

Коган Ш.М.

**Электронный шум
и флуктуации
в твердых
телах**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 539.292

ББК 22.37

К 57



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 08-0207032*

Коган Ш. М. **Электронный шум и флуктуации в твердых телах** / Пер. с англ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 368 с. — ISBN 978-5-9221-1106-5.

Книга посвящена фундаментальному физическому явлению — электрическому шуму в твердых телах. В отличие от существующей литературы в ней делается упор не на математические вопросы теории случайных процессов и не на анализ шума в конкретных электронных приборах, а на его микроскопические механизмы в разных проводящих материалах и твердотельных структурах. В частности, в книге излагается кинетическая теория шума в неравновесном электронном газе, очень подробно анализируются свойства низкочастотного фликкер-шума и приводятся недавние результаты по шумам в квантовых контактах.

Для специалистов в области физики твердого тела и инженеров, занимающихся разработкой чувствительных электронных устройств, и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-1106-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2009

© Ш. М. Коган, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчика	8
Предисловие автора	10
Сокращения	15
Глава 1. Введение: некоторые основные понятия теории случайных процессов	16
1.1. Функции плотности вероятности; моменты; стационарные процессы	16
1.2. Корреляционная функция	21
1.3. Спектральная плотность шума	27
1.4. Эргодичность и неэргодичность случайных процессов	33
1.5. Случайные импульсы и дробовой шум	36
1.6. Марковские процессы. Общая теория	39
1.7. Дискретные марковские процессы. Телеграфный шум	47
1.8. Квазинепрерывные марковские процессы диффузионного типа	49
1.9. Броуновское движение	53
1.10. Ланжевеновский подход к кинетике флуктуаций	58
Глава 2. Флуктуационно-диссипационные соотношения в равновесных системах	64
2.1. Вывод флуктуационно-диссипационных соотношений	65
2.2. Равновесный шум в квазистационарных цепях. Теорема Найквиста	73
2.3. Флуктуации электромагнитных полей в непрерывных средах	78
Глава 3. Флуктуации в неравновесных газах	83
3.1. Основные принципы физики горячих электронов	84
3.2. Простая модель шума горячих электронов в полупроводниках	90
3.3. Общий подход. Уравнение Больцмана–Ланжевена	95
3.4. Флуктуации тока и шумовая температура	101
3.5. Флуктуации тока и диффузия в газе горячих электронов	108
3.6. Одновременные корреляции в неравновесном электронном газе	112
3.7. Шум от междолинных переходов в многодолинных полупроводниках	116
3.8. Шум потока горячих электронов, испускающих оптические фононы	120
3.9. Шум в полупроводнике с устойчивым токовым шнуром в надпробойной области	124
Глава 4. Генерационно-рекомбинационный шум	132
4.1. Г-Р шум в монополярных полупроводниках	133
4.2. Шум, создаваемый рекомбинацией и диффузией	137
Глава 5. Шум в квантовых баллистических системах	144
5.1. Введение	144
5.2. Равновесный и дробовой шум в квантовых проводниках	156

5.3. Модуляционный шум в квантовых контактах	164
5.4. Переход от баллистического проводника к макроскопическому . . .	168
5.5. Шум в туннельных контактах	173
Глава 6. Шум сопротивления в металлах	179
6.1. Некогерентное рассеяние электронов подвижными дефектами	179
6.2. Влияние подвижных рассеивающих центров на интерференцию электронов	184
6.3. Флуктуации числа диффундирующих центров рассеяния	193
6.4. Флуктуации температуры и связанный с ними шум	197
Глава 7. Шум в макроскопически неупорядоченных проводниках	201
7.1. Основные идеи теории перколяции	202
7.2. Флуктуации сопротивления в перколяционных системах	207
7.3. Эксперименты	211
Глава 8. Шум $1/f$ и случайный телеграфный шум	214
8.1. Введение	214
8.2. Некоторые общие свойства шума $1/f$	216
8.2.1. Частотная зависимость спектральной плотности (216).	
8.2.2. Некоторые статистические свойства шума $1/f$ и его стационарность (223).	
8.2.3. Зависимость шума $1/f$ от среднего напряжения или тока (229).	
8.2.4. Анизотропия флуктуаций проводимости (232).	
8.2.5. Корреляционная длина флуктуаций и зависимость шума от размеров образца (236).	
8.2.6. Эмпирическое соотношение Хоуге (237).	
8.3. Основные модели шума $1/f$	239
8.3.1. Концепция неэкспоненциальной кинетики (239).	
8.3.2. Модель МакУортера (244).	
8.3.3. Двухуровневые туннельные системы (244).	
8.3.4. Другие модели (247).	
8.4. Шум $1/f$ в металлах	248
8.4.1. Прямая связь между шумом $1/f$ и движением дефектов (248).	
8.4.2. Механизмы шума $1/f$ в металлах (252).	
8.4.3. Шум $1/f$, внутреннее трение и неупругое пьезосопротивление в металлах (255).	
8.5. Низкочастотный шум в полупроводниках.	258
8.5.1. Поверхностный шум (258).	
8.5.2. Объемный шум $1/f$ (261).	
8.6. Магнитный шум в спиновых стеклах и других магнитных системах	264
8.7. Флуктуации температуры как возможный источник шума $1/f$	274
8.8. Случайный телеграфный шум	278
8.8.1. Введение (278).	
8.8.2. СТШ в металлах (283).	
8.8.3. СТШ в туннельных переходах (286).	
8.8.4. СТШ в полевых МОП транзисторах (288).	
8.9. Флуктуации со спектром $1/f$ в других системах.	290
8.10. Общие выводы о шуме $1/f$	292

Глава 9. Шум в сверхпроводниках	295
9.1. Шум в джозефсоновских контактах	296
9.1.1. Введение (296). 9.1.2. Шум в туннельных джозефсоновских контактах (305). 9.1.3. Шум в джозефсоновских контактах с непо- средственной проводимостью и в шунтированных туннельных кон- тактах (309). 9.1.4. Влияние шума на спектральную ширину джо- зефсоновских осцилляций (318).	
9.2. Шум в сверхпроводниках 2-го рода	320
9.2.1. Введение (320). 9.2.2. Шум при крипе и течении магнитного потока (322). 9.2.3. Магнитный шум (326). 9.2.4. Шум сопро- тивления в области перехода вблизи T_c и в нормальном состоянии ВТСП (330).	
Ссылки	334
Предметный указатель	364

Предисловие переводчика

Электрический шум наблюдается в любых проводниках и представляет собой неотъемлемое свойство процесса переноса заряда. С одной стороны, он очень важен с практической точки зрения, поскольку ограничивает чувствительность электронных приборов. С другой стороны, это явление служит своего рода микроскопом, который позволяет заглянуть внутрь вещества.

Первые исследования электрического шума были проведены еще в начале прошлого века. Микроскопическая теория твердого тела тогда еще только зарождалась и была не в состоянии описывать такие сложные явления, однако с помощью термодинамики удалось установить общие феноменологические соотношения между равновесным шумом и средней проводимостью, которые позволяли вычислять этот шум в любых физических системах в пределе слабого тока.

Намного сложнее оказался вопрос о неравновесном шуме, который возникает при протекании через проводник конечного тока и часто намного превосходит равновесный. Для такого шума не удалось получить никаких общих феноменологических выражений и стало ясно, что для его описания необходима микроскопическая теория. Построение такой теории началось в конце 60-х годов прошлого века, когда физика твердого тела в целом достигла достаточного уровня. Постепенно выяснилось, что неравновесный шум не только не связан никакими универсальными соотношениями со средними характеристиками системы, но и может содержать такую информацию о процессах в ней, которую трудно или невозможно получить из измерений других величин. Например, низкочастотный фликкер-шум позволяет наблюдать медленные движения дефектов в металле или захваты электронов на ловушки в полупроводниках, которые никак не проявляются в других электрических измерениях.

Бурный рост исследований в области неравновесного шума начался в конце 80-х годов, когда стала активно развиваться физика мезоскопических систем, в том числе квантовых контактов. Это системы, которые содержат большое число атомов, но размеры которых при низких температурах оказываются меньше длины волны квантовой фазы электронов или длины их энергетической релаксации. В силу малых размеров этих систем флуктуации в них относительно велики, а равновесный шум в них при низких температурах относительно мал. Таким образом, они представляют собой идеальный объект для измерения неравновесного шума. Оказалось, что этот шум содержит важную информацию о мезоскопической системе. Например, в случае слабого межчастичного взаимодействия отношение величины шума к среднему току показывает, обладает ли система туннельной, диффузионной или баллистической проводимостью. В случае же сильно взаимодействующих частиц и туннельной проводимости это отношение позволяет определить заряд одночастичных возбуждений.

К сожалению, до недавнего времени отсутствовала литература, в которой шум рассматривался бы как полноценное физическое явление. В издававшихся до сих пор книгах к нему подходили либо с чисто математической, либо с чисто технической точки зрения. В первом случае исследовались уравнения динамики линейных и нелинейных электрических схем под воздействием источников шума с известными статистическими свойствами, но не рассматривались физические механизмы возникновения этого шума. Во втором случае анализировался шум в конкретных типах электронных приборов, в основном в полупроводниковых транзисторах и диодах. При этом физические механизмы шума рассматривались на крайне примитивном уровне.

Предлагаемая книга посвящена именно физическим механизмам электрического шума в твердых телах. Ее автор Шулим Меерович Коган хорошо известен своими классическими работами по шумам в газе горячих электронов. Он внес заметный вклад в исследования низкочастотного фликкер-шума.

В книге Когана на самом современном микроскопическом уровне рассматриваются основные физические механизмы шума в полупроводниках, металлах и сверхпроводниках, а также в квантовых контактах. При этом большое внимание уделяется общим свойствам этих механизмов и концепциям, лежащим в основе их описания. Отдельно анализируется эргодичность и неэргодичность шума, его зависимость от размеров системы. Автора интересуют не только те системы, которые важны с точки зрения электроники, но и те, в которых шум аномально велик или имеет необычные свойства. Примеры таких систем — сверхпроводники второго рода, композитные материалы со случайной неоднородностью.

