Н. В. Воропаева, В. А. Соболев

Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 517.977
ББК 22.213
В 75

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 08-01-07027

Воропаева Н.В., Соболев В.А. **Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-1166-9.

Монография посвящена исследованию дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных. Такие системы возникают при моделировании широкого круга процессов с резко различающимися темпами составляющих движения. Для анализа таких систем предлагается применять метод декомпозиции, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Развитый в книге математический аппарат применяется для исследования задач динамики и управления.

Для специалистов в области прикладной математики, математического моделирования и теории управления.

ISBN 978-5-9221-1166-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6
Введение 7

Глава 1. **Интегральные многообразия сингулярно возмущенных систем и метод декомпозиции** 16
1.1. Интегральное многообразие медленных движений 16
1.1.1. Основные понятия (16). 1.1.2. Приведение системы к специальному виду (19). 1.1.3. Операторное уравнение для интегрального многообразия (20). 1.1.4. Интегральные неравенства (21). 1.1.5. Оценки фундаментальных матриц (23). 1.1.6. Вспомогательные неравенства (26). 1.1.7. Существование интегрального многообразия (28). 1.1.8. Асимптотическое разложение интегрального многообразия (29). 1.1.9. Примеры (31).
1.2. Интегральное многообразие быстрых движений 33
1.3. Расщепляющее преобразование 40
1.4. Устойчивость. Принцип сведения 41
1.5. Неустойчивые и условно устойчивые медленные многообразия 43
1.5.1. Неустойчивые многообразия (43). 1.5.2. Условно устойчивые медленные многообразия (44).
1.6. Системы без пограничного слоя 45
1.6.1. Пример (45). 1.6.2. Слабонелинейные системы (46).

Глава 2. **Гироскопические системы**. 48
2.1. Особенности применения метода декомпозиции. 48
2.1.1. Уравнения движения (48). 2.1.2. Метод декомпозиции для систем без погранслоя (50).
2.2. Разделение прецессионных и нутационных движений 52
2.2.1. Общий случай (52). 2.2.2. Тяжелый гироскоп в кардановом подвесе (53).

Глава 3. **Расщепление линейных систем** 55
3.1. Декомпозиция 55
3.2. Линейные стационарные системы 61
3.3. Устойчивость 62
3.4. Расщепление начальных и краевых задач. 63
3.5. О допустимости применения прецессионных уравнений гироскопических компасов 67

Глава 4. **Расщепление квазилинейных систем** 74
4.1. Схема расщепления 74
4.2. Системы, линейные по быстрым переменным 79
4.2.1. Общий случай (79). 4.2.2. Частные случаи (80).

Глава 5. **Нелинейные краевые задачи**. 82
5.1. Стандартная схема расщепления. 82
5.2. Модифицированное расщепляющее преобразование 84
5.3. Нелинейные краевые условия. 96

Глава 6. **Вырожденные системы**. 99
6.1. Постановка задачи 99
6.2. Существование медленного многообразия. 100
6.3. Явная и неявная формы задания медленных многообразий 101
6.4. Параметрическое задание интегральных многообразий 103
6.5. Управление с большим коэффициентом усиления 106

6.6. Ветвление интегральных многообразий 108
6.7. Полиномиальные системы 111

Глава 7. **Системы с несколькими малыми параметрами** 116
7.1. Основные предположения 116
7.2. Интегральное многообразие медленных движений 117
7.2.1. Существование интегрального многообразия (117). 7.2.2. Гладкость интегрального многообразия (120). 7.2.3. Асимптотика интегрального многообразия (120).
7.3. Интегральное многообразие быстрых движений 121
7.3.1. Существование интегрального многообразия (121). 7.3.2. Гладкость интегрального многообразия (125). 7.3.3. Асимптотика интегрального многообразия (125).
7.4. Первый этап расщепления 127
7.5. Устойчивость интегрального многообразия медленных движений. Принцип сведения 129
7.6. Схема расщепления 129
7.7. Расщепление линейных систем 131
7.7.1. Схема расщепления (132). 7.7.2. Гироскоп с упругим валом (134).
7.8. Расщепление квазилинейных систем 136
7.8.1. Схема расщепления (136). 7.8.2. Электрическая цепь с туннельным диодом (137). 7.8.3. Синхронная машина (141).

