

М.А. Головкин, В.А. Головкин,
В.М. Калявкин

ВОПРОСЫ
ВИХРЕВОЙ
ГИДРОМЕХАНИКИ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 532.527
ББК 22.253
Г 61



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 09-01-07063

Головкин М. А., Головкин В. А., Калявкин В. М. **Вопросы вихревой гидромеханики** / Под ред. Головкина М. А.. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 264 с. — ISBN 978-5-9221-1154-6.

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований различных проблем вихревых и отрывных течений несжимаемой жидкости. Для идеальной жидкости выведены условия, которые необходимо выполнять на линии схода свободных поверхностей тангенциального разрыва скоростей с твердого тела при его произвольном нестационарном движении, и построены оригинальные методы расчета обтекания таких тел, дающие хорошее схождение с экспериментальными данными. Показана аналогия между силами, действующими на тело в идеальной несжимаемой жидкости и в стационарном магнитном или квазистационарном электромагнитном поле. Для широкого класса вихревых нестационарных вязких и невязких течений найдены мгновенные эквипотенциальные поверхности, вдоль которых функция Бернулли является постоянной. Приведены методы и результаты физических исследований в гидро- и аэродинамических трубах нестационарного отрывного вихревого обтекания различных канонических тел.

Научным работникам и инженерам, работающим в области теоретической и прикладной аэрогидромеханики.

ГОЛОВКИН Михаил Алексеевич
ГОЛОВКИН Владимир Алексеевич
КАЛЯВКИН Владимир Михайлович

ВОПРОСЫ ВИХРЕВОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Редактор *А.П. Скороход*
Оригинал-макет: *Е.В. Чернина*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина, Н.В. Мазалева*

Подписано в печать . Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21,45. Уч.-изд. л. 22,0. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ГУП
«ИПК Чувашия», 428019
г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13

© ФИЗМАТЛИТ, 2009
© М. А. Головкин, В. А. Головкин,
В. М. Калявкин, 2009

ISBN 978-5-9221-1154-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
Глава 1. Некоторые аналитические результаты для вихревых течений идеальной жидкости	22
§ 1.1. Условия на линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела при его произвольном нестационарном движении в идеальной несжимаемой жидкости	23
1.1.1. Общая постановка задачи и некоторые исходные соотношения	23
1.1.2. Скорость перемещения линии схода свободной вихревой пелены	25
1.1.3. Условия для гидродинамических особенностей на линии схода свободной вихревой пелены	29
1.1.4. Скорость сноса свободной вихревой пелены с поверхности тела	32
1.1.5. Сопряжение свободного вихревого следа с поверхностью тела	35
1.1.6. Плоские и осесимметричные течения	38
§ 1.2. Взаимосвязь объемных и поверхностных вихреобразований и их потенциалов в гидромеханике	39
1.2.1. Некоторые следствия из теоремы Остроградского–Гаусса	39
1.2.2. Связь векторного и скалярного потенциалов для трехмерного объемного распределения завихренности	42
1.2.3. Случай трехмерного объемного и поверхностного распределения завихренности	45
1.2.4. Двумерные течения	52
§ 1.3. Свойства интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя в окрестности особых линий замкнутой поверхности и их решение	56
1.3.1. Предельные решения уравнений по обе стороны от особой линии	56
1.3.2. Разрывы в решении уравнений	59
1.3.3. Предельное решение и разрывы в окрестности особых точек в плоском случае	59
1.3.4. Методы решения уравнений и аналитическая форма представления плотности потенциала	60

Глава 2. Методы расчета отрывного нестационарного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущихся тел	66
§ 2.1. Метод расчета плоских несжимаемых нестационарных вихревых течений	67
2.1.1. Исходные соотношения	67
2.1.2. Уравнения, определяющие потенциал возмущенных скоростей	72
2.1.3. Деформация вихревого следа	75
2.1.4. Давление на поверхности	76
§ 2.2. Численное решение плоских задач	77
2.2.1. Основные соотношения	77
2.2.2. Численная схематизация метода	79
2.2.3. Результаты расчетов	81
§ 2.3. Метод решения задачи об отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущегося трехмерного тела	95
2.3.1. Постановка задачи и вводные замечания	95
2.3.2. Выбор формы представления потенциала возмущенных скоростей	97
2.3.3. Преобразование уравнения для потенциала возмущенных скоростей	103
2.3.4. Решение полученного уравнения для плотности потенциала двойного слоя и его свойства	107
2.3.5. Давление жидкости на поверхности тела. Сила и момент, действующие на тело	111
2.3.6. Уравнения движения свободного вихревого следа	114
§ 2.4. Применение метода теории потенциала при численных расчетах трехмерных отрывных нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости	118
2.4.1. Численное решение уравнения относительно плотности потенциала двойного слоя	118
2.4.2. О вычислении телесных углов	127
2.4.3. Давление жидкости на поверхности тела	129
2.4.4. О расчете движения следа	130
2.4.5. Краткое описание программ расчета отрывного нестационарного обтекания тел	133
2.4.6. Некоторые результаты расчетов осесимметричных течений	135
§ 2.5. Распространение метода теории потенциала на случай обтекания тел произвольным (вихревым нестационарным) внешним потоком идеальной несжимаемой жидкости	143
2.5.1. Исходные соотношения	143
2.5.2. Метод решения задачи	144
2.5.3. Давление жидкости на поверхности тела	146

Глава 3. О некоторых свойствах уравнений Навье–Стокса и Эйлера для вихревых течений и вопросы силового подобия между гидродинамическими и электромагнитными полями	147
§ 3.1. Ортогональные векторные преобразования и фундаментальные свойства уравнений Навье–Стокса и Эйлера для вихревых течений несжимаемой жидкости	148
3.1.1. Исходные уравнения и их преобразование	148
3.1.2. Свойства уравнений плоского и осесимметричного течений	152
3.1.3. Свойства уравнений пространственного течения	156
3.1.4. Результирующая сил давления	161
§ 3.2. Гидродинамические и электромагнитные поля — общность и различие в силовых воздействиях и формулы для главных векторов силы и момента в случае объемного и поверхностного распределений завихренности	165
3.2.1. Некоторые исходные соотношения и замечания	165
3.2.2. Уравнения движения жидкости. Тензоры напряжений и энергия. Силы внутри жидкости	167
3.2.3. Соотношения для электромагнитного поля. Энергия и объемные силы. Тензоры напряжений	170
3.2.4. Гидродинамические задачи и их электромагнитные аналоги	174
3.2.5. Силы и моменты, действующие на тела	178
3.2.6. Формулы для главных векторов силы и момента в случае объемного и поверхностного распределения завихренности	181
Глава 4. Экспериментальные методы и результаты исследований вихревого и отрывного обтекания тел в гидро- и аэродинамических трубах	188
§ 4.1. Оптическая визуализация вихревых и отрывных течений в гидродинамической трубе	190
4.1.1. Принцип действия оптического визуализирующего устройства в гидродинамической трубе	190
4.1.2. Некоторые особенности методики применения визуализирующего оптического устройства в гидродинамической трубе	192
4.1.3. Обтекание круглого цилиндра	196
4.1.4. Обтекание аэродинамического профиля на стационарных и нестационарных режимах	208
4.1.5. Взаимодействие аэродинамического профиля с вихревым следом от колеблющегося по углу атаки профиля при постоянной скорости набегающего потока	214
4.1.6. Обтекание полуцилиндра	215
4.1.7. Обтекание правильной треугольной призмы	216
4.1.8. Течение в окрестности концевой части модели лопасти винта	218
4.1.9. Заключительные замечания и выводы	218
§ 4.2. Отрывное обтекание усеченных эллипсоидов вращения с плоской донной поверхностью	220
4.2.1. Методика проведения исследований	220

4.2.2. Обтекание усеченного эллипсоида с косым донным срезом	221
4.2.3. Режимы течения за полуэллипсоидом с прямым донным срезом	225
§ 4.3. Нестационарные и гистерезисные явления в положении областей «взрыва» вихрей, образующихся в окрестности передних кромок треугольного крыла	226
4.3.1. Методика исследований и оборудование	226
4.3.2. Стационарные режимы обтекания крыла	227
4.3.3. Аперiodические и периодические законы перехода с одного постоянно- го значения угла атаки на другой	229
4.3.4. Влияние изменения скорости потока	236
4.3.5. Влияние одновременного изменения угла атаки и скорости набегающего потока	236
4.3.6. Влияние нестационарного изменения угла скольжения	238
4.3.7. Основные результаты исследований и выводы	240
§ 4.4. Отрывное обтекание прямого крыла при стационарных и квазистационар- ных внешних условиях	242
4.4.1. Методы проведения исследований и обработки результатов. Экспери- ментальное оборудование	242
4.4.2. Средняя по времени структура течения вблизи поверхности крыла . . .	243
4.4.3. Визуализация нестационарного течения в окрестности крыла	246
4.4.4. Средние по времени компоненты сил и моментов, действующих на крыло	249
4.4.5. Нестационарные силы и моменты, действующие на крыло	251
Список литературы	253
Annotation.	262
Contents	263

Предисловие

Представленная вниманию читателей книга посвящена весьма сложному для изучения, но активно развивающемуся в настоящее время и востребованному в современной практике разделу аэрогидромеханики — вихревым и отрывным течениям. В ней изложен ряд оригинальных теоретических и экспериментальных методов и результатов, носящих фундаментальный характер, которые ранее авторами были разрозненно опубликованы в отдельных журнальных статьях. Теоретические разделы книги отличаются математической строгостью, ясностью и законченностью изложения. Для экспериментальных разделов характерно проникновение в физическую сущность явлений, происходящих при вихревом и отрывном обтекании.

Значительная часть книги уделена исследованиям нестационарного или отрывного обтекания тел на базе модели идеальной несжимаемой жидкости со сходом свободной вихревой пелены в виде поверхности разрыва тангенциальных составляющих скоростей. Весьма важными для построения методов расчета и понимания физики отрыва являются представленные здесь аналитические результаты — условия на линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела при его произвольном нестационарном движении. Эти условия получены для любых задних кромок тела и включают в себя выполнение теоремы Томсона о сохранении циркуляции. Поскольку они выведены из требований ограниченности и непрерывности скорости, то в этом смысле они являются, по сути, условиями типа Чаплыгина–Жуковского для случая плоского или пространственного нестационарного обтекания. Построены оригинальные методы расчета обтекания произвольно движущихся тел, позволившие свести условие непротекания тела к решению интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя, для которых имеет место единственность решения. Исследованы свойства полученных уравнений в окрестности линии схода потока с поверхности тела. Проведенные численные расчеты отрывного обтекания плоских и осесимметричных тел показывают их хорошее соответствие экспериментальным данным.

Для широкого класса вихревых нестационарных течений вязкой или идеальной жидкости найдены мгновенные эквипотенциальные поверхности, вдоль которых функция Бернулли является постоянной, что соответствует, по сути, уравнению Бернулли для таких течений. Показана аналогия между силами и моментами, действующими на тело, обтекаемое стационарным потоком идеальной жидкости или помещенное в стационарное магнитное, а также квазистационарное электромагнитное поля.

В экспериментальном разделе книги с помощью уникального метода, позволяющего визуализировать неоднородности, обусловленные изменением плотности среды (воды) на $\sim 10^{-8}$ от исходной величины, приведены весьма

интересные материалы по исследованию структуры отрыва на плоских телах типа кругового цилиндра, полуцилиндра, клина, а также по взаимодействию аэродинамического профиля с вихревым следом, идущим от расположенного перед ним колеблющимся другим профилем. Приведены результаты исследований различными методами в гидро- и аэродинамических трубах вихревого и отрывного обтекания полуэллипсоидов вращения, треугольного и прямоугольного крыльев и гистерезисных явлений в их вихревых структурах и аэродинамических характеристиках.

Настоящее издание будет полезно для широкого круга специалистов в области теоретической и прикладной аэрогидродинамики, а также для аспирантов и студентов, обучающихся по соответствующим специальностям.

Академик РАН,
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой
«Аэродинамика летательных аппаратов»
Московского авиационного института
(технического университета)
Ю.А. Рыжов

Введение

Вихри и вихревые отрывные течения, как правило, определяют природу сил, действующих на тело, обтекаемое потоком жидкости. По образному выражению Кюхемана [165], вихри это — «мышцы и жилы гидродинамики». Вихревая природа подъемной силы была вскрыта Н. Е. Жуковским [72] более столетия назад. Изучение же вихревых движений жидкости было начато основополагающей работой Гельмгольца [161] и имеет почти стопятидесятилетнюю историю. Говоря о вихревых движениях, нельзя не упомянуть знаменитую теорему Томсона (лорда Кельвина) [26] о постоянстве циркуляции. Значительный вклад в развитие теории вихревых движений внес А. Пуанкаре, недавно переиздана на русском языке его замечательная монография «Теория вихрей» [120]. Весьма интересна вышедшая на русском языке в 2000 году книга Ф. Дж. Сэффмэна «Динамика вихрей» [133], которая систематизирует знания в области вихревых движений в идеальной жидкости.

Несмотря на давнюю историю развития работ в этом направлении, в гидродинамике идеальной и вязкой несжимаемой жидкости обнаруживаются новые аналитические результаты. Ряд важных результатов по исследованию вихрей и вихревых движений жидкости содержится в вышедших сравнительно недавно книгах Алексеенко С. В., Куйбина П. А., Окулова В. Л. [1], Борисова А. В., Мамаева И. С., Соколовского М. А. [22], Гайфуллина А. М. [33], Петрова А. С. [111], Андропова П. Р., Гувернюка С. В., Дынниковой Г. Я. [2].

Современное развитие техники требует решения ряда практически важных задач, приводящих к необходимости исследования вихревых и отрывных течений жидкости. Многие режимы полета современных летательных аппаратов сопровождаются отрывным обтеканием различных их элементов: крыла и фюзеляжа самолета или вертолета, лопастей несущего винта вертолета, корпуса или головной части ракеты и так далее.

Отрывному обтеканию, зачастую, сопутствуют вибрации, обусловленные отрывом от поверхности тела вихрей с определенной частотой, что может приводить к возникновению автоколебаний конструкций. В то же время, вихревые отрывные явления используются в технике для получения положительных эффектов: так, например, крылья многих современных маневренных самолетов, которые проектируются с целью их эффективной работы на больших углах атаки в условиях отрывного обтекания, имеют в центропланной части, так называемые, наплывы, выполняющие роль генераторов отрывных стационарных вихрей, способствующих достижению больших значений коэффициента подъемной силы крыла. Выход маневренных самолетов на сверхбольшие углы атаки дает им существенные преимущества в воздушном бою. Эти режимы сопровождаются полностью отрывным обтеканием элементов самолета, что еще более остро ставит задачу исследований вихревых и отрывных течений и целенаправленного управления ими или их использования

в аэродинамических компоновках. Важность вихревых и отрывных течений для техники и, в то же время, трудность их теоретических и расчетных исследований привели к широкому развитию экспериментальных исследований этих течений. Задача исследования вихревого отрывного обтекания тел еще более осложняется в случае, когда тело совершает произвольное (как поступательное, так и вращательное) неустановившееся движение, как это имеет место, например, на лопастях несущего винта вертолета, на режимах штопора самолета, взлета и посадки летательных аппаратов и на режимах выполнения ими маневров. В случае же, когда внешнее течение является вихревым (как, например, обтекание фюзеляжа самолета или вертолета осредненным вихревым потоком от винта), задача исследования становится еще более сложной. Необходимость исследования таких течений связана не только с определением аэродинамических нагрузок, действующих на тело, но и с вопросами выбора рациональных аэродинамических компоновок летательных аппаратов и других объектов техники с учетом условий работы их отдельных элементов и взаимной интерференции этих элементов в условиях такого обтекания. К этим вопросам вплотную прилегал задача выработки методов целенаправленного воздействия на вихревые и отрывные течения или их использования с целью улучшения аэродинамических характеристик летательных аппаратов.

В книге рассмотрены некоторые аналитические результаты в вихревой гидромеханике идеальной и вязкой жидкости, которые, насколько известно авторам, в литературе не изложены. Построены методы решения задач о вихревом отрывном нестационарном обтекании тел на базе модели идеальной несжимаемой жидкости. Проведены отдельные численные расчеты, показавшие хорошее соответствие с имеющимися точными и экспериментальными данными. Приведены результаты исследований явлений, происходящих при вихревом отрывном обтекании канонических тел, экспериментальными методами.

Обратимся к главе 1, где рассматриваются результаты теоретических исследований идеальной несжимаемой жидкости.

В §1.1 этой главы выведены условия на линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела при его произвольном нестационарном движении в идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что скорость перемещения линии сопряжения свободной вихревой поверхности с твердой трехмерной поверхностью совпадает со скоростью последней частицы жидкости, расположенной между этими поверхностями. Таким образом, получено распространение на трехмерный случай известного для двумерного течения результата, используемого в расчетах С.Н. Постоловским, К.П. Ильичевым [115–118] и указанного также А.А. Никольским в курсе лекций «Вихревые отрывные течения идеальной жидкости», прочитанном им в Московском физико-техническом институте в 1970 году. Далее в этом параграфе для различных типов задних кромок (угловая, гладкая, точка возврата) выведены условия сопряжения свободной вихревой поверхности с поверхностью тела, соотношения для гидродинамических особенностей (векторов завихренности и циркуляций) и скорости сноса свободной вихревой поверхности с поверхности тела, которые необходимо выполнять при двумерном и пространственном

нестационарном обтекании произвольных тел. Эти результаты включают в себя выполнение теоремы Томсона о постоянстве циркуляции, а поскольку они получены из требований ограниченности и непрерывности скорости, то в этом смысле они являются, по сути, условиями типа Чаплыгина–Жуковского для случая плоского или пространственного нестационарного обтекания. Из работ, затрагивающих близкие к этим, следует указать работу К. В. Манглера и Дж. Смита [167], где был проведен анализ сопряжения поверхности вихревого следа с поверхностью крыла конечного размаха только с угловой задней кромкой и лишь при стационарном обтекании. В работах С. Н. Постоловского [115–118] и упомянутом выше курсе лекций А. А. Никольского такое соотношение для скорости сноса линии тангенциального разрыва с поверхности тела было получено только для двумерного нестационарного течения. Интересно отметить, что в работе С. Н. Девнина [66] указано соотношение для изменения циркуляции в точке отрыва в случае двумерного течения с учетом вязкости, аналогичное соответствующим соотношениям, которые следуют из указанных работ С. Н. Постоловского и А. А. Никольского и из полученных авторами результатов исследований идеальной жидкости. Таким образом, представленные в §1.1 результаты обобщают на случай произвольного нестационарного движения тела в идеальной несжимаемой жидкости условия на линии схода свободной вихревой пелены. Этот параграф написан на основе исследований, изложенных в работах В. А. Головкина, М. А. Головкина [38, 39, 46, 61]. Здесь не рассматриваются вопросы формы свободной вихревой поверхности в локальной окрестности линии отрыва потока. Для плоских течений такие локальные решения для различных типов задних кромок построены Р. Ц. Аккербергом [148] и С. К. Бетяевым [16, 17], а для пространственных – В. А. Маланичевым [95].

В книге Дж. Бетчелора [26] введено специальное выражение для векторного потенциала от объемного (необязательно постоянного по объему) и поверхностного распределения завихренности, однако подробное исследование такого потенциала не проведено. Поэтому в §1.2 исследована взаимосвязь объемных и поверхностных вихреобразований и их потенциалов в механике идеальной жидкости. Выведены условия замкнутости поверхностных и объемных вихревых образований. Проведен анализ свойств скалярного и векторного потенциалов от вихрей, распределенных по объему или поверхности. Получена интегральная связь между скалярным и векторным потенциалом для вихревого объема, когда нормальная компонента завихренности на границе этого объема равна нулю, и гидродинамическим импульсом, введенным в книгах Дж. Бетчелора [26] и Ф. Дж. Сэффмэна [133]. Дано гидродинамическое обоснование вихревой модели в виде объемных (в частности, постоянной интенсивности) и поверхностных вихрей, которая, в частности, может использоваться при моделировании вращательного движения трехмерного тела. Получено выражение для векторного потенциала от системы объемных и поверхностных вихрей, удовлетворяющих условиям замкнутости, в виде интеграла по объему, аналогичное формуле Био–Савара для скорости от завихренной области (выражение же для скорости при этом аналогично выражению для вектора завихренности). Показано, что скалярный потенциал на внешней

поверхности от такого распределения завихренности постоянен вдоль этой поверхности. Этот параграф основан на работе [60] М. А. Головкина.

В § 1.3 проведено исследование свойств интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала двойного слоя в окрестности особых линий замкнутой поверхности. Математический аппарат решения уравнений Фредгольма второго рода достаточно глубоко разработан и излагается в целом ряде учебников по математической физике. Исследования этих уравнений проведено также в монографиях С. Г. Михлина [96], И. Г. Петровского [112], М. Л. Краснова [81], П. П. Забрейко и др. [73], а также в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [76]. Однако в указанных работах уравнения Фредгольма второго рода рассматриваются в достаточно общем виде и не исследована специфика их решений относительно плотности потенциала двойного слоя (или плотности диполей) вблизи особых линий поверхности (например, ребер), когда ядро этих уравнений является разрывным по переменной интегрирования, и при наличии при этом разрыва правой части уравнений. Ниже показано, что задача отрывного нестационарного обтекания произвольно движущихся тел в идеальной несжимаемой жидкости со сходом с поверхности тела свободной вихревой поверхности сводится к решению уравнений Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала двойного слоя, или, иначе, к решению уравнений теории потенциала. В связи с численной реализацией этих уравнений возник ряд вопросов о поведении их решений вблизи особых линий (или точек – в двумерном случае) поверхности, когда правая часть этих уравнений также может быть разрывной, а также о повышении точности вычислений в окрестности таких особых линий и точек. Поэтому в § 1.3 на основе простого геометрического представления ядра уравнения показано, что предельные решения такого уравнения по обе стороны от особой линии могут быть выражены через предельные значения правых частей уравнения по обе стороны от этой линии, угол между участками поверхности, прилегающими к этой особой линии, и интеграл по поверхности, вычисленный в точке, принадлежащей особой линии. Исследован характер разрывов в решении таких уравнений в окрестности особых линий. Это позволяет повысить точность вычислений при численной реализации решений таких уравнений. Эти результаты базируются на статьях М. А. Головкина [46], [48], [62]. Кроме того, в этом параграфе кратко изложены прямой и итерационные методы решения таких уравнений, в том числе показана возможность представления решений в аналитическом виде через резольвенту уравнения на основе результатов, представленных, например, в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [76].

Обратимся к главе 2, где в § 2.1, § 2.3 построены методы решения задачи об отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущегося двумерного или трехмерного тела со сходом с него свободной вихревой поверхности. Коснемся истории этой проблемы. Вопрос о возможности существования течений идеальной жидкости при наличии в ней разрывов тангенциальных компонентов скоростей рассматривал еще Л. Прандтль [171]. Такие течения для класса плоских и автомодельных трехмерных течений рассматривались также в работах А. А. Никольского [103–105] и его школы [16, 17, 129, 130] (С. К. Бетяев, Г. Г. Судаков, С. Б. Захаров и др.). В ра-

ботах С. Н. Постоловского и К. П. Ильичева [115–118] была решена задача о расчете двумерного отрывного течения с перемещающейся вдоль контура точкой отрыва потока. В работах школы С. М. Белоцерковского, М. И. Ништа и др. [6, 10–14] на основе дискретной вихревой модели численно решено множество различных задач: об отрывном обтекании абсолютно тонкой пластины бесконечного размаха, круглой пластины, об отрывном обтекании тонкого крыла произвольной формы в плане, различных аэродинамических компоновок летательных аппаратов и т. д. В работе Г. А. Павловца [107] приведено доказательство отсутствия относительного течения жидкости в области, ограниченной твердой непроницаемой вихревой поверхностью, в случае стационарного обтекания плоских и трехмерных тел поступательным потоком, и получены соотношения для расчета такого обтекания при наличии подъемной силы. В работе Р. Джоджодихарджо и С. Виднала [151] задача о произвольном циркуляционном безотрывном обтекании крыла конечной толщины сведена к решению уравнения I-го рода относительно плотности диполей, а в работе Л. Морино и Ч. Ч. Куо [168] в линеаризованной постановке рассмотрена задача об обтекании крыла на основе применения формулы Грина. В книге С. М. Белоцерковского, В. Н. Котовского, М. И. Ништа и Р. М. Федорова [15] развит подход к моделированию двумерного обтекания объемных тел методом дискретных вихрей, при этом положение точки отрыва ищется из решения задачи пограничного слоя. В работе И. К. Лифанова [91] развита теория уравнений, которые решаются в упомянутой выше книге [15] и которые имеют сильные сингулярные особенности.

В отличие от этого в § 2.1, § 2.3 этой главы рассмотрены плоская и трехмерная нелинейные задачи о произвольном, в том числе вращательном неустановившемся движении тела в идеальной несжимаемой жидкости со сходом с его поверхности свободного вихревого следа в виде поверхности тангенциального разрыва скоростей. Выбрана форма представления потенциала возмущенных скоростей в виде потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности тела и свободного следа, и известных в каждый фиксированный момент времени объемных и поверхностных вихрей, замыкающихся в трехмерном случае между собой, определяемых вращательной скоростью движения тела. Показано, что такая форма представления потенциала позволяет свести условие непроницаемости внешней поверхности тела к внутренней задаче Неймана, а затем, в силу теоремы единственности для внутренней задачи Неймана, к задаче Дирихле, при этом внутри тела как поступательная, так и вращательная компоненты относительной скорости отсутствуют. Из задачи Дирихле получено интегральное уравнение для плотности потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности тела и следа, которое необходимо решать в каждый фиксированный момент времени. Проведено исследование свойств полученного интегрального уравнения и его производных по поверхностным координатам в местах сопряжения свободного следа с поверхностью тела. Показано, что разрывы в плотности потенциала двойного слоя и в его производных от свободного следа «передаются» на поверхность тела. Полученное интегральное уравнение сведено к решению хорошо обследованных интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя, для которых имеет место

единственность решения. Приведены методы решения полученных уравнений. Показано, что давление на поверхности тела выражается непосредственно через гидродинамические особенности. Эти параграфы основаны на работах В. А. Головкина, М. А. Головкина [38, 39, 46].

В § 2.2, § 2.4 изложены численные методы решения плоской и трехмерной нелинейных нестационарных задач отрывного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью на примере тел с фиксированной линией схода потока с поверхности тела. При численной реализации решения применен прямой метод типа метода Крылова–Боголюбова, а в силу того, что задача непротекания сведена к решению хорошо обследованных уравнений Фредгольма второго рода, – также итерационный метод, изложенные в книге Л. В. Канторовича, В. И. Крылова [76]. При этом отмечается, что в любой неособой точке поверхности тела после численного нахождения решения может быть построено непрерывное на поверхности приближенное решение уравнения. Указаны способы нахождения неизвестной плотности диполей в следе в каждый фиксированный момент времени. Так как задача о движении тангенциального разрыва принадлежит к классу некорректных задач, то в работе В. Ф. Молчанова [97], аналогично работе Л. С. Франка и Л. А. Чудова [139], был предложен метод регуляризации для построения устойчивых численных схем расчета движения тангенциального разрыва в плоских автотельных течениях. В данных параграфах этот алгоритм был несколько модифицирован и применен для расчета движения свободного вихревого следа в двумерных и осесимметричных отрывных течениях. Он позволяет, по крайней мере, в ближнем следе получать достаточно гладкие решения для геометрии поверхности тангенциального разрыва скоростей. Здесь дается также краткое описание программ расчета. Приведены примеры расчета двумерного нестационарного и отрывного обтекания аэродинамического профиля и тел типа полукруга, полуэллипса и клина, а также осесимметричного обтекания эллипсоида, полуэллипсоида, конуса и комбинации «конус-полубесконечный цилиндр». Показано хорошее схождение результатов расчета с известным точным решением и экспериментальными данными. Эти параграфы основываются на работах В. А. Головкина и М. А. Головкина [39, 43, 47, 156].

В § 2.5 метод, развитый в § 2.3 для расчета обтекания тел внешним потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, распространен на случай обтекания тел внешним произвольным вихревым нестационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости, поскольку ряд практически важных задач аэродинамики требует развития методов расчета обтекания тел непотенциальным, вихревым, внешним потоком жидкости. Примерами таких задач могут служить обтекание корпуса самолета или вертолета, находящегося в струе от винта, некоторого тела, помещенного в вихревой след от другого тела и т.д. В работах С. Д. Вильховченко [30], Ю. Л. Якимова [145], А. Г. Ярмицкого [146] для двумерных течений идеальной несжимаемой жидкости были получены решения задач обтекания тел, главным образом – кругового цилиндра, некоторыми вихревыми потоками специального вида. В работе А. Г. Ярмицкого [147] получена обобщенная формула для подъемной силы цилиндра, обтекаемого произвольным потоком идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого на контуре может быть представлена в виде

разложения в ряд Фурье по азимутальному углу. Полученный в этой статье результат обобщает результаты указанных выше работ. В [147] также приводится подробный обзор литературы по исследованию обтекания тел произвольным плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости. Позже появилась статья Г. Я. Дынниковой [70], которая обобщает результаты, полученные в указанных выше работах, и в которой получена формула для силы, действующей на тело при нестационарном вихревом отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью. В отличие от указанных работ в §2.5 условие непротекания поверхности сведено к уравнению для потенциала возмущенных скоростей, которое сводится к уравнениям Фредгольма второго рода относительно плотности диполей, распределенных по поверхности тела, аналогично §2.3. Из уравнения движения найдено выражение для давления на внешней поверхности тела. Этот параграф основывается на работах М. А. Головкина [50, 157].

В главе 3 проведено исследование свойств уравнений Навье–Стокса и Эйлера и вопросов силового подобия между гидродинамическими и электромагнитными полями. Ранее в работах В. Н. Голубкина, Г. Б. Сизых [64] и М. А. Брутяна, В. Н. Голубкина, П. Л. Крапивского [25] на основе специального представления ротора вектора завихренности были найдены семейства поверхностей, вдоль которых в стационарных плоских и осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости в поле потенциальных массовых сил функция Бернулли сохраняется постоянной, сформулированы условия поведения завихренности между этими поверхностями. В отличие от этого в §3.1 этой главы найдены ортогональные векторные преобразования, позволяющие определить поверхности, вдоль которых функция Бернулли является постоянной или вдоль которых давление постоянно — изобарические поверхности, для различных классов плоских, осесимметричных и пространственных течений: стационарные и нестационарные течения вязкой или идеальной жидкости как в потенциальном, так и в непотенциальном поле массовых сил. Таким образом, по сути, получено уравнение Бернулли для указанного широкого класса течений. Найдено компактное представление для уравнений движения. Определены выражения для потенциалов — давления и функции Бернулли, и найдены выражения для приращений этих потенциалов при переходе с одной эквипотенциальной поверхности на другую. Получено выражение для результирующей сил давления, действующей на объем жидкости, которое в плоском и осесимметричном случаях аналогично формуле Н. Е. Жуковского для подъемной силы. В литературе по аэрогидродинамике, включая монографии, посвященные уравнениям Навье–Стокса, например, в книгах О. А. Ладыженской [86], Р. Темама [135], С. М. Белоносова и К. А. Черноуса [8], эти вопросы не рассмотрены. Этот параграф написан на основе работ М. А. Головкина [54, 59, 159].

Подобие между уравнениями гидродинамики и электродинамики было указано еще А. Пуанкаре [120]. В последующем методы моделирования течений идеальной несжимаемой жидкости на основе аналогии между гидродинамическим и электромагнитным полями получили значительное развитие в работах Г. А. Рязанова [122], И. М. Тетельбаума [136], Н. Н. Сунцова [128], А. О. Дитмана, В. Д. Савчука, И. Р. Якубова [67], Л. М. Макарова и др. [94].

При этом во всех указанных работах моделирование ведется по кинематическим параметрам течения, например, за счет аналогии между скоростью гидродинамического поля и вектором напряженности электромагнитного поля или между соответствующими потенциалами. Вместе с тем, сила и момент, действующие на тело, находятся в этих работах путем интегрирования давления по поверхности тела, определенного из уравнения Бернулли. Однако, как показывает анализ, проведенный в § 3.2, подобие между указанными гидродинамическим полем и стационарным магнитным (или квазистационарным электромагнитным) полем имеет гораздо более глубокий характер. Так, несмотря на существенное отличие тензоров напряжений в указанных полях, плотность кинетической энергии гидродинамического поля аналогична плотности магнитной энергии. Пондемоторная сила, действующая на проводник с током – сила Ампера, полностью аналогична подъемной силе Н. Е. Жуковского. При соответствующем моделировании трехмерных течений аналогия сил, действующих на тело в указанных полях, также имеет место. Поэтому, в данном параграфе показано, что, например, моделирование и определение гидродинамических сил, действующих на тело в идеальной несжимаемой жидкости, возможно производить путем проведения непосредственных весовых измерений в стационарном магнитном поле. Это имеет практическое значение, поскольку гидромагнитные интеграторы, в которых происходит такое моделирование, являются, по сути, аналоговыми вычислительными машинами, они имеются до сих пор на некоторых предприятиях и используются для решения практических задач аэрогидродинамики. Кроме того, здесь получены обобщенные выражения для главных векторов силы и момента, действующих на тело в идеальной несжимаемой жидкости, в виде интегралов от векторного произведения скорости и ротора скорости — вихрей, распределенных по объему или поверхности тела, которые являются, по сути, обобщениями формулы Н. Е. Жуковского о подъемной силе и могут применяться при проведении практических расчетов. Следует отметить, что не удалось отыскать литературу, в которой затрагивались бы эти вопросы. Ни в указанной выше специальной литературе, ни в известных курсах физики Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица [88], Э. Парсела [109], Р. Фейнмана, Р. Лейтона, М. Сэнде [140], ни в работе В. А. Ацюковского [7], в которой сделана попытка единым образом описать физическую картину мира, ни в многочисленной литературе по механике сплошных сред, аэрогидродинамике или электродинамике эти вопросы не отражены. Параграф основывается на работах М. А. Головкина [56–59].

В главе 4 представлены экспериментальные методы и результаты исследований вихревого и отрывного обтекания канонических тел в гидро- и аэродинамических трубах.

В § 4.1 этой главы приведены результаты систематических исследований по визуализации течений в гидродинамической трубе ЦАГИ, проведенных с помощью оптического метода, основанного на использовании уникального прибора, разработанного Государственным оптическим институтом им. С. И. Вавилова (ГОИ). При визуализации течений особый интерес представляют так называемые бесконтактные оптические методы [28, 127], поскольку они не вносят искажений в естественную структуру потока. Однако, в гидродинамике малых скоростей применение этих методов затруднено

вследствие недостаточной величины градиента плотности среды в потоке, обтекающем рассматриваемое тело. Обычно в подобных случаях визуализация течения осуществляется посредством искусственного изменения плотности среды с помощью различных приемов: местного нагрева, введения в поток инородного газа или инородных частиц и т. п. [3, 4, 21, 127]. Представленный в этом параграфе метод позволяет фиксировать в потоке неоднородности, обусловленные изменением плотности среды на $\sim 10^{-8}$ от исходной величины. Это дает возможность производить визуализацию течений вблизи тел за счет аналогии между динамическим и тепловым пограничными слоями даже вследствие естественного подогрева пограничного слоя при очень малых скоростях потока, измеряемых сантиметрами в секунду, и успешно применять этот метод в отсутствие сжимаемости среды — в воде. На основе этого метода получены четкие спектры обтекания такого сложного для изучения объекта, как цилиндр, на режимах разгона потока. Эти результаты позволили, в частности, уточнить λ -образную вихревую структуру в областях отрыва потока от тела, четко зафиксировать рождение вторичных и третичных вихревых образований, а также сам процесс начала образования отрывного течения за цилиндром. Полученные материалы существенно дополняют имевшуюся ранее информацию об отрывном обтекании цилиндра, приведенную, в частности, в книге Л. Прандтля, О. Титенса [119], в статьях В. М. Божкова и др. [19, 20], в работах Х. Хонджи и С. Танеда [163, 176], М. Икаи [164]. В этом параграфе проведено также изучение обтекания аэродинамического профиля на стационарных и нестационарных режимах. Показано, что на режимах разгона вблизи него, как и при обтекании цилиндра, образуются λ -образные вихревые структуры. Тем самым дополнена и уточнена структура вихревого отрывного обтекания аэродинамического профиля, которая изучалась ранее, например, в работах В. М. Божкова и др. [21], Дж. Брэтт [149]. Получены уникальные визуализационные материалы по взаимодействию аэродинамического профиля с вихревым следом, идущим от расположенного перед ним, колеблющегося по углу атаки другого профиля. Изучена вихревая структура при обтекании полуцилиндра и правильной треугольной призмы на режимах разгона и торможения потока. Этот параграф основывается на работах В. А. Головкина, В. М. Калявкина и др. [40, 41, 44, 45].

В § 4.2 изложены результаты экспериментальных исследований отрывного обтекания усеченных эллипсоидов вращения с плоской донной поверхностью в гидродинамической трубе. Как известно, аэродинамические характеристики тел с донным срезом, например, тел типа фюзеляжа транспортных вертолетов и самолетов, зависят от характера отрывных течений в донной области (см., например, работу В. Макклуни и И. Маршалла [169]). Известен ряд экспериментальных работ по визуализации отрывных течений за цилиндрами, пластинами, уступами, около выступов, за телами типа клина и усеченного эллипса, а также работы по изучению обтекания конусов, моделей самолетов, моделей несущих вертолетных винтов. Эти результаты содержатся, например, в книге Л. Прандтля и О. Титенса [119], в статье Г. И. Петрова и Р. И. Штейнберга [110], в книгах М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [85], Дж. Бетчелора [26], П. Чжена [142, 143], в статьях В. М. Божкова, В. М. Захарченко, А. Д. Хонькина и др. [19–21], Г. Верле [177], Г. И. Головатюка и Я. И. Те-

терюкова [37], В.Г. Колкова [78], в альбоме Ван-Дайка [27]. При этом отсутствуют систематические исследования по визуализации обтекания тел с донным срезом. В отличие от перечисленных работ в данном параграфе представлены систематические исследования в гидродинамической трубе методом подкрашенных струй обтекания усеченных эллипсоидов с плоской донной поверхностью (с косым и прямым донным срезом). Приведены спектры обтекания для широкого диапазона изменения углов атаки и скольжения как при постоянной скорости набегающего потока, так и при его быстром разгоне и торможении. Для случая обтекания усеченного эллипсоида с косым срезом при стационарных внешних условиях обнаружено существование двух режимов обтекания: с двумя стационарными вихревыми жгутами и с периодически образующимися вихревыми кольцами. Дано объяснение с точки зрения индукции процесса образования таких вихревых колец. Проведено подробное исследование процесса развития вихревого следа за усеченным эллипсоидом с косым донным срезом. Отмечается, в частности, что поскольку усеченный эллипсоид с косым донным срезом является по сути упрощенной моделью фюзеляжа транспортного самолета или вертолета, то обнаруженные несимметрия и неоднозначность вихревых структур могут оказывать существенное влияние, в частности, на работу стабилизатора и вертикального оперения или рулевого винта вертолета, и это необходимо учитывать в практической аэродинамике. Этот параграф основывается на работах [3, 4] В. А. Головкина, М. А. Головкина и их коллег.

В §4.3 проведено исследование нестационарных и гистерезисных явлений в положении областей взрыва «вихрей», образующихся в окрестности передних кромок треугольного крыла. В аэродинамике значительное внимание уделяется исследованиям явления «взрыва» вихря (иногда в литературе употребляется термин «распад» или «разрушение» вихря) — явления потери устойчивости течения в вихревом жгуте. Интерес к этой проблеме объясняется прежде всего тем обстоятельством, что явление взрыва вихрей может зачастую определяющим образом сказываться на аэродинамических характеристиках летательных аппаратов. В частности, взрывом вихрей могут быть обусловлены гистерезисные явления в подъемной силе, в характеристиках продольного момента по углу атаки, антидемпфирование, неблагоприятные изменения характеристик боковой статической и динамической устойчивости по углу скольжения и т.д. Это влияние на аэродинамические характеристики крыла или летательного аппарата обусловлено тем, что разрежение на несущей поверхности под ядром вихря ниже точки начала области его взрыва резко падает. Таким образом, появляется возможность по изменениям положения областей взрыва вихрей судить о поведении аэродинамических характеристик. Возникновение взрыва вихря обычно связывают с увеличением отношения окружной составляющей скорости в ядре вихря к продольной, а также с появлением положительного (неблагоприятного) градиента давления. Возрастание этих двух факторов способствует продвижению области взрыва вихря вверх по течению. Исследования явления взрыва вихрей в безградиентных потоках связаны с задачей безопасной эксплуатации самолетов на авиалиниях (особенно важны здесь вопросы поведения легкого самолета, попавшего в след от тяжелого). Имеется значительное число работ, посвящен-

ных проблеме потери устойчивости вихревых жгутов и явлениям, ее сопровождающим, главным образом, при стационарных внешних режимах обтекания. В работах В. А. Апарина, А. А. Павлова, Г. И. Столярова, А. Н. Храброва [5], Дж. Бэтчелора [26], А. Н. Жука, А. И. Курьянова, Г. И. Столярова [71], С. Лейбовича [89], П. Чжена [142], Г. Е. Эриксона [152, 153] и Л. Е. Эриксона [154] приведены результаты исследования положения областей взрыва вихрей различными методами, а также проведено изучение влияния взрыва вихрей на аэродинамические характеристики крыльев и летательных аппаратов в гидро- и аэродинамических трубах при стационарных значениях углов атаки, скольжения и скорости набегающего потока. Достаточно полный обзор иностранной литературы по исследованиям различных проблем, связанных со взрывом вихрей, дан в [89]. В работе А. Г. Паркера [170] исследовано распределение давления на треугольном крыле в связи с перемещением областей взрыва вихрей при изменении скорости набегающего потока по синусоидальному закону. В отличие от перечисленных работ в § 4.3 с помощью визуализации обтекания треугольного крыла с углом стреловидности по передней кромке 70° в гидродинамической трубе проведено изучение нестационарных явлений в положении областей взрыва вихрей, образующихся вблизи передних кромок такого крыла, для широкого спектра нестационарных режимов изменения углов атаки, скольжения и скорости набегающего потока. Показано, что на ряде нестационарных режимов наблюдается весьма значительное отличие в законах перемещения областей взрыва вихрей по крылу при изменении углов атаки и скольжения по сравнению с положением этих областей при стационарном обтекании на тех же углах. При вращении крыла на уменьшение угла атаки обнаружено продвижение областей взрыва вихрей вверх по крылу вместо их перемещения вниз по крылу в условиях стационарного обтекания. Аналогичное явление имеет место при вращении крыла по углу скольжения. Показано, что изменение аэродинамических нагрузок на таком крыле, полученных при весовых испытаниях методом вынужденных колебаний, объясняется и хорошо коррелирует с перемещением области взрыва. Обнаружена сильная зависимость положения области взрыва, а следовательно, и аэродинамических характеристик при уменьшении скорости по времени и особенно при одновременном возрастании угла атаки и уменьшении скорости, что моделирует реальное движение маневренного самолета при выходе на большие углы атаки. Отмечается, что это принципиально важное обстоятельство ставит задачу создания соответствующих установок (например, аэродинамической трубы с переменной скоростью потока) или исследования таких режимов с помощью моделей на движущихся тележках. Параграф написан на основе статей [51, 52] М. А. Головкина и его коллег.

В § 4.4 проведено экспериментальное исследование отрывного обтекания прямого крыла при стационарных и квазистационарных внешних условиях. В настоящее время, особенно в связи с существенным расширением эксплуатационных углов атаки летательных аппаратов, все большее значение для авиационной практики приобретает изучение особенностей аэродинамики крыла на режимах отрывного обтекания. Имеется обширный список литературы, посвященной решению этой проблемы для различных классов крыльев как аналитическими и численными, так и экспериментальными методами.

Отметим лишь некоторые работы, в той или иной мере касающиеся круга затрагиваемых в данном исследовании вопросов. В книгах Г. Шлихтинга [144], П. Чжена [142, 143], Л. Д. Васильева [28], П. П. Красильщикова [82], в отчете Е. М. Такобса [175], в статьях В. М. Божкова и др. [19–21] приведены результаты экспериментальных исследований аэродинамических характеристик, а также проведена визуализация течения для прямоугольных крыльев различного удлинения. В работах А. И. Курьянова, Г. И. Столярова, Р. И. Штейнберга [83], В. Я. Нейланда, Г. И. Столярова, В. Г. Табачникова [99, 100], Ю. А. Рыжова, Г. И. Столярова, Ю. А. Колмакова, В. Г. Табачникова [77, 121] приведены результаты систематических исследований структуры обтекания прямоугольных крыльев удлинением $\lambda = 1$ и 5, имеющих при малых числах Рейнольдса существенные гистерезисные явления в коэффициентах подъемной силы, силы сопротивления и продольного момента. В работе А. Э. Винкельмана и Дж. Барлоу [29] показано, что диффузорный отрыв на крыльях достаточно большого удлинения имеет ячеистую структуру. Такая структура отрывных зон для случая плоского обтекания цилиндров и эллипсоидов вращения достаточно большого удлинения, а также для течений в диффузорах получена в работах В. Н. Трещевского и др. [138] и Г. Ф. Глотова, Э. К. Мороз [34]. Достаточно подробное исследование аэродинамических характеристик прямоугольных крыльев различного относительного удлинения с визуализацией течения, в том числе при наличии скольжения, приведены в недавно опубликованной статье Б. Ю. Занина, И. Д. Зверкова, В. В. Козлова, А. М. Павленко [74].

В отличие от этого в данном параграфе приводятся результаты экспериментальных исследований аэродинамики прямоугольных крыльев с удлинением $\lambda = 5$ при числе Рейнольдса $Re = 0,6 \cdot 10^6$, включающие весовые измерения и визуализацию различными способами течения на поверхности крыльев в широком диапазоне углов атаки. Показано, что при больших углах течения имеет ячеистую структуру зон отрыва с носка, расположение и размер которых вдоль размаха носят, в значительной мере, случайный характер. При этом течение существенно нестационарно даже при стационарных внешних условиях. Отрывные зоны на виде в плане имеют форму трапеции, опирающейся своим малым основанием на носок крыла. Дано объяснение причин такой формы отрывных зон. Обнаружено, что на больших углах атаки в отсутствии скольжения могут возникать значительные моменты крена и рыскания, обусловленные несимметричной структурой течения относительно плоскости симметрии крыла. Исследованы гистерезисные явления в зависимостях коэффициентов аэродинамических сил и моментов, в том числе моментов крена и рыскания, от угла атаки крыла и связь изменений этих коэффициентов по времени с эволюциями зон отрыва. Обнаружен еще один практически важный результат, который необходимо учитывать в методике проведения исследований: при изменении порядка проведения испытаний (сначала установка угла атаки в диапазоне, где реализуются гистерезисные явления, а затем набор скорости до заданной величины — вместо обратного) реализуется режим отрывного обтекания с носка крыла, а не безотрывный режим, т. е. происходит попадание сразу на ветвь петли гистерезиса, соответствующую обратному хо-

ду по углу атаки. Дана трактовка причины этого явления. Основой для этого параграфа послужили работы [31, 53, 158] М. А. Головкина и его коллег.

В книге используются адекватные обозначения для градиента (**grad** или ∇), дивергенции (div или $\nabla \cdot$), ротора (**rot** или $\nabla \times$), оператора Лапласа (Δ или ∇^2). Нумерация математических выражений в тексте следующая: первые две цифры означают номер параграфа; цифры после второй точки — номер математического выражения в этом параграфе. Нумерация рисунков в тексте двойная: первая цифра — перед точкой, означает номер главы; следующие за точкой цифры — номер рисунка в этой главе.

Введение и §§ 1.1–1.3, 2.3–2.5, 3.1, 3.2, 4.3, 4.4 в книге написаны М. А. Головкиным; § 2.1 — В. А. Головкиным; §§ 2.2, 4.2 — В. А. Головкиным и М. А. Головкиным; § 4.1 — В. М. Калявкиным и В. А. Головкиным.

Авторы выражают глубокую благодарность Н. В. Мазалевой, О. Л. Черновой и А. А. Масленникову за помощь в подготовке рукописи к изданию, а также всем коллегам и товарищам по работе, способствовавшим выполнению исследований, вошедших в данную книгу.

Авторы весьма признательны Российскому фонду фундаментальных исследований (грант 09–01–07063) за поддержку публикации книги.

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В этой главе для идеальной несжимаемой жидкости показано, что скорость перемещения линии сопряжения свободной вихревой поверхности с твердой непроницаемой поверхностью совпадает со скоростью последней частицы жидкости, расположенной между этими поверхностями. Для различных типов задних кромок (угловая, гладкая, точка возврата) выведены условия сопряжения свободной вихревой поверхности с поверхностью тела, соотношения для гидродинамических особенностей (векторов завихренности и циркуляций) и скорости сноса свободной вихревой поверхности с поверхности тела, которые необходимо выполнять при пространственном нестационарном обтекании. Эти результаты включают в себя выполнение теоремы Томсона о постоянстве циркуляции, а поскольку они получены из требований ограниченности и непрерывности скорости, то в этом смысле они являются по сути условиями типа Чаплыгина–Жуковского для случая пространственного нестационарного обтекания. Полученные результаты применимы как для двумерных, так и пространственных течений.

Здесь также выведены условия замкнутости поверхностных и объемных вихревых образований идеальной несжимаемой жидкости. Проведен анализ свойств скалярного и векторного потенциалов от вихрей, распределенных по объему или поверхности. Получена интегральная связь между скалярным и векторным потенциалом для вихревого объема и гидродинамическим импульсом. Дано гидродинамическое обоснование вихревой модели в виде объемных (в частности, постоянной интенсивности) и поверхностных вихрей, используемой при моделировании вращательного движения трехмерного тела. Получено выражение для векторного потенциала от системы объемных и поверхностных вихрей, удовлетворяющих условиям замкнутости, в виде интеграла по объему, аналогичное формуле Био–Савара для скорости от завихренной области, при этом выражение для скорости аналогично выражению для вектора завихренности. Найден скалярный потенциал на внешней поверхности от такого распределения завихренности, который постоянен вдоль этой поверхности, что может упрощать нахождение распределения давления при решении частных задач.

В этой главе проведено также исследование свойств интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя в окрестности особых линий замкнутой поверхности (например, ребер), когда ядро этих уравнений является разрывным по переменной интегрирования при наличии при этом разрыва правой части уравнений. Показано, что предельные решения такого уравнения по обе стороны от особой линии могут быть выражены через предельные значения правых частей уравнения по обе стороны от этих линий, угол между участками поверхности, прилегающими

к этой особой линии, и интеграл по поверхности, вычисленный в точке, принадлежащей особой линии. Исследован характер разрывов в решении таких уравнений в окрестности особых линий. Кратко изложены методы решения этих уравнений, в том числе показана возможность представления решения в аналитическом виде через резольвенту.

§ 1.1. Условия на линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела при его произвольном нестационарном движении в идеальной несжимаемой жидкости

1.1.1. Общая постановка задачи и некоторые исходные соотношения.

Пусть трехмерное тело с кусочно-гладкой поверхностью S совершает произвольное нестационарное движение в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. С поверхности тела по линии сопряжения τ , которая может перемещаться и может быть замкнутой, сходит свободная вихревая поверхность S_3 — поверхность разрыва тангенциальных составляющих вектора скорости. Часть поверхности S по одну сторону от τ будем обозначать S_1 , по другую сторону — S_2 (см. рис. 1.1).

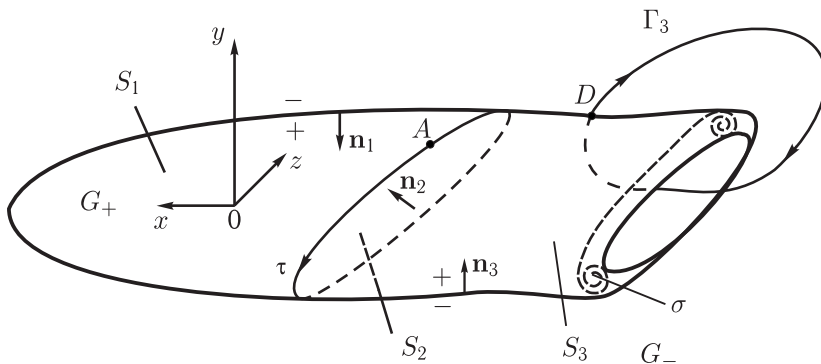


Рис. 1.1. Тело, совершающее произвольное движение в идеальной несжимаемой жидкости

Предполагается, что в окрестности линии τ поверхности S_i имеют касательные плоскости. Тогда плоскость Π , нормальная к τ , пересечет поверхность S_i по гладким в окрестности точки $A \in \tau$ линиям l_i (рис. 1.2). Пусть единичные векторы \mathbf{l}_i , \mathbf{n}_i , $\boldsymbol{\tau}_i$ образуют правую прямоугольную декартову систему координат, связанную с поверхностями S_i , причем вектор \mathbf{l}_i направлен вдоль линии l_i , \mathbf{n}_i нормален к поверхности S_i , а $\boldsymbol{\tau}_i$ нормален к \mathbf{l}_i и \mathbf{n}_i и лежит в плоскости, касательной к S_i . Тогда, если начала этих систем координат лежат в точке A , то векторы $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau}_3$ совпадают с касательной к линии τ , то есть с вектором $\boldsymbol{\tau}$, а нормали \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 направлены внутрь тела. Область внутри тела будем обозначать G_+ . Таким образом, в соответствии с принятой системой осей координат, направление движения вдоль линии $l_3 \subset S_3$ от линии τ (от тела) является отрицательным.

Предполагается, что в окрестности линии τ в области течения G_- , не включающей в себя поверхности S_i , отсутствуют другие поверхности танген-

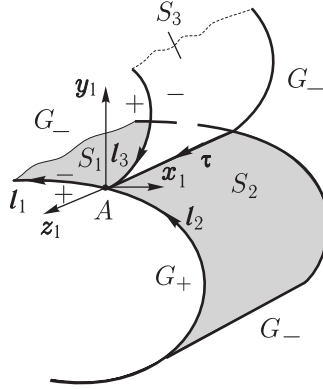


Рис. 1.2. Сопряжение поверхностей тела и следа в окрестности линии схода потока

циального разрыва скорости жидкости, то есть в окрестности линии τ в G_- скорости являются непрерывными функциями точки $M \in G_-$ вплоть до границ течения S_i . Будем предполагать также, что поле возмущенных скоростей в области G_- соленоидально. Пусть далее на свободной поверхности

$$p_{3+} - p_{3-} = 0, \quad u_{3n+} = u_{3n-} \quad \text{на } S_3, \quad (1.1.1)$$

где p_{3+} , p_{3-} и u_{3n+} , u_{3n-} — соответственно предельные значения давления и нормальных к S_3 компонентов возмущенных скоростей с обеих сторон поверхности S_3 . На внешней стороне поверхности S в G_- , которую будем обозначать S_- , выполняется граничное условие непротекания, означающее равенство нулю нормальной компоненты относительной скорости (в системе координат, связанной с телом):

$$v_n = 0 \quad \text{на } S_-, \quad (1.1.2)$$

при этом в G_- существует потенциал внешнего поля Φ^V и потенциал возмущенных скоростей φ , удовлетворяющие уравнению Лапласа.

В дальнейшем в разд. 1.1.3–1.1.5 индексы 1, 2, 3 или i ($i = 1, 2, 3$) будут соответствовать поверхностям S_1 , S_2 , S_3 , остальные же буквенные индексы, стоящие внизу, означают проекцию на соответствующее направление, а знаки «+» и «-», в зависимости от смысла, соответствуют G_+ , G_- или же предельным значениям величин на поверхности S_i со стороны отрицательного или положительного направления нормали к ней \mathbf{n}_i .

Как известно [80], согласно формуле Стокса скорость, индуцируемая ограниченной линией τ' поверхностью S' с распределенным по ней двойным слоем переменной по S' плотности ν , выражается формулой

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{4\pi} \oint_{\tau'} \Gamma \frac{\boldsymbol{\tau}' \times \mathbf{r}'}{r'^3} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \int \frac{\boldsymbol{\gamma}' \times \mathbf{r}'}{r'^3} dS'. \quad (1.1.3)$$

Здесь $\Gamma = 4\pi\nu$ — циркуляция скорости по любому контуру, охватывающему τ' в предположении отсутствия поверхности S' ; \mathbf{r}' — вектор, направляемый из точки интегрирования в фиксированную точку M ; $\boldsymbol{\tau}'$ — единичный вектор касательной τ' в точке интегрирования; $\boldsymbol{\gamma}'$ — вектор поверхностного рас-

пределения завихренности. Далее будем считать, что Γ и γ^ν — функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Аналогично работам [26, 68, 69] первый интеграл в (1.1.3) при стремлении точки M к точке $\tau'_0 \in \tau'$ выражается формулой:

$$\bar{\mathbf{v}}'' = \frac{\Gamma(\tau_0)}{2\pi} c_1 \frac{1}{r'} \mathbf{n}' + \left[\frac{\Gamma(\tau_0)}{2\pi} c_2 \frac{1}{r'} + \frac{\Gamma(\tau_0)}{4\pi} c_3 \ln \left| \frac{1}{r'} \right| \right] \mathbf{b}' + O(\bar{\mathbf{v}}), \quad (1.1.4)$$

где \mathbf{n}' — главная нормаль, \mathbf{b}' — бинормаль к τ' ; c_1 и c_2 — некоторые константы; c_3 — кривизна линии τ' в точке τ'_0 ; $O(\bar{\mathbf{v}})$ — некоторый конечный вектор скорости.

Известно, [68, 69, 93], что скорость, индуцируемая вихревым слоем γ^ν (см. рис. 1.3), распределенным по поверхности S' , на границе этого слоя (второй интеграл в (1.1.3)) равна:

$$\mathbf{v}''' = \gamma_\tau^\nu(\tau_0) \ln \left| \frac{1}{r'} \right| \mathbf{n}'' + O(\bar{\mathbf{v}}). \quad (1.1.5)$$

Здесь $\gamma_\tau^\nu = \gamma_l^\nu(\tau_0) \cdot \text{ctg } \alpha = \gamma^\nu(\tau_0) \cos \alpha$ — проекция вектора γ^ν на направление τ' , а $\gamma_l^\nu(\tau)$ — на направление l' , нормальное τ' ; \mathbf{n}'' — нормаль к поверхности S' в точке τ'_0 ; α — угол между вектором γ^ν и касательной к линии τ' .

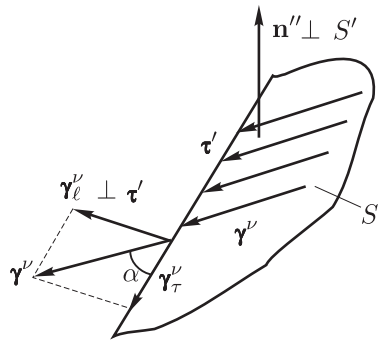


Рис. 1.3. Вихревой слой на границе поверхности S'

1.1.2. Скорость перемещения линии схода свободной вихревой пелены. Пусть линия схода τ лежит на гладком участке поверхности S . Под перемещением линии τ схода вихревой пелены будем понимать деформацию ее по нормали к ней самой в плоскости, касательной поверхностям S_1 или S_2 , так как перемещение точки линии схода по касательной к этой линии не приводит к ее деформации.

Докажем, что скорость перемещения точки A , принадлежащей линии схода τ и отстоящей на конечное расстояние от ее концов, по нормали к этой линии, то есть скорость перемещения этой линии соприкосновения свободной поверхности разрыва тангенциальных компонентов скоростей с твердыми непроницаемыми поверхностями S_1 и S_2 , совпадает со скоростью перемещения по этому направлению предельной частицы жидкости, расположенной между двумя сторонами поверхностей S_3 и, например, S_2 . Для этого достаточно доказать, что проекция скорости жидкости на плоскость Π , нормальную τ

в точке $A \in \tau$, в секторе, образованном поверхностями S_3 и S_2 , относительно точки A отсутствует.

Для доказательства применим к объему жидкости q (рис. 1.4), прилегающему к A и заключенному между S_2 и S_3 , теорему Остроградского–Гаусса:

$$\iiint_q \operatorname{div} \mathbf{v}^A dq = \oiint_{\delta} v_n^A d\delta, \quad (1.1.6)$$

где \mathbf{v}^A — вектор скорости жидкости в этом объеме относительно точки A ; $\delta = \bigcup_{i=1}^{i=5} \delta_i$ — поверхность, ограничивающая этот объем; δ_4, δ_5 — поверхности, образованные плоскостями, перпендикулярными τ ; δ_1 — поверхность, образованная плоскостью, проведенной параллельно касательной к τ в точке $A \in \tau$ под некоторым не равным нулю углом к S_3 ; $\delta_2 \subset S_2, \delta_3 \subset S_3$ — части поверхностей S_2 и S_3 соответственно, вырезаемые указанными выше плоскостями δ_1, δ_4 и δ_5 ; будем полагать, что угол β между δ_2 и δ_3 : $\pi > \beta \geq 0$.

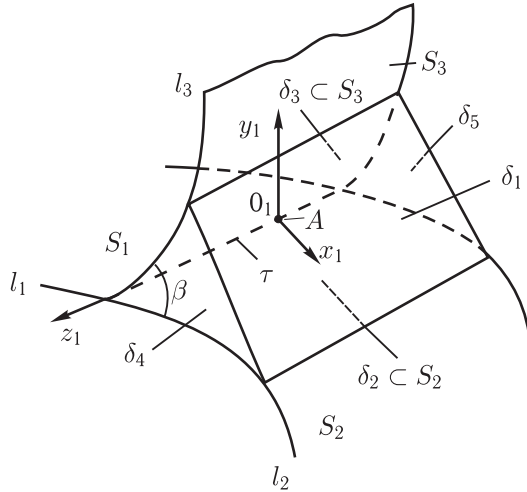


Рис. 1.4. Объем жидкости q , примыкающий к линии схода потока τ

Будем считать, что связанная с точкой A ортогональная система координат $O_1x_1y_1z_1$ выбрана таким образом, что ось O_1z_1 направлена по касательной к τ в A , а ось O_1y_1 — по нормали к δ_2 . В силу того, что поле возмущенных скоростей вне S_1, S_2, S_2 потенциально, имеем $\operatorname{div} \mathbf{v}^A = 0$. Тогда из (1.1.6) получим:

$$\oiint_{\delta} v_n^A d\delta = 0. \quad (1.1.7)$$

Здесь проекция скорости

$$v_{n_2}^A = 0, \quad (1.1.8)$$

в силу условия непротекания (1.1.2).