Одно из наиболее удачных мест в книге — глава, где подробно изложена теория флуктуаций в неравновесном электронном газе. Сперва приводится упрощенное описание шума в приближении эффективной температуры, а затем эти флуктуации рассматриваются на основе микроскопической теории, созданной автором и получившей сейчас общее признание. Другое достоинство этой книги — уникальный по своей полноте и систематичности обзор свойств и моделей низкочастотного шума $1/f$, который представляет собой еще не полностью понятое явление. Автор здесь четко отделяет уже решенные вопросы от еще не решенных. Наконец, в книге впервые приводятся результаты по шуму в квантовых контактах, которые были получены в 90-х годах и поэтому не были отражены в более ранних изданиях.

К сожалению, в книгу не вошли самые последние результаты по шумам в мезоскопических системах. Описание таких эффектов, как корреляции флуктуаций тока в многоконтактных структурах, влияние кулоновского взаимодействия на токовые корреляции и шум в мезоскопических системах «сверхпроводник–нормальный металл», связанный с андреевскими отражениями, можно найти в обзоре *Blanter Ya. M., Buttiker M. // Phys. Rep. 2000. V. 336. P. 1.*

Предисловие автора

Наука построена из фактов,
как дом построен из камней;
но собрание фактов — наука не в большей степени,
чем куча камней — дом.

Анри Пуанкаре. Наука и гипотеза. 1905. Гл. 9

Эта книга представляет собой введение в физику электронного шума и флуктуационных явлений в твердых телах. Она написана для физиков и инженеров-электриков, занимающихся исследованиями электрического и магнитного шума и разработкой чувствительных твердотельных приборов. Она может также использоваться студентами физических и инженерных специальностей.

Флуктуации, или шум — это спонтанные случайные (стохастические) изменения физических величин во времени или, точнее, случайные отклонения этих величин от некоторых средних значений, которые либо постоянны, либо меняются во времени предсказуемым образом. Флуктуации являются проявлением теплового движения материи и дискретности ее структуры. Введение понятия флуктуаций и развитие физики флуктуаций — одно из величайших достижений физики двадцатого века. Теория броуновского движения, созданная А. Эйнштейном и М. фон Смолуховским в первом десятилетии этого столетия, и ее экспериментальное подтверждение Дж. Б. Перрином и Т. Сведбергом были сильным и, возможно, окончательным аргументом в пользу молекулярно-кинетической теории тепла. Следовательно, физика флуктуаций имеет огромное концептуальное значение.

Физика флуктуаций имеет прикладное значение, поскольку предельная точность измерений любой физической величины ограничена именно флуктуациями этой величины, а предельная чувствительность многих приборов тоже ограничена флуктуациями. Спонтанные случайные флуктуациями в электронных приборах обычно называют *шумом*, так что два термина «флуктуации» и «шум» взаимозаменяемы. Не все источники шума связаны с кинетикой основных процессов в приборе и не поддаются устранению. Некоторые из них зависят от технологии изготовления прибора и, в принципе, могут быть устранены путем ее улучшения. Таким образом, физика флуктуаций особенно важна для развития высокочувствительных приборов. Поскольку уровень шума в электронных приборах зависит от их качества, измерения шума

используют для неразрушающего контроля качества и надежности этих приборов.

Физика флуктуаций представляет собой часть физической кинетики, которая изучает как спонтанные, так и вызванные внешними полями изменения физических величин. Исследования флуктуационных явлений, которые можно назвать «флуктуационной спектроскопией», дают много информации о кинетических процессах в веществе. Часто это гораздо более чувствительный метод, чем измерение средних величин. Анализатор спектра шума, который включает в себя и его усилитель, играет ту же роль, что и микроскоп: он позволяет наблюдать микроскопическое движение и переходы частиц.

В равновесных системах оба типа кинетических свойств, то есть динамика флуктуаций, с одной стороны, и отклики этой же системы на малые заданные внешние возмущения, с другой стороны, связаны флуктуационно-диссипационными соотношениями самого общего характера. Оба типа этих кинетических свойств, флуктуации и отклик на внешние возмущения, определяются одними и теми же кинетическими релаксационными процессами и часто связаны качественным образом даже в неравновесных системах. Однако в этом случае флуктуационно-диссипационные соотношения уже больше не имеют места, и измерения шумовых характеристик дают независимую информацию дополнительно к той, которая была получена из измерений откликов на внешние возмущения. Более того, некоторые механизмы шума, например, те, которые приводят к флуктуациям электросопротивления, не могут быть обнаружены в равновесном шуме. Однако даже при малых средних токах и напряжениях, когда отклонение от равновесия незначительно во всех других отношениях, неравновесный избыточный шум, создаваемый флуктуациями сопротивления, обычно гораздо сильнее равновесного шума. Поэтому измерения спектральной плотности флуктуаций используются во многих системах как очень чувствительный метод исследования разных кинетических процессов в твердых телах.

Шум — это стохастический (случайный) процесс. Случайный характер флуктуаций — следствие того, что тепловое движение и квантовые переходы электронов и атомов в твердых телах случайны. Флуктуации случайны даже в случае так называемого «случайного телеграфного шума», который может быть вызван, например, последовательным случайным захватом *одного* электрона в единственную ловушку и освобождением из нее (разд. 8.8).

Случайные, или стохастические, движения обычно противопоставляются детерминированным. Однако за два последних десятилетия было обнаружено, что многие динамические системы даже с небольшим числом степеней свободы обладают крайне сложными, хаотическими и нестабильными траекториями движения в фазовом пространстве, которые, тем не менее, можно считать детерминированными, то есть их можно, в принципе, точно вычислить заранее для любых начальных

условий, интегрируя динамические дифференциальные уравнения движения. Механизмы, которые приводят к детерминированному хаосу, не рассматриваются в этой книге, и этот тип случайных процессов далее не обсуждается. Речь пойдет только о процессах, которые называют «стохастическим шумом» (мы следуем терминологии обзора Гаспара и Ванга (Gaspard & Wang, 1993), в котором анализируется разница между детерминированным хаосом и стохастическим шумом). Экспериментальные исследования флуктуаций обычно проводятся в системах, которые либо находятся в равновесии, либо вблизи равновесия, то есть не подвергаются действию слишком сильной внешней накачки, которая может привести к динамическому хаосу. В этой книге рассматриваются флуктуации только в таких системах.

Читатель этой книги может задать очень деликатный вопрос: а существует ли такая область физики, как физика флуктуационных явлений? Действительно, физика флуктуаций, например в полупроводниках, очень сильно отличается от физики флуктуаций в сверхпроводниках. Есть ли что-либо общее в шумовых явлениях в разных твердых телах, что оправдывало бы написание этой книги? Вот некоторые аргументы в пользу положительного ответа.

1. Фундаментальные понятия и методы теории флуктуаций имеют самый общий характер и применимы ко всем физическим системам. Это относится к такому понятию как марковские процессы, ланжевеновскому подходу, теории процессов типа дробового шума и к теории увеличения шума в сильно неупорядоченных твердых телах. Иначе говоря, многие глубокие физические понятия являются общими для самых разных флуктуационных процессов.

2. Существуют общие флуктуационно-диссипационные соотношения, которые применимы к любой равновесной физической системе и к любому виду шума в этой системе.

3. Так называемый шум $1/f$ наблюдается практически во всех физических системах (гл. 8). Несмотря на то, что универсального механизма такого шума не существует и не может существовать, шум этого типа связан с самыми *общими* свойствами неупорядоченных твердых тел. Успешное выяснение механизма этого шума в одном типе физических систем помогает понять этот механизм в системах совершенно другого типа.

За последние десятилетия опубликовано большое число книг и обзоров по флуктуациям, или шуму. Однако физика флуктуационных явлений в твердых телах — это быстро развивающаяся область. За последнее десятилетие были открыты и исследованы новые явления и новые стороны известных явлений: шум в баллистических проводниках, шум в мезоскопических проводниках, шум в сильно неупорядоченных проводниках, шум в высокотемпературных сверхпроводниках, магнитный шум $1/f$ в спиновых стеклах и аморфных ферромагнетиках, случайный телеграфный шум, то есть флуктуации электросопротивле-

ния, создаваемые *индивидуальными* электронными ловушками атомных размеров или прыжками *индивидуальных* дефектов в металлах.

Первоочередная цель этой книги — представить читателю *современное состояние области*. Основной упор был сделан на *понимание физики флуктуационных явлений*. Меньше внимания обращалось на математические методы теории шума и на экспериментальные методы его измерения. Автор попытался дать простые качественные объяснения всех флуктуационных явлений, обсуждаемых в этой книге, использовать наиболее простые методы теоретического описания, и избежать слишком длинных выводов уравнений и методов, которые не входят в программы университетских курсов. Автор надеется, что книга будет полезна студентам университетов.

Основное внимание в книге уделяется *теории* флуктуационных явлений и, пожалуй, в меньшей степени *описанию и обсуждению экспериментов*. Это общий недостаток многих современных книг по физике, даже учебников по общей физике для студентов младших курсов. Возможно, это результат лаконичности языка теоретической физики.

Книга далека не полна. Многие интересные флуктуационные явления в ней не представлены. Это касается флуктуационных явлений в электронных приборах, фотопроводниках, фотодетекторах и некоторых других твердых телах. Также не обсуждается шум Баркхаузена в ферромагнетиках. В книге не отражены критические флуктуации в окрестности фазовых переходов второго рода. Невозможно было процитировать всех авторов даже очень полезных работ. Я извиняюсь перед ними.

Предполагается, что читатель знаком с основами физики и математики. Некоторые главы требуют знания квантовой механики, включая представление Гейзенберга, и статистической физики в пределах университетской программы. Более специальная информация дается в предисловиях к некоторым главам. Из математических методов чаще всего используются преобразование Фурье (разложение Фурье) и матричная алгебра.

Список цитированной литературы и рекомендуемых книг и обзоров дан в конце книги. Те из них, которые носят общий характер, то есть не касаются отдельной узкой области, помещены в начале списка. Формулы пронумерованы внутри каждого раздела и подраздела. Рисунки и таблицы пронумерованы в каждой главе отдельно.

Я хочу выразить благодарность А. Я. Шульману, В. Д. Шадрину и К. Э. Нагаеву из Института радиотехники и электроники РАН (Москва) за сотрудничество в этой области и тем ученым, кто внимательно прочитал отдельные части манускрипта и сделал ценные замечания: М. Б. Вайссману из Университета Иллинойса (Урбана-Шампейн), К. К. Лихареву из Университета Нью-Йорка (Стоуни Брук), Р. Катилюсу из Института физики полупроводников (Вильнюс), Б. К. Джонсу, Д. Е. Хмельницкому из Кавендишской лаборато-

рии (Кембридж) и Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау (Москва), К. Э. Нагаеву из ИРЭ РАН и Сешао Фенгу из Университета Калифорнии (Лос-Анджелес). Я хотел бы поблагодарить П. Мазетти за предоставленные мне отписки работ итальянских авторов по шуму в аморфных ферромагнетиках. Значительную роль сыграли Р. Купер, редактор из Института физики (Бристоль), и С. Капелин из издательства *Cambridge University Press*, которые предложили мне написать книгу по флуктуационным явлениям. Я особенно признателен г-же Франсез Некс из *Cambridge University Press* за тщательное редактирование этой книги. Особую благодарность следует выразить В. Л. Берману за изготовление большого числа рисунков к этой книге.

Эта книга была частично написана в Москве в ИРЭ РАН, а частично — в Лос-Аламосской национальной лаборатории (США). Многие люди, чьи интересы далеки от проблем, обсуждаемых в этой книге, косвенно помогли мне ее писать. Я благодарен Д. Л. Смиту, Д. Е. Уоткинсу, А. Редондо, Т. Шпрингеру, И. Х. Кэмбеллу, С. Хеллеру, Б. Лауриху, П. Дэвису и П. МакДаугаллу из Отделения материаловедения и технологии ЛАНЛ за систематическую помощь. Мне очень помогли дружеские отношения с А. и Р. Браунингами, С. и М. Кляйнами, С. и Б. Кронами, Дж. и Ф. Марчами, Т. В. Григорьевой и Г. П. Берманом, К. Майлдером, Дж. Самюэльсом и многими другими людьми в Лос-Аламосе.

Члены моей семьи вдохновляли и ободряли меня при написании этой книги, и я очень благодарен им за их поддержку.

Сокращения

2ДЭГ	двумерный электронный газ
RKKY	Ruderman–Kittel–Kasuya–Yosida
S-c-S	сверхпроводник–сужение–сверхпроводник
БК	бесконечный кластер
ВАХ	вольтамперная характеристика
ВЗП	волна зарядовой плотности
ДУТС	двухуровневая туннельная система
МДМ	металл–диэлектрик–металл
МДП	металл–диэлектрик–полупроводник
МОП	металл–окисел–полупроводник
ОДС	отрицательное дифференциальное сопротивление
СКВИД	сверхпроводящий квантовый интерферометр
СТШ	случайный телеграфный шум
УБЛ	уравнение Больцмана–Ланжевена
ФДС	флуктуационно-диссипационное соотношение
ФДТ	флуктуационно-диссипационная теорема

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ:

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Флуктуации в твердых телах — типичные случайные процессы. По определению, случайный процесс — это случайная функция $x(t)$ независимой переменной t , которая в теории флуктуаций представляет собой время. Теория флуктуаций основана на высоко развитой математической теории случайных процессов. Эта глава служит введением в основные понятия и методы этой теории, которые используются на протяжении всей книги. Список рекомендованных книг и обзоров находится в конце книги.

1.1. Функции плотности вероятности; моменты; стационарные процессы

Пусть $P\{\dots\}$ — вероятность события, указанного в фигурных скобках. Функции распределения первого, второго и более высоких порядков для заданного случайного процесса $x(t)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} W_1(x_1, t_1) &= P\{x(t_1) \leq x_1\}, \\ W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) &= P\{x(t_1) \leq x_1; x(t_2) \leq x_2\}, \\ W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= P\{x(t_1) \leq x_1; \dots; x(t_n) \leq x_n\}, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где x_i — значение случайной величины в момент t_i .

Например, $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ — это вероятность того, что случайная величина x в момент t_1 меньше, чем заданное значение x_1 , а в момент t_2 меньше, чем x_2 .

Если $W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ — дифференцируемые функции переменных x_1, \dots, x_n , можно ввести соответствующие плотности вероятности:

$$\begin{aligned} w_1(x_1, t_1) &= \frac{\partial W_1(x_1, t_1)}{\partial x_1}, \\ w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) &= \frac{\partial^2 W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Функции w_n называют n -мерными плотностями вероятности случайной величины $x(t)$. Их можно определить и другим способом. Например, двумерную плотность вероятности можно определить соотношением

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = P\{x_1 \leq x(t_1) < x_1 + dx_1; x_2 \leq x(t_2) < x_2 + dx_2\}. \quad (1.1.3)$$

Плотности вероятности должны согласовываться друг с другом, то есть любая k -мерная плотность вероятности должна получаться из любой n -мерной плотности с $n > k$ путем интегрирования по «лишним» переменным:

$$w_k(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) = \int dx_{k+1} \dots dx_n w_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n). \quad (1.1.4)$$

Случайные процессы называют стационарными, если все распределения $w_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ остаются неизменными при любом сдвиге всех моментов времени t_1, \dots, t_n на одну и ту же величину. Это означает, что для стационарного процесса плотность вероятности $w_1(x_1, t_1)$ вообще не зависит от времени t_1 , плотность вероятности $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ зависит только от разности $t_1 - t_2$, то есть может быть записана как $w_2(x_1, x_2, t_1 - t_2)$, и так далее.

Среднее значение случайной величины $x(t)$ равно (о методах усреднения случайных величин см. ниже)

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dW(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x w_1(x, t). \quad (1.1.5)$$

Центральный момент порядка r — это среднее значение случайной величины $(\delta x(t))^r$, где $\delta x(t) = x(t) - \langle x \rangle$ представляет собой отклонение случайной величины $x(t)$ от своего среднего значения $\langle x \rangle$, то есть флуктуацию:

$$\langle [\delta x(t)]^r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\delta x)^r w_1(x, t). \quad (1.1.6)$$

Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию, то есть среднеквадратичную флуктуацию.

Если плотность вероятности $w_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ известна для разных моментов времени t_1, \dots, t_n , можно вычислить корреляционную функцию

$$\langle \delta x(t_1) \dots \delta x(t_n) \rangle = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta x_1 \dots \delta x_n w_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n). \quad (1.1.7)$$

Характеристическая функция случайной величины определяется как среднее значение функции $\exp(iux)$, где x — случайная величина, а u — вещественный параметр:

$$\phi_x(u) \equiv \langle e^{iux} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dW(x). \quad (1.1.8)$$

Если функция распределения $W(x)$ дифференцируема (см. выше), характеристическая функция представляет собой просто фурье-образ плотности вероятности (1.1.2)

$$\phi_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{iux} w(x). \quad (1.1.9)$$

Характеристическая функция обладает очень полезным свойством: если случайная величина X представляет собой сумму N независимых переменных, то есть

$$X = \sum_{i=1}^N x_i, \quad (1.1.10)$$

то характеристическая функция X представляет собой произведение характеристических функций величин x_i :

$$\phi_X(u) = \phi_{x_1}(u) \cdot \phi_{x_2}(u) \cdots \phi_{x_N}(u). \quad (1.1.11)$$

Поэтому во многих задачах, в которых случайная величина дается выражением (1.1.10), удобнее сперва вычислить $\phi_X(u)$, а затем найти плотность вероятности $w(X)$, используя обратное преобразование Фурье к (1.1.9):

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\pi} \phi_x(u) e^{-iux}. \quad (1.1.12)$$

В теории флуктуаций важнейшим распределением является нормальное (гауссовское) распределение. Оно возникает, когда случайная величина $x(t)$ представляет собой сумму большого числа ($N \gg 1$) независимых и одинаково распределенных случайных величин. В качестве примера можно привести шум, создаваемый в макроскопическом образце в результате случайного движения независимых, но одинаковых дефектов или спинов. Пусть ξ_1, \dots, ξ_N — независимые случайные величины с одинаковыми распределениями, и $x = \xi_1 + \dots + \xi_N$. Если слагаемые ξ_1, \dots, ξ_N достаточно малы, а их число N достаточно велико, т. е. $N \rightarrow \infty$, причем среднее значение $x(t)$ равно $\langle x \rangle$, а дисперсия $x(t)$ равна σ^2 , то одномерная плотность вероятности равна

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(\delta x)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (1.1.13)$$

где $\delta x = x - \langle x \rangle$ — флуктуация этой величины. Такое распределение называется нормальным, или гауссовским.

Случайный процесс называется гауссовским, если *все* плотности вероятности нормальны для любой размерности $n = 1, \dots$. Нормальное n -мерное распределение имеет вид

$$w_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \hat{\lambda}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{-1} \delta x_i \delta x_j \right]. \quad (1.1.14)$$

Здесь $\delta x_i = x_i - \langle x_i \rangle$. Матрицу $\hat{\lambda}$ называют матрицей ковариации. Ее элементы равны

$$\lambda_{ij} = \langle \delta x_i \delta x_j \rangle = \lambda_{ji}. \quad (1.1.15)$$

В выражении (1.1.14) $\det \hat{\lambda}$ — детерминант матрицы $\hat{\lambda}$, а λ_{ij}^{-1} — элементы матрицы $\hat{\lambda}^{-1}$, которая обратна $\hat{\lambda}$.

В частности, двумерное нормальное распределение имеет вид

$$w_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[\frac{(\delta x_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\delta x_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho_{12} \frac{\delta x_1}{\sigma_1} \frac{\delta x_2}{\sigma_2} \right] \right\}. \quad (1.1.16)$$

Здесь $\sigma_i^2 = \langle (\delta x_i)^2 \rangle$ — дисперсии, а $\rho_{12} = \langle \delta x_1 \delta x_2 \rangle / \sigma_1 \sigma_2$ — коэффициент корреляции.

Формулы (1.1.7) и (1.1.14) показывают, что для гауссовских случайных процессов все ненулевые моменты n -го порядка ($n > 2$) выражаются через моменты второго порядка, т. е. ковариации λ_{ij} (парные корреляции). Другими словами, измерение корреляций более высокого порядка не может дать никакой новой информации помимо той, которая уже содержится в парных корреляциях (об этом свойстве гауссовских случайных процессов см. разд. 1.2).

Многие случайные процессы аналогичны испусканию электронов из катода электронной лампы. Моменты времени, когда испускаются электроны, случайны, поскольку события испускания не коррелированы между собой. Такие случайные процессы называют пуассоновскими. Другой пример таких процессов — прыжки одинаковых дефектов в твердом теле, не взаимодействующих между собой. Пусть n_1 — средняя частота индивидуальных событий, то есть их среднее число в единицу времени. В случае электронной эмиссии n_1 — это среднее число электронов, испущенных в единицу времени. Среднее число таких событий за время t_m , очевидно, есть $\bar{n} = n_1 t_m$. Конечно, реальное число событий n , которое произойдет в течение периода t_m , есть случайная величина, которая флуктуирует вокруг своего среднего

значения \bar{n} . Задача состоит в том, чтобы найти вероятность $P(n)$ того, что за время $t_m = \bar{n}/n_1$ произойдет ровно n событий.

Разобьем время t_m на N равных интервалов. Число N выберем настолько большим, или, что то же самое, интервалы t_m/N такими малыми, чтобы за один интервал могло произойти не более одного события. Для каждого такого интервала есть только две возможности: либо произойдет одно индивидуальное событие, либо их не произойдет вообще. Соответствующие вероятности равны \bar{n}/N и $1 - \bar{n}/N$. Вероятность каждой конкретной последовательности из n «заполненных» и $N - n$ «пустых» интервалов (одно или ни одного события соответственно) равна $(\bar{n}/N)^n (1 - \bar{n}/N)^{N-n}$. Полное число разных последовательностей (комбинаций) из n «заполненных» и $N - n$ «пустых» интервалов есть число сочетаний $N!/n!(N - n)!$. Таким образом, вероятность того, что произойдет n событий, равна

$$\begin{aligned} \frac{N!}{n!(N - n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} &= \\ &= \frac{\bar{n}^n}{n!} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

Искомая вероятность, которая называется распределением Пуассона, получается из последнего выражения в пределе $N \rightarrow \infty$ при конечном n . Поскольку $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \bar{n}/N\right)^N = \exp(-\bar{n})$,

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}. \quad (1.1.17)$$

Статистические характеристики случайного процесса — это детерминированные величины, которые, в принципе, можно измерить путем соответствующего усреднения случайной величины или величин. Существуют два способа измерений.

1. Усреднение по времени, то есть с помощью достаточно долгой записи случайного процесса. В этом случае, например, функция распределения стационарного процесса $W_1(x_1)$ равна той доле полного времени измерения t_m , в течение которой случайная величина $x < x_1$. Среднее значение случайной величины в таком случае равно

$$\bar{x} = \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_{-t_m/2}^{t_m/2} dt x(t). \quad (1.1.18)$$

2. Усреднение по ансамблю большого числа N идентичных систем, т. е. систем, в которых обеспечены идентичные начальные условия для случайного процесса и измерения ведутся идентичными способами. В этом случае функция распределения $W_1(x_1, t_1)$ равна той доле полно-

го числа систем в ансамбле, в которых в момент времени t_1 случайная величина $x < x_1$. Среднее значение, обозначаемое угловыми скобками, в этом случае равно

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t). \quad (1.1.19)$$

Здесь $x_i(t)$ — значение случайной величины в момент t в i -й системе ансамбля.

Возникает вопрос, будет ли среднее значение стремиться к определенному пределу, если увеличивать время усреднения t_m или число систем N в ансамбле. Это фундаментальный вопрос. Он часто сводится к следующему: дают ли обе процедуры усреднения (см. выше) одинаковые средние значения? В случае положительных ответов случайный процесс называют эргодическим. Эргодичность и неэргодичность обсуждаются в разд. 1.4.

1.2. Корреляционная функция

Корреляционная функция — одна из наиболее важных характеристик любого случайного процесса. Пусть $x(t)$ — величина, случайно изменяющаяся во времени t , и пусть $\langle x \rangle$ — ее среднее значение. Изменение во времени флуктуации, т. е. отклонения случайной величины от ее среднего значения $\delta x(t) = x(t) - \langle x \rangle$, разумеется, тоже случайно. Корреляционная функция представляет собой неслучайную характеристику кинетики этих случайных флуктуаций: она показывает, как флуктуации изменяются во времени *в среднем*.

Рассмотрим ансамбль большого числа N систем, в которых были заданы одинаковые начальные условия для рассматриваемого случайного процесса. Пусть $\delta x_i(t_1)$ и $\delta x_i(t_2)$ — флуктуации в i -й системе ансамбля ($i = 1, \dots, N$) в моменты времени t_1 и t_2 соответственно. Тогда корреляционная функция определяется выражением

$$\begin{aligned} \psi_x(t_1, t_2) &\equiv \langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \rangle = \langle x(t_1) x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i(t_1) \delta x_i(t_2). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Здесь и далее угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю одинаковых систем.

В стационарной системе корреляционная функция остается неизменной, если оба момента времени t_1 и t_2 сдвинуть на одинаковую величину. В таких системах ψ_x зависит только от разности $t_1 - t_2$ (см. разд. 1.1).

Корреляционную функцию можно также определить и используя усреднение записи процесса $x(t)$ по достаточно длинному периоду времени измерения t_m :

$$\psi_x(t_1 - t_2) \equiv \overline{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} = \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_{-t_m/2}^{t_m/2} dt \delta x(t_1 + t) \delta x(t_2 + t). \quad (1.2.2)$$

Обе корреляционные функции (1.2.1) и (1.2.2) совпадают, если система эргодична (см. дискуссию об эргодичности и неэргодичности случайных систем в разд. 1.4).

В соответствии с выражениями (1.2.1) и (1.2.2) при $t_1 = t_2$ корреляционная функция представляет собой просто дисперсию, т. е. средний квадрат флуктуации $\psi_x(t, t) = \langle (\delta x)^2 \rangle$. При $|t_1 - t_2| \rightarrow \infty$ корреляционная функция в устойчивых системах спадает до нуля. Пусть флуктуация в i -й системе в момент t_1 равна $\delta x_i(t_1)$. Если $t_2 > t_1$, но достаточно близко к t_1 , флуктуация в каждой системе ансамбля не успевает существенно изменить свое значение, и, скорее всего, $\delta x_i(t_2)$ имеет тот же знак, что и $\delta x_i(t_1)$. Поэтому $\delta x_i(t_1) \delta x_i(t_2) > 0$ почти во всех системах ансамбля. По мере того как t_1 и t_2 отдаляются друг от друга, число систем, в которых знак $\delta x_i(t_2)$ противоположен знаку $\delta x_i(t_1)$, сравнивается с числом систем, в которых эти знаки одинаковы. Таким образом, в сумме (1.2.1) помимо положительных слагаемых появляются отрицательные. При достаточно больших $|t_1 - t_2|$ положительные и отрицательные слагаемые становятся равновероятными, и $\psi_x(t_1 - t_2) \rightarrow 0$.

Затухание $\psi_x(t_1 - t_2)$ до нуля при $|t_1 - t_2| \rightarrow \infty$ можно рассматривать как «забывание» системой «первоначальной» флуктуации. В каждой физической системе существует характерное время такого «забывания». Это время обычно называют временем релаксации. В реальных системах протекает несколько, возможно, взаимосвязанных кинетических процессов и, следовательно, существует несколько времен релаксации. Более того, во многих сложных системах существует даже непрерывный спектр таких времен.

Корреляционную функцию можно выразить через двумерную плотность вероятности (1.1.7):

$$\psi_x(t_1, t_2) = \int dx_1 dx_2 \delta x_1 \delta x_2 w_2(x_1, t_1; x_2, t_2). \quad (1.2.3)$$

Здесь $\delta x_1 = x_1 - \langle x(t_1) \rangle$, $\delta x_2 = x_2 - \langle x(t_2) \rangle$.

Двумерную плотность вероятности можно представить в виде произведения

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w_1(x_1, t_1) P(x_2, t_2 | x_1, t_1). \quad (1.2.4)$$

Здесь $w_1(x, t)$ — одномерная плотность вероятности случайной величины $x(t)$ в момент t , $P(x_2, t_2|x_1, t_1)dx_2$ — условная вероятность того, что величина x в момент t_2 будет находиться в интервале между x_2 и $x_2 + dx_2$, если в предыдущий момент t_1 значение x было x_1 . Обозначим как

$$\langle \delta x(t_2) | \delta x_1, t_1 \rangle = \int dx_2 \delta x_2 P(\delta x_2, t_2 | \delta x_1, t_1) \quad (1.2.5)$$

среднее значение флуктуации δx в момент t_2 при условии, что в предыдущий момент t_1 значение случайной величины было x_1 . В этих обозначениях

$$\psi_x(t_1, t_2) = \int dx_1 \delta x_1 w_1(\delta x_1, t_1) \langle \delta x(t_2) | \delta x_1, t_1 \rangle. \quad (1.2.6)$$

Величина $\langle \delta x(t) | \delta x_0, t_0 \rangle$ описывает среднюю эволюцию (обычно, затухание) флуктуации, начальное значение которой в момент t_0 было δx_0 . Заметим, что абсолютное значение флуктуации при заданном начальном значении может как уменьшаться, так и увеличиваться со временем. Однако *в среднем* оно обычно, хотя и не всегда, уменьшается для любого заданного начального значения. Корреляционная функция представляет собой значение $\delta x_1 \langle \delta x(t_2) | \delta x_1, t_1 \rangle$, усредненное по «начальной» величине δx_1 .

Выберем из ансамбля те системы, в которых флуктуация в момент t_1 близка к определенному значению δx_1 . Через большой промежуток времени после t_1 флуктуации в разных системах из числа первоначально отобранных будут совершенно разными и примут случайный характер, и их распределение станет таким же, как и во всем ансамбле. Однако среднее значение флуктуации для ансамбля в целом равно нулю. Поэтому и условное среднее значение флуктуации стремится к нулю:

$$\lim_{(t_2-t_1) \rightarrow \infty} \langle \delta x(t_2) | \delta x_1, t_1 \rangle = 0.$$

В случае гауссовского случайного процесса условная средняя флуктуация $\langle \delta x(t) | \delta x_1, 0 \rangle$ и корреляционная функция связаны простым соотношением. Подстановка $P(\delta x_2, t_2 | \delta x_1, t_1) = w_2(\delta x_1, t_1; \delta x_2, t_2)/w_1(x_1, t_1)$ для гауссовского процесса (выражение (1.1.16)) в (1.2.5) после интегрирования по δx_2 дает

$$\frac{\langle \delta x(t) | \delta x_0, 0 \rangle}{\delta x_0} = \frac{\psi_x(t)}{\langle (\delta x)^2 \rangle}. \quad (1.2.7)$$

Это соотношение означает, что для гауссовского процесса зависимость от времени условной средней флуктуации такая же, как для корреляционной функции при *любой* начальной флуктуации δx_0 . Если $\psi_x(t)$ — монотонно убывающая функция $|t|$, флуктуация $|\delta x(t)|$ при

$t > 0$ в среднем убывает при любой, произвольно малой, $|\delta x(0)|$. Разумеется, такое поведение имеет место только в среднем, и абсолютное значение случайной флуктуации может расти и превышать ее значение в предыдущий момент времени.

Часто несколько случайных величин $x_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, M$) связаны между собой. Тогда корреляционная функция представляет собой матрицу

$$\psi_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = \langle \delta x_\alpha(t_1) \delta x_\beta(t_2) \rangle. \quad (1.2.8)$$

Каждая из функций с $\alpha = \beta$ называется автокорреляционной функцией, а функции с $\alpha \neq \beta$ — кросс-корреляционными функциями разных физических величин.

Приведенное выше определение корреляционной функции имеет смысл, только если квантово-механические эффекты несущественны и случайную величину $x(t)$ можно рассматривать как классическую, или c -число. В квантовой механике каждой физической величине x соответствует оператор \hat{x} . Известны несколько эквивалентных представлений квантовой механики. В представлении Шредингера от времени зависит волновая функция системы, но не квантово-механические операторы. Наоборот, в представлении Гейзенберга волновая функция не зависит от времени, и вся зависимость от времени t переносится на операторы $\hat{x}(t)$, которые удовлетворяют гейзенберговскому уравнению движения

$$\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H}). \quad (1.2.9)$$

Здесь \hat{H} — оператор энергии системы (гамильтониан), который тоже выражается через гейзенберговские операторы, зависящие от этого же времени t , $\hbar = h/2\pi$, и h — постоянная Планка.

Корреляционную функцию $\psi_x(t_1, t_2)$ удобнее всего выразить через гейзенберговские операторы флуктуирующих величин. Очевидно, она может быть представлена в виде произведения двух гейзенберговских операторов, взятых в моменты времени t_1 и t_2 , т.е. $\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)$. Однако корреляционная функция — измеряемая величина, и ее значения должны быть вещественными. В соответствии с общими правилами квантовой механики соответствующий оператор корреляционной функции должен быть эрмитовым. Симметричная комбинация

$$\frac{1}{2} \{ \hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2) \} \equiv \frac{1}{2} (\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) + \hat{x}(t_2)\hat{x}(t_1)), \quad (1.2.10)$$

удовлетворяет этому условию (Экштейн и Ростокер, 1955).

Как и в классических системах, где корреляционная функция представляет собой среднее от произведения $x(t_1)x(t_2)$, для квантовых систем она равна ожидаемому значению оператора (1.2.10). В общем случае состояние квантовой системы определяется ее матрицей плотности $\hat{\rho}$, а не волновой функцией, как для системы в «чистом» квантовом

состоянии. Математическое ожидание физической величины, описываемой оператором \hat{x} , равно $\langle \hat{x}(t) \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{x}(t))$. Здесь Tr обозначает шпур (сумму диагональных матричных элементов) оператора в угловых скобках. Используя эти обозначения, корреляционную функцию можно записать в виде

$$\psi_x(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \langle \{\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2)\} \rangle. \quad (1.2.11)$$

Из определения $\psi_x(t_1, t_2)$ непосредственно следует, что она — симметричная функция t_1 и t_2 , т. е.

$$\psi_x(t_1, t_2) = \psi_x(t_2, t_1). \quad (1.2.12)$$

Если система стационарна, корреляционная функция зависит только от разности $t_1 - t_2$ (см. выше). В соответствии с формулой (1.2.12) она — четная функция этой разности.

В более общем случае, когда имеется несколько связанных между собой величин x_α ($\alpha = 1, \dots, M$), корреляционные функции образуют матрицу (ср. (1.2.8) и (1.2.11))

$$\psi_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \langle \hat{x}_\alpha(t_1) \hat{x}_\beta(t_2) + \hat{x}_\beta(t_2) \hat{x}_\alpha(t_1) \rangle. \quad (1.2.13)$$

Очевидно, что ее элементы удовлетворяют соотношению

$$\psi_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = \psi_{\beta\alpha}(t_2, t_1), \quad (1.2.14)$$

т. е. в стационарной системе

$$\psi_{\alpha\beta}(t_1 - t_2) = \psi_{\beta\alpha}(t_2 - t_1). \quad (1.2.15)$$

Существует другое, более глубокое и менее очевидное, соотношение между корреляционными функциями $\psi_{\alpha\beta}(t_1, t_2)$. Как и принцип Онзагера симметрии кинетических коэффициентов (Онзагер, 1911), оно вытекает из симметрии уравнений движения любой системы частиц при обращении времени $t \rightarrow -t$. Для системы, находящейся в магнитном поле \mathbf{B} , эта симметрия имеет место, если одновременно изменить направление магнитного поля, т. е. заменить \mathbf{B} на $-\mathbf{B}$. Применительно к стационарной системе это соотношение имеет вид

$$\psi_{\alpha\beta}(t_1 - t_2; \mathbf{B}) = \pm \psi_{\alpha\beta}(t_2 - t_1; -\mathbf{B}). \quad (1.2.16)$$

Знак «плюс» соответствует случаю, когда обе физические величины $x_\alpha(t)$ и $x_\beta(t)$ либо обе инвариантны, либо обе одновременно изменяют знак при обращении времени t . Например, меняет знак при изменении знака времени скорость частиц. Знак «минус» соответствует случаю, когда только одна из величин x_α или x_β меняет знак.

Очевидно, соотношение (1.2.16) упрощается в отсутствие магнитного поля. В таком случае корреляционные функции либо строго четные, либо нечетные функции разности $t_1 - t_2$.

Применяя выражение (1.2.16) к малым временам $t \equiv t_1 - t_2$, можно получить для случая $\mathbf{B} = 0$ два соотношения для положительного и отрицательного знака в правой части (1.2.16) соответственно. В первом случае имеет место

$$\dot{\psi}_{\alpha\beta}(0) = 0, \quad (1.2.17)$$

где $\dot{\psi}$ — производная ψ по отношению к времени, а во втором —

$$\psi_{\alpha\beta}(0) = 0. \quad (1.2.18)$$

Пусть $\psi_{\alpha\beta}(\omega)$ — фурье-образ корреляционной функции стационарной системы

$$\psi_{\alpha\beta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(t_1 - t_2) e^{i\omega(t_1 - t_2)} \psi_{\alpha\beta}(t_1 - t_2). \quad (1.2.19)$$

Поскольку корреляционная функция вещественна, этот фурье-образ удовлетворяет соотношению

$$\psi_{\alpha\beta}^*(\omega) = \psi_{\alpha\beta}(-\omega). \quad (1.2.20)$$

Еще два соотношения для $\psi_{\alpha\beta}(\omega)$ непосредственно вытекают из равенств (1.2.15) и (1.2.16):

$$\psi_{\alpha\beta}(\omega) = \psi_{\beta\alpha}(-\omega) = \psi_{\beta\alpha}^*(\omega), \quad (1.2.21)$$

$$\psi_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) = \pm \psi_{\alpha\beta}(-\omega; -\mathbf{B}) = \pm \psi_{\alpha\beta}^*(\omega; -\mathbf{B}). \quad (1.2.22)$$

Второе из соотношений (1.2.21) следует из (1.2.20). Эти соотношения означают, что матрица $\psi_{\alpha\beta}(\omega)$ эрмитова. Соотношения (1.2.22) означают, что в отсутствие магнитного поля функции $\psi_{\alpha\beta}(\omega)$ либо чисто вещественные, либо чисто мнимые в зависимости от симметрии величин $\hat{x}_\alpha(t)$ и $\hat{x}_\beta(t)$ по отношению к обращению времени (см. выше).

Корреляции флуктуаций в двух разных точках среды \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 пренебрежимо малы, если расстояние $R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ между этими точками намного превосходит некоторую характерную длину, которую называют корреляционной длиной. При $R \gg L_c$ корреляционная функция пропорциональна $\exp(-R/L_c)$. Систему, размеры L которой во много раз больше L_c , можно считать макроскопической. Это определение макроскопической системы отличается от обычного: система с $L \simeq L_c$ или даже с $L \ll L_c$ может состоять из огромного числа атомов и быть макроскопической с точки зрения атомной физики.

Макроскопические системы с размерами $L \gg L_c$ обладают важным свойством: корреляционная функция относительных флуктуаций $\psi_x(t_1, t_2)/\langle x \rangle^2$ обратно пропорциональна объему системы V . Если толь-

ко два или один размер системы много больше L_c , эта корреляционная функция обратно пропорциональна площади сечения A или длине системы L соответственно. Чтобы доказать это утверждение, необходимо мысленно разделить систему на N одинаковых блоков размером $\simeq L_c$ каждый. Тогда флуктуации в разных блоках не коррелированы между собой, и их вклады в полную флуктуацию частично компенсируют друг друга. Если $x(t) = \sum_i \xi_i(t)$, где $\xi_i(t)$ — флуктуирующая величина в i -м блоке, то среднее значение равно $\langle x \rangle = \sum_i \langle \xi_i \rangle = N \langle \xi \rangle$. Флуктуация тоже представляет собой сумму по N блокам $\delta x = \sum_i \delta \xi_i$. Тогда корреляционная функция равна

$$\psi_x(t_1, t_2) = \sum_{ij} \langle \delta \xi_i(t_1) \delta \xi_j(t_2) \rangle = \sum_i \psi_{\xi_i}(t_1, t_2) = N \psi_{\xi}(t_1, t_2). \quad (1.2.23)$$

Перекрестные члены с $i \neq j$ выпадают благодаря отсутствию корреляции между разными блоками. Корреляционная функция относительных флуктуаций

$$\frac{\psi_x(t_1, t_2)}{\langle x \rangle^2} = \frac{1}{N} \frac{\psi_{\xi}(t_1, t_2)}{\langle \xi \rangle^2}, \quad (1.2.24)$$

обратно пропорциональна числу блоков, т.е. V .

В случае флуктуаций сопротивления вычисления проводятся иначе, поскольку полное сопротивление в общем случае не есть сумма сопротивлений всех блоков, но для макроскопического резистора получается такой же результат $\psi_R(t_1, t_2)/R^2 \propto 1/V$.

Обычно как теоретики, так и экспериментаторы изучают только корреляционные функции низшего порядка. Тем не менее, корреляции более высокого порядка могут тоже представлять интерес. Как было указано в разд. 1.1, в случае гауссовского случайного процесса эти корреляции выражаются через парные корреляции, определенные выражениями (1.2.1). В частности, коррелятор четвертого порядка равен

$$\begin{aligned} \langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \delta x(t_3) \delta x(t_4) \rangle_{\text{Gauss}} &= \langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \rangle \langle \delta x(t_3) \delta x(t_4) \rangle + \\ &+ \langle \delta x(t_1) \delta x(t_3) \rangle \langle \delta x(t_2) \delta x(t_4) \rangle + \langle \delta x(t_1) \delta x(t_4) \rangle \langle \delta x(t_2) \delta x(t_3) \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Отклонение от этого соотношения означает, что изучаемый случайный процесс — не гауссовский (см. разд. 1.3).

1.3. Спектральная плотность шума

Чтобы понять смысл спектральной плотности шума и вывести соотношение между этой величиной и корреляционной функцией, рассмотрим принципиальную схему измерения шума (рис. 1.1). Рассмотрим резистор, соединенный с анализатором спектра, который меряет флуктуацию напряжения на резисторе. Анализатор спектра содержит уз-

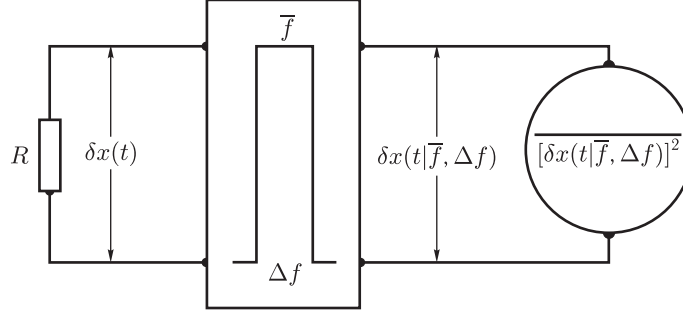


Рис. 1.1. Схема спектрального анализатора для измерения спектральной плотности шума. R — источник зависящих от времени флуктуаций $\delta x(t)$. Прямоугольник в центре обозначает частотный фильтр с шириной полосы пропускания Δf и ее центром на частоте \bar{f} . $\delta x(t|\bar{f}, \Delta f)$ — случайный сигнал на выходе фильтра. $[\delta x(t|\bar{f}, \Delta f)]^2$ — мощность прошедшего через фильтр сигнала

кополосный перестраиваемый фильтр и детектор среднеквадратичного сигнала. В настоящих экспериментах флуктуационный сигнал в дополнение к этому еще усиливается, но здесь мы не будем принимать это во внимание. Предположим, что центр полосы пропускания фильтра находится на частоте \bar{f} , а ее ширина равна Δf . Пусть сигнал флуктуации на входе и сигнал на выходе фильтра равны $\delta x(t)$ и $\delta x(t|\bar{f}, \Delta f)$ соответственно. Последний содержит лишь частоты от $f_1 = \bar{f} - \Delta f/2$ до $f_2 = \bar{f} + \Delta f/2$.

Случайный шумовой сигнал, измеренный в течение долгого времени $t_m \rightarrow \infty$, т. е. входной сигнал анализатора, может быть представлен в виде интеграла Фурье

$$\delta x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta x(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.3.1)$$

Поскольку $\delta x(t)$ — вещественная величина, амплитуды Фурье удовлетворяют соотношению $x(-\omega) = x^*(\omega)$. С учетом этого интеграл Фурье можно переписать как интеграл только по положительным частотам:

$$\delta x(t) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} [\delta x(\omega) e^{-i\omega t} + \delta x^*(\omega) e^{i\omega t}]. \quad (1.3.2)$$

Аналогично, выходной сигнал фильтра может быть записан в виде

$$\delta x(t|\bar{f}, \Delta f) = \int_{\bar{\omega}-\Delta\omega/2}^{\bar{\omega}+\Delta\omega/2} \frac{d\omega'}{2\pi} [\delta x(\omega') e^{-i\omega' t} + \delta x^*(\omega') e^{i\omega' t}]. \quad (1.3.3)$$

Квадратичный сигнал, который называют мощностью шума, зависит от времени и случайным образом флуктуирует вокруг своего среднего значения $[\overline{\delta x(t|\bar{f}, \Delta f)}]^2$, которое не зависит от времени. Предполагая, что усреднение по времени измерения t_m дает такой же результат, что и усреднение по ансамблю одинаковых источников шума и анализаторов спектра (см. разд. 1.4), можно написать:

$$\langle [\delta x(t|\bar{f}, \Delta f)]^2 \rangle = \int_{\bar{\omega}-\Delta\omega/2}^{\bar{\omega}+\Delta\omega/2} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega''}{2\pi} \left\langle \left[\delta x(\omega') e^{-i\omega' t} + \delta x^*(\omega') e^{i\omega' t} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\delta x(\omega'') e^{-i\omega'' t} + \delta x^*(\omega'') e^{i\omega'' t} \right] \right\rangle. \quad (1.3.4)$$

Чтобы определить результат усреднения, представим в таком же виде выражение (1.2.1) для корреляционной функции этой же случайной величины $\delta x(t)$:

$$\psi_x(t_1 - t_2) = \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} \langle \delta x(\omega') \delta x(\omega'') \rangle e^{-i\omega' t_1 - i\omega'' t_2}. \quad (1.3.5)$$

Поскольку корреляционная функция стационарного процесса зависит только от разности $t_1 - t_2$, среднее значение $\langle \delta x(\omega') \delta x(\omega'') \rangle$ должно быть ненулевым только при $\omega' + \omega'' = 0$. Иначе говоря, оно пропорционально дельта-функции $\delta(\omega' + \omega'')$. Очевидно, коэффициент при дельта-функции равен $2\pi\psi_x(\omega')$, где $\psi_x(\omega)$ — фурье-образ корреляционной функции $\psi_x(t_1 - t_2)$. Таким образом,

$$\langle \delta x(\omega') \delta x(\omega'') \rangle = 2\pi \psi_x(\omega') \delta(\omega' + \omega''). \quad (1.3.6)$$

Подставляя равенство (1.3.6) в (1.3.4), получаем:

$$\overline{[\delta x(t|\bar{f}, \Delta f)]^2} = 2 \int_{\bar{f}-\Delta f/2}^{\bar{f}+\Delta f/2} df \psi_x(\omega) \approx S_x(\bar{f}) \Delta f. \quad (1.3.7)$$

Последнее равенство означает, что среднеквадратичный сигнал на выходе достаточно узкополосного фильтра пропорционален его полосе пропускания Δf . Величина $S_x(f)$, введенная в правой части выражения (1.3.7), т. е. среднее от квадрата случайного сигнала на единичную полосу частот, называется спектральной плотностью шума или флуктуаций, или просто спектром флуктуаций. Из равенства (1.3.7) следует, что

$$S_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d(t_1 - t_2) e^{i\omega(t_1 - t_2)} \psi_x(t_1 - t_2) \equiv 2\psi_x(\omega), \quad (1.3.8)$$

то есть спектральная плотность равна удвоенному фурье-образу корреляционной функции. Это соотношение называют теоремой Винера–Хинчина (Винер, 1930; Хинчин, 1934).

Выражение для спектральной плотности можно представить в другом, эквивалентном, виде. Пусть $\delta x(t)$ — запись флуктуации, сделанная в течение достаточно долгого периода времени t_m , скажем, от $t = -t_m/2$ до $t = t_m/2$. Тогда

$$S_x(f) = 2 \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \left| \int_{-t_m/2}^{t_m/2} dt e^{i\omega t} \delta x(t) \right|^2. \quad (1.3.9)$$

В случае нескольких взаимосвязанных, т. е. коррелированных, величин x_α , где $\alpha = 1, \dots, M$, спектральная плотность, очевидно, представляет собой матрицу $S_{\alpha\beta}(f)$, которую можно определить двумя способами. Первый способ основан на обобщении равенства (1.3.9). Пусть $\delta x_\alpha(t)$ и $\delta x_\beta(t)$ — записи двух случайных величин в течение периода t_m . Тогда

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(f) &= \\ &= 2 \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_{-t_m/2}^{t_m/2} dt_1 e^{i\omega t_1} \delta x_\alpha(t_1) \int_{-t_m/2}^{t_m/2} dt_2 e^{-i\omega t_2} \delta x_\beta(t_2) = 2\psi_{\alpha\beta}(\omega). \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

В соответствии с этим определением матрица спектральной плотности представляет собой удвоенный фурье-образ корреляционной матрицы и имеет, очевидно, такие же свойства, как и $\psi_{\alpha\beta}(\omega)$ (см. (1.2.20)–(1.2.22)). Для удобства читателя эти соотношения воспроизведены здесь:

$$S_{\alpha\beta}^*(f) = S_{\alpha\beta}(-f), \quad (1.3.11)$$

$$S_{\alpha\beta}(f) = S_{\beta\alpha}^*(f), \quad (1.3.12)$$

$$S_{\alpha\beta}(f; \mathbf{B}) = \pm S_{\alpha\beta}^*(f; -\mathbf{B}). \quad (1.3.13)$$

Эти спектральные плотности определены на всей оси частот, т. е. и для положительных, и для отрицательных частот. Недиагональные элементы $S_{\alpha\beta}(f)$ в общем случае — комплексные величины.

Спектральную плотность можно определить и посредством соотношения типа (1.3.7) как среднее от произведения сигналов $\delta x_\alpha(\bar{f}, \Delta f)$ и $\delta x_\beta(\bar{f}, \Delta f)$ на выходе фильтров:

$$\bar{S}_{\alpha\beta}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} (\Delta f)^{-1} \overline{\delta x_\alpha(t | \bar{f}, \Delta f) \delta x_\beta(t | \bar{f}, \Delta f)}. \quad (1.3.14)$$

Легко проверить, что $\overline{S}_{\alpha\beta}(f)$ представляет собой симметричную комбинацию

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\alpha\beta}(f) &= \psi_{\alpha\beta}(\omega) + \psi_{\beta\alpha}(\omega) = \frac{1}{2} [S_{\alpha\beta}(f) + S_{\beta\alpha}(f)] = \\ &= \frac{1}{2} [S_{\alpha\beta}(f) + S_{\alpha\beta}(-f)] = \frac{1}{2} [S_{\alpha\beta}(f) + S_{\alpha\beta}^*(f)].\end{aligned}\quad (1.3.15)$$

Хотя такая спектральная плотность $\overline{S}_{\alpha\beta}(f)$ определена для положительных частот, в соответствии с (1.3.15) ее можно считать четной функцией f . Она всегда представляет собой вещественную положительную матрицу, даже в магнитном поле $\mathbf{B} \neq 0$.

Из равенства (1.3.7) следует, что в пределе очень широкой полосы пропускания, которая включает в себя все существенные частоты, среднеквадратичный сигнал представляет собой просто дисперсию флуктуаций

$$\langle (\delta x)^2 \rangle = \psi_x(t_1 - t_2 = 0) = \int_0^{+\infty} df S_x(f).\quad (1.3.16)$$

Это означает, что интеграл от спектральной плотности по всем положительным частотам есть в точности дисперсия шума.

Корреляционная функция $\psi_x(t_1 - t_2)$ и соответствующая спектральная плотность $S_x(f)$ имеют низший порядок. Измерение корреляционных функций и спектральных плотностей более высокого порядка тоже может быть полезно, особенно в случае негауссовских случайных процессов, когда эти функции нельзя выразить через $\psi_x(t_1 - t_2)$ и $S_x(f)$ соответственно. Как уже отмечалось выше, мощность шумового сигнала $[\delta x(t | \bar{f}, \Delta f)]^2$ на выходе фильтра с полосой пропускания Δf с центром на частоте \bar{f} случайным образом флуктуирует во времени вокруг своего среднего значения

$$\overline{[\delta x(t | \bar{f}, \Delta f)]^2} = \int_{\bar{f}-\Delta f/2}^{\bar{f}+\Delta f/2} df S_x(f).\quad (1.3.17)$$

Корреляционную функцию этих флуктуаций $\psi_x^{(2)}(t_1, t_2 | \bar{f}, \Delta f)$ можно назвать вторичной корреляционной функцией, которая в действительности выражается через произведение *четырех* флуктуаций $\delta x(t)$. Соответствующую спектральную плотность

$$\begin{aligned}S_x^{(2)}(f | \bar{f}, \Delta f) &= \\ &= 2 \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \left| \int_{-t_m/2}^{t_m/2} dt e^{i\omega t} \left[[\delta x(t | \bar{f}, \Delta f)]^2 - \overline{[\delta x(t | \bar{f}, \Delta f)]^2} \right] \right|^2\end{aligned}\quad (1.3.18)$$

называют вторичной спектральной плотностью.

Вторичную спектральную плотность можно выразить через корреляционную функцию четвертого порядка $\psi_x^{(4)}$ по формуле

$$\begin{aligned} S_x^{(2)}(f | \bar{f}, \Delta f) &= \\ &= 16\pi \int_{\bar{\omega}-\Delta\omega/2}^{\bar{\omega}+\Delta\omega/2} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^3} \left[\psi_x^{(4)}(\omega, \omega_1, \omega_2) - 2\pi \delta(\omega) \psi_x(\omega_1) \psi_x(\omega_2) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi_x^{(4)}(\omega, \omega_1, \omega_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta d\theta_1 d\theta_2 \exp \left\{ i \left[\omega\theta + \left(\omega_1 - \frac{\omega}{2} \right) \theta_1 + \left(\omega_2 + \frac{\omega}{2} \right) \theta_2 \right] \right\} \times \\ &\quad \times \langle \delta x(t_1) \delta x(t'_1) \delta x(t_2) \delta x(t'_2) \rangle, \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

и введены обозначения $\theta = (t_1 + t'_1 - t_2 - t'_2)/2$, $\theta_1 = t_1 - t'_1$, и $\theta_2 = t_2 - t'_2$.

Если случайный процесс гауссовский, корреляционную функцию четвертого порядка можно выразить через обычные (низшего порядка), расцепляя среднее от произведения четырех корреляторов на произведения средних от всевозможных пар флуктуаций (см. (1.2.25)). Для гауссовского процесса корреляционная функция величин $[\delta x(t | \bar{f}, \Delta f)]^2$ и спектральная плотность $S^{(2)}$ равны

$$\begin{aligned} [\psi_x^{(2)}(t_1, t_2 | \bar{f}, \Delta f)]_{\text{Gauss}} &= 2 \overline{[\delta x(t_1 | \bar{f}, \Delta f) \delta x(t_2 | \bar{f}, \Delta f)]^2}, \\ [S_x^{(2)}(f | \bar{f}, \Delta f)]_{\text{Gauss}} &= 2 \int_{\bar{f}-\Delta f/2+f/2}^{\bar{f}+\Delta f/2-f/2} d\nu S_x \left(\nu + \frac{f}{2} \right) S_x \left(\nu - \frac{f}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

В силу самого смысла вторичного спектра его частоты гораздо ниже, чем нижняя граница интервала частот для первого спектра, т.е. $f/2 \ll f_1 = \bar{f} - \Delta f/2$. Поэтому, как следует из (1.3.21), вторичная спектральная плотность гауссовского случайного процесса не зависит от частоты f , т.е. его спектр всегда «белый». Поэтому если $S^{(2)}(f)$ зависит от f , это прямо указывает на отклонение статистики шума от гауссовской (Weissman, 1988, 1993).

Разность

$$\tilde{S}_x^{(2)}(f | \bar{f}, \Delta f) - 1 \equiv \frac{S_x^{(2)}(f | \bar{f}, \Delta f)}{[S_x^{(2)}(f | \bar{f}, \Delta f)]_{\text{Gauss}}} - 1 \quad (1.3.22)$$

представляет собой меру отклонения случайного процесса от гауссовского. Измерения вторичной спектральной плотности были успешно использованы, чтобы выяснить статистические свойства шума $1/f$ (Weissman, 1988, 1993; см. также разделы 8.2.2 и 8.6).

1.4. Эргодичность и неэргодичность случайных процессов

Каждая случайная величина и каждый случайный процесс характеризуются некоторыми средними величинами. Это моменты (среднее значение, дисперсия, и т. д.), функции распределения, корреляционные функции и т. д. Как мы уже упоминали в разделах 1.1 и 1.2, существуют два метода усреднения случайных величин и получения этих характеристик. В соответствии с первым методом, результаты измерений случайной величины усредняются в течение достаточно долгого времени t_m . Обычно в экспериментах используется именно этот метод. Выражения для среднего значения \bar{x} и для корреляционной функции, полученные этим методом, даются (1.1.18) и (1.2.2) соответственно.

Второй метод заключается в усреднении по ансамблю одинаковых систем, то есть систем с одинаковыми условиями для рассматриваемых случайных процессов и одинаковыми методами их измерения. При этом среднее значение $\langle x \rangle$ и корреляционная функция $\psi_x(t_1, t_2)$ даются, соответственно, выражениями (1.1.19) и (1.2.1).

Дает ли каждая из этих процедур усреднения определенное среднее значение для усредняемой величины? Совпадают ли результаты, полученные этими двумя методами? Системы и случайные процессы, для которых ответы на эти вопросы положительны, называются эргодическими. В противном случае они не эргодичны. Важно понимать, какие физические процессы стоят за эргодичностью многих физических систем и почему другие системы или даже эти же самые системы в других условиях не эргодичны.

Тепловое движение любой статистической системы можно рассматривать как непрерывные переходы между ее микроскопическими состояниями. Если взаимодействие системы с окружающими телами достаточно слабое, каждое из этих микроскопических состояний представляет собой собственное состояние ее гамильтониана. Благодаря слабому взаимодействию системы с другими телами, которые часто имеют гораздо большую теплоемкость и служат термостатом, система может посещать в ходе своего теплового движения состояния с разными энергиями E_n .

Рассмотрим самый простой случай ансамбля одинаковых равновесных систем, каждая из которых взаимодействует с термостатом при абсолютной температуре T . Вероятность того, что система из ансамбля находится в состоянии m , дается хорошо известным распределением

Гиббса

$$w_m = \frac{\exp(-E_m/k_B T)}{\sum_n \exp(-E_n/k_B T)}. \quad (1.4.1)$$

Здесь k_B — постоянная Больцмана. Среднее значение случайной величины x равно

$$\langle x \rangle = \sum_m w_m x_m, \quad (1.4.2)$$

где x_m — значение x в микроскопическом состоянии m , а суммирование производится по всем таким состояниям. Очевидно, вероятность нахождения системы в состояниях, энергия которых отличается от ее средней энергии $\langle E \rangle$ на величину, превышающую флуктуацию энергии, очень мала, и эти микроскопические состояния практически не дают вклада в среднее $\langle x \rangle$. Если пренебречь флуктуациями энергии системы, ее движение можно считать ограниченным поверхностью постоянной энергии в пространстве микроскопических состояний, которое называют фазовым пространством. Тогда усреднение в (1.4.2) производится по микроскопическим состояниям, лежащим на этой поверхности и принадлежащим так называемому микроканоническому ансамблю.

Существование и единственность среднего значения, а также эквивалентность результатов усреднения по времени и по ансамблю ($\bar{x} = \langle x \rangle$) являются следствием определенного предположения. Именно, предполагается, что в течение времени измерения t_m система успевает посетить если не все доступные микроскопические состояния, то достаточно представительную выборку из состояний, которые дают главный вклад в среднее значение. Вследствие этого предположения измерение, сделанное в течение такого промежутка времени t_m , дает с достаточной точностью тот же результат, что и измерение, выполненное в течение бесконечно большого времени $t_m \rightarrow \infty$. Это предположение справедливо, если время t_m много больше, чем характерное время τ прохождения через все представительные состояния. Неравенство

$$t_m \gg \tau \quad (1.4.3)$$

и представляет собой условие эргодичности системы.

Однако существует много систем, для которых поверхность доступных состояний состоит из нескольких или даже большого числа изолированных частей. Эти части разделены, например, высокими энергетическими барьерами, которые невозможно преодолеть ни за какое разумное время эксперимента t_m . Эти изолированные части энергетической поверхности и состояния вблизи них в пределах тепловых флуктуаций энергии называют «долинами» или «компонентами» (Palmer, 1982). Если барьеры, разделяющие долины, достаточно высоки, время переходов из долины в долину τ_{interv} много больше любого мыслимого времени эксперимента t_m . В этом случае система оказывается заключенной в одной долине, в которую она была помеще-

на в ходе процедуры ее приготовления. Измеренное среднее значение случайной величины \bar{x} определяется только этой долиной. Результат усреднения может быть другим, если измерения проводятся на системе, которая оказалась в другой долине. Пусть величина x усредняется по ансамблю, который включает системы в разных долинах, например, по гиббсовскому ансамблю (1.4.1), который учитывает все долины. Если средние значения \bar{x} , измеренные в разных долинах, отличаются друг от друга, среднее значение по ансамблю $\langle x \rangle$, очевидно, тоже отличается от любого частного значения \bar{x} , и эргодичность нарушается.