Глава 8. **Декомпозиция управляемых систем** 145
8.1. Линейные системы 145
8.1.1. Двухтемповые линейные системы (145). 8.1.2. Трехтемповые линейные системы (146).
8.2. Нелинейные системы 148
8.2.1. Двухтемповые нелинейные системы (148). 8.2.2. Трехтемповые нелинейные системы (150).

Глава 9. **Управляемость и наблюдаемость многотемповых систем** 153
9.1. Линейные двухтемповые модели 153
9.1.1. Управляемость (153). 9.1.2. Наблюдаемость (159).
9.2. Нелинейные двухтемповые модели 160
9.2.1. Управляемость (160). 9.2.2. Наблюдаемость (163).
9.3. Однозвенный манипулятор с упругим сочленением 164
9.3.1. Уравнения движения (164). 9.3.2. Декомпозиция модели манипулятора (166). 9.3.3. Управляемость (168). 9.3.4. Наблюдаемость (169).
9.4. Управляемость линейных трехтемповых систем 170
9.5. Управляемость нелинейных трехтемповых систем 172

Глава 10. **Задачи оптимального управления** 173
10.1. Декомпозиция матричных дифференциальных уравнений Риккати 173
10.1.1. Сингулярно возмущенные системы (174). 10.1.2. Системы с быстрыми и медленными переменными (177). 10.1.3. Частные случаи и примеры (184). 10.1.4. Управление процессом конвективного нагрева (190). 10.1.5. Управление температурным полем (191). 10.1.6. Синтез оптимальных регуляторов для многотемповых систем (195).
10.2. Оптимальное управление процессом с линейно входящим управлением 200

10.2.1. Системы, линейные по быстрым переменным (200). 10.2.2. Линейно-квадратичная задача (201). 10.2.3. Расщепление уравнений (205). 10.2.4. Расщепление краевых условий (207).

Глава 11. **Задачи оптимального быстродействия** 209

11.1. Оптимальное быстродействие для линейных сингулярно возмущенных систем 209

11.1.1. Точки переключения для сингулярно возмущенных систем (209). 11.1.2. Асимптотика точек переключения (211). 11.1.3. Системы с одной медленной переменной (218). 11.1.4. Магнитоэлектрический силовой привод (221).

11.2. Нелинейная задача оптимального быстродействия 225

Список литературы 235

Предисловие

В настоящей монографии развивается и обосновывается метод декомпозиции сингулярно возмущенных дифференциальных систем, сочетающий в себе элементы качественных и асимптотических методов анализа. В основе предлагаемого метода лежит геометрический подход, базирующийся на свойствах интегральных многообразий медленных и быстрых движений. Использование быстрых и медленных интегральных многообразий позволяет построить преобразование, осуществляющее декомпозицию системы на независимую медленную подсистему и быструю подсистему, описывающую затухающие (возможно, слабо затухающие) колебания, что дает понижение размерности изучаемых моделей и избавляет от вычислительной жесткости.

В книге подробно излагается теория интегральных многообразий медленных и быстрых движений сингулярно возмущенных дифференциальных систем. Приводятся достаточные условия существования расщепляющего преобразования. Выделены классы задач, для которых расщепляющее преобразование эффективно строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Изучены особенности декомпозиции начальных и краевых задач. Рассмотрены системы с несколькими малыми параметрами при производных. Эффективность предлагаемого подхода демонстрируется большим количеством примеров. Значительная часть книги посвящена применению метода декомпозиции для решения различных задач теории управления.

Большинство результатов, относящихся к математическому обоснованию метода асимптотической декомпозиции и его применению в прикладных задачах, принадлежит авторам.

Основная часть книги писалась при тесном взаимодействии авторов. Гл. 4, 7 и 8 написаны Н.В. Воропаевой, гл. 1, 2 и 6 написаны В.А. Соболевым. Гл. 9 написана М.М. Семеновой, а гл. 11 написана О.В. Видилиной. Авторы приносят им свою искреннюю благодарность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 07-01-00169а, 08-08-99101), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 22, Программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН № 15, Национального университета Ирландии (Boole Centre for Research in Informatics and Department of Applied Mathematics, University College Cork, Ireland).

Введение

В связи с интенсивным развитием приборостроения, авиации, космических исследований, химической промышленности и других областей науки и техники возникла потребность в использовании сложных математических моделей, сочетающих в себе высокую размерность и вычислительную жