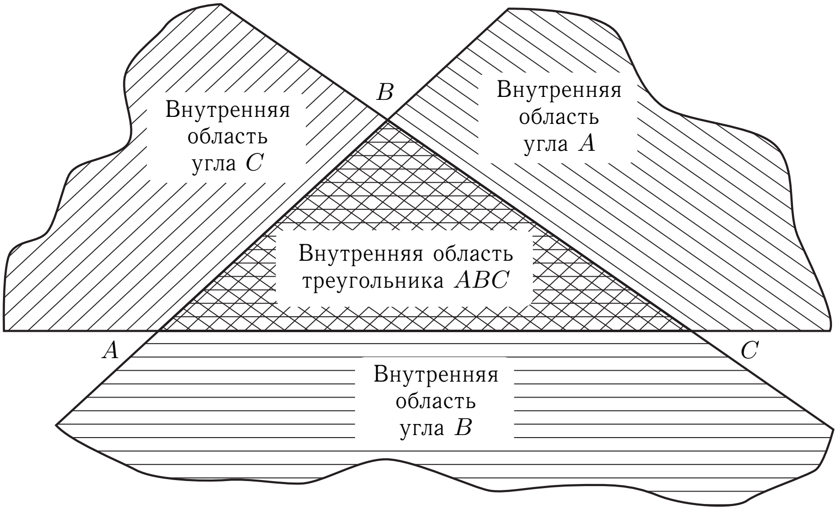


Рис. 71. Внутренняя область треугольника ABC — общая часть внутренних областей трех углов A, B и C этого треугольника

18. Внешний угол треугольника. В следующих пунктах мы получим ряд важных соотношений между сторонами и углами треугольника. При выводе этих соотношений нам понадобится понятие внешнего угла треугольника и его свойство.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. При каждой вершине треугольника имеются два внешних угла. На рисунке 72 изображены внешние углы треугольника ABC.

Докажем *теорему о внешнем угле треугольника.*

Теорема. *Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с этим внешним углом.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 73) и докажем, например, что внешний угол BCD больше угла B. Проведем луч BA_1 так, чтобы углы A_1BC и BCD оказались равными накрест

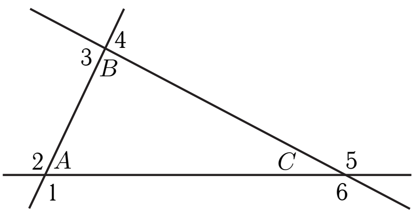


Рис. 72. Углы 1, 2, 3, 4, 5, 6 — внешние углы треугольника ABC

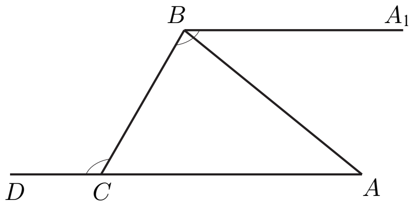


Рис. 73

лежащими углами, образованными при пересечении прямых A_1B и CD секущей BC. По признаку параллельности двух прямых прямые A_1B и CD параллельны.

Следовательно, угол BCD не может быть равен углу B. Иначе прямая A_1B совпала бы с прямой AB и потому не была бы параллельной прямой CD, поскольку прямая AB пересекает прямую CD в точке A.

Если бы угол BCD, а значит и равный ему угол A_1BC, был меньше угла B, то луч BA_1 делил бы угол B на два угла и, следовательно, пересекал бы отрезок AC, а значит, и прямую CD. Этого также не может быть, поскольку прямые A_1B и CD параллельны. Поэтому угол BCD больше угла B. Теорема доказана.

Следствие. *Сумма двух углов треугольника меньше* $180°$.

В самом деле, рассмотрим треугольник ABC и докажем, например, что $\angle A + \angle B < 180°$. Внешний угол при вершине A равен $180° - \angle A$. Поскольку этот угол больше угла B, то $180° - \angle A > \angle B$, откуда $180° > \angle A + \angle B$, или $\angle A + \angle B < 180°$.

19. Классификация треугольников. Из теоремы о внешнем угле треугольника следует, что если в треугольнике один из углов — прямой или тупой, то два других угла — острые. В самом деле, пусть в треугольнике ABC угол A — прямой или тупой (рис. 74). Тогда внешний угол BAD — прямой или острый. По теореме о внешнем угле треугольника углы B и C треугольника ABC меньше угла BAD, поэтому они — острые. Таким образом,

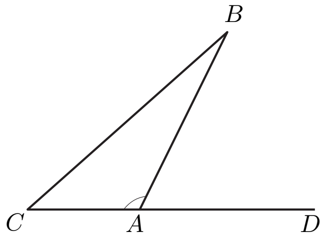


Рис. 74

в любом треугольнике либо все три угла — острые, либо два угла — острые, а третий — прямой или тупой.

Если все углы треугольника — острые, то его называют *остроугольным* (рис. 75, *а*). Если один из углов треугольника — прямой, то его называют *прямоугольным* (рис. 75, *б*), а если один из углов

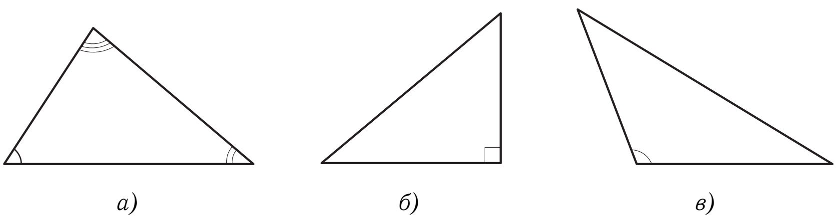


Рис. 75. а) Остроугольный треугольник — все его углы острые; б) прямоугольный треугольник — у него один угол прямой; в) тупоугольный треугольник — у него один угол тупой

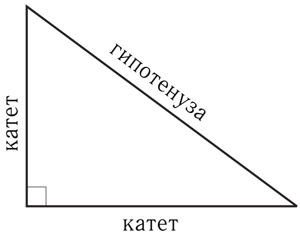


Рис. 76. Прямоугольный треугольник

треугольника — тупой, то *тупоугольным* (рис. 75, *в*). Сторону прямоугольного треугольника, лежащую против прямого угла, называют *гипотенузой*, а две другие стороны — *катетами* (рис. 76).

Эта классификация треугольников, т. е. разделение их на три вида (класса), основана на сравнении углов треугольника. Можно дать классификацию треугольников, опираясь на сравнение их сторон.

Если длины всех сторон треугольника разные, то его называют *разносторонним* (рис. 77, *а*). Если две стороны равны, то треугольник называют *равнобедренным* (рис. 77, *б*). Равные стороны равнобедренного треугольника обычно называют *боковыми сторонами*, а третью сторону — *основанием*. Треугольник, у которого все стороны равны, называют *равносторонним* (рис. 77, *в*).

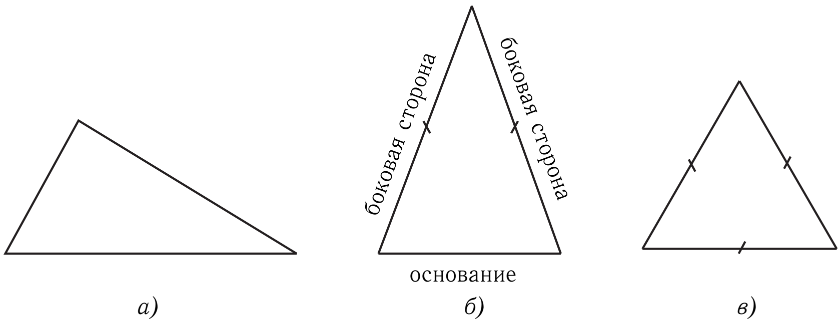


Рис. 77. а) Разносторонний треугольник — длины всех его сторон разные; б) равнобедренный треугольник — у него две стороны равны; в) равносторонний треугольник — у него все стороны равны

20. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. С каждым треугольником связаны несколько отрезков, которые имеют специальные названия.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника (рис. 78, *а*).

Отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника (рис. 79, *а*).

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется *высотой* треугольника (рис. 80, *а*).

Посмотрим на рисунки 78, 79, 80. Мы видим, что три медианы треугольника на рисунке 78, *б* пересекаются в одной точке, три бис-