Простой пример представляет собой ферромагнетик (Palmer, 1982). Хорошо известно, что при температурах T выше критической температуры Кюри T_c он находится в парамагнитном состоянии. Времена τ в этом состоянии достаточно малы, поэтому условие эргодичности легко выполняется. Однако ниже T_c возникает спонтанный магнитный момент \mathbf{M} . В простейшем случае ферромагнетик может находиться в двух состояниях с одинаковой свободной энергией и абсолютным значением $|\mathbf{M}|$, но с противоположными направлениями магнитного момента \mathbf{M} . Для того, чтобы произошел переход из одного состояния в другое, магнетик должна пересечь доменная стенка. Свободная энергия образования доменной стенки пропорциональна ее поверхности. Для того, чтобы повернуть элементарный магнитный момент одного спина, требуется энергия порядка $k_B T_c \sim 10^{-2}$ эВ. Если поверхность домена содержит N спинов, энергия образования доменной стенки порядка $\sim N k_B T_c$. Вероятность такой флуктуации пропорциональна $\exp(-N k_B T_c / k_B T)$, где реальная температура $T < T_c$. Даже для магнита микроскопических размеров ($N \sim 10^3$) время τ_{interv} образования доменной стенки и прохождения барьера между двумя состояниями магнита очень велико и может быть на много порядков больше самого возраста Вселенной. Магнитный момент ферромагнитного образца, измеренный за любое разумное время t_m , равен $\mathbf{M} \neq 0$. Но его среднее значение $\langle \mathbf{M} \rangle$, полученное усреднением по гиббсовскому ансамблю (1.4.1), в котором состояния с \mathbf{M} противоположных знаков имеют одинаковые энергии и потому одинаково вероятны, равно нулю (такое усреднение по ансамблю соответствует $t_m \rightarrow \infty$). Строго говоря, эта система не эргодична. Однако этот вид неэргодичности легко устраняется путем усреднения по ансамблю систем только с одним направлением \mathbf{M} , то есть по «ограниченному ансамблю» (Palmer, 1982).

Другой вид неэргодичности встречается в неупорядоченных макроскопических системах. Хорошо известный пример — стекло, то есть аморфный SiO_2 . Оно находится в метастабильном состоянии и должно кристаллизироваться при низких температурах в соответствии с (1.4.1). Время его перехода в устойчивое кристаллическое состояние конечно, но имеет огромную величину. Тем не менее, для многих видов измерений макроскопический образец стекла может считаться эргодической системой.

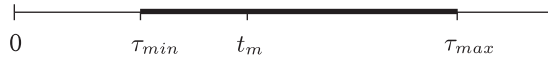


Рис. 1.2. Схема непрерывного спектра времен релаксации τ . Здесь τ_{\min} и τ_{\max} — минимальное и максимальное времена релаксации в системе; t_m — время измерения шума

Еще один пример — спиновые стекла (см. разд. 8.6 и ссылки к гл. 8). Исследования показали, что фазовое пространство этих систем состоит из большого или даже огромного числа долин. В неупорядоченных системах эти долины разделены энергетическими барьерами различной высоты: от низких микроскопических барьеров до барьеров, высота которых представляет собой макроскопические энергии, то есть имеет место иерархия барьеров. Поскольку время перехода из долины в долину τ_{interv} экспоненциально зависит от высоты барьера, возникает очень широкий («экспоненциально широкий») непрерывный спектр времен τ_{interv} , который простирается от некоторого минимального τ_{\min} до τ_{\max} , которое, как и в вышеупомянутых ферромагнетиках, может превосходить возраст Вселенной на много порядков величины (см. рис. 1.2). Обычно условие $t_m \gg \tau_{\min}$ легко выполнить. Однако абсолютно невозможно выполнить условие $t_m \gg \tau_{\max}$. Любое мыслимое время эксперимента t_m оказывается внутри непрерывного спектра времен релаксации. Система равновесна и эргодична по отношению к состояниям, переходы между которыми требуют времени $\tau < t_m$, но не эргодична для состояний с $\tau \gg t_m$. Поскольку существуют такие группы состояний, между которыми не достигнуто равновесие, такие системы, вообще говоря, не только не эргодичны, но и неравновесны. Поэтому некоторые измеряемые величины зависят от длительности процедуры измерения t_m и от времени «ожидания» t_w между установлением условий эксперимента и началом измерений.

Проблема шума $1/f$, или фликкер-шума, наблюдающегося во многих системах, связана с проблемой неэргодичности этих систем (см. гл. 8).

1.5. Случайные импульсы и дробовой шум

Случайные последовательности импульсов, или случайные импульсные процессы, встречаются очень часто. В простейшем случае все импульсы имеют одинаковую форму, амплитуду и длительность, а единственной случайной величиной является момент, в который импульс возникает (рис. 1.3). Один из наиболее известных примеров — ток в анодной цепи электронной лампы. Каждый электрон, выброшенный из катода и движущийся в вакуумном промежутке между катодом и анодом, создает в анодной цепи импульс $i(t)$, где t — время. Интеграл от функции $i(t)$ по времени равен заряду электрона e . Другие примеры — соударения молекул газа со стенками сосуда или соударе-

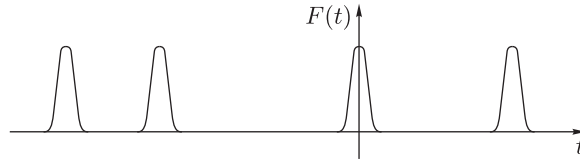


Рис. 1.3. Последовательность случайных импульсов. $F(t)$ — форма импульса

ния молекул жидкости с макроскопической броуновской частицей (см. §§ 1.1, 1.9 и книги Рытова (1976) и Рытова с соавторами, 1987, 1988).

Пусть индекс k служит номером импульса, а t_k — момент начала или максимума импульса k . Каждый импульс можно описать некоторой функцией $F(t - t_k; \mathbf{a}_k)$. В общем случае, когда импульсы не одинаковы, эта функция зависит от конечного набора случайных параметров $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, \dots, a_{km})$, которые можно рассматривать как m -компонентный вектор. Эти параметры включают амплитуду импульса, его длительность и т. д. Предположим, что измеряемая величина представляет собой сумму

$$x(t) = \sum_k F(t - t_k; \mathbf{a}_k). \quad (1.5.1)$$

Обычно предполагают, что случайные величины t_k и \mathbf{a}_k имеют следующие статистические свойства:

- 1) случайные величины t_k и \mathbf{a}_k статистически независимы для разных k и их функции распределения не зависят от k ;
- 2) вероятность попадания момента t_k в промежуток между t и $t + dt$ пропорциональна dt , независима от t и равна $n_1 dt$, где n_1 — постоянная средняя частота импульсов.

Предположим, что за случайным импульсным процессом наблюдают в течение времени t_m . Число импульсов за это время n есть случайная величина, которая флуктуирует вокруг среднего значения $\bar{n} = n_1 t_m$. Разобьем весь ансамбль одинаковых систем со случайным импульсным процессом на подансамбли, в которых за время наблюдения возникает определенное число $n = 0, 1, \dots$ импульсов. Поскольку импульсы независимы, доля систем с определенным n дается распределением Пуассона (1.1.17). Даже при фиксированном числе импульсов n , когда сумма в (1.5.1) содержит ровно n членов, переменная x — случайная величина, поскольку времена возникновения импульсов случайны. Согласно уравнению (1.1.11) ее характеристическая функция есть произведение n характеристических функций

$$\phi_{x_k}(u) = \overline{\exp(iux_k)} = \int d\mathbf{a} w_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \int_{-t_m/2}^{t_m/2} \frac{dt_k}{t_m} \exp[iuF(t - t_k; \mathbf{a})]. \quad (1.5.2)$$

Здесь $w_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})$ — функция плотности вероятности параметров импульсов \mathbf{a} . Второй интеграл в (1.5.2) берется по моменту возникновения

импульса t_k . Значение этого интеграла не зависит ни от числа импульсов k , ни от времени t .

И характеристическая функция $\phi_x(u|n) = [\phi_{x_k}(u)]^n$, и соответствующая плотность вероятности $w(x|n)$ — *условные*. Они относятся к подансамблю (см. выше) с определенным числом импульсов, возникших за промежутки от $-t_m/2$ до $t_m/2$. Полная, т. е. безусловная характеристическая функция получается усреднением по всем подансамблям с помощью распределения Пуассона (1.1.17) для числа импульсов, возникших за время t_m . Результат имеет вид

$$\phi_x(u) = \exp \left\{ n_1 \int d\mathbf{a} w_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta [\exp(iuF(\theta, \mathbf{a})) - 1] \right\}. \quad (1.5.3)$$

Здесь $\theta = t - t'$. Замена пределов интегрирования $t \pm t_m/2$ на $\pm\infty$ возможна благодаря достаточно быстрому спаду импульса $F(t - t_k; \mathbf{a})$ на краях.

Среднее значение и дисперсию можно выразить через характеристическую функцию (1.5.3) как

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x w(x) = \left(\frac{\partial \phi_x(u)}{\partial iu} \right)_{u=0} = n_1 \int d\mathbf{a} w_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta F(\theta, \mathbf{a}), \\ \langle (\delta x)^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \left(\frac{\partial^2 \ln \phi_x(u)}{\partial (iu)^2} \right)_{u=0} = n_1 \int d\mathbf{a} w_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta F^2(\theta, \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Если все импульсы одинаковы, интегрирование по \mathbf{a} отсутствует. Для этого случая уравнение (1.5.4) было получено Кэмпбеллом (Campbell, 1909).

Корреляционную функцию стационарного импульсного случайного процесса можно получить таким же способом, как и характеристическую функцию (1.5.3):

$$\begin{aligned} \psi_x(t_1 - t_2) &= \langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \rangle = \\ &= n_1 \int d\mathbf{a} w_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta F(\theta; \mathbf{a}) F(\theta + t_1 - t_2; \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Очевидно, что при $t_1 \rightarrow t_2$ это уравнение сводится к (1.5.4) для дисперсии шума.

Согласно теореме Винера–Хинчина (1.3.8) соответствующая спектральная плотность равна

$$S_x(f) = 2n_1 \int d\mathbf{a} w_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) |F(\omega; \mathbf{a})|^2, \quad (1.5.6)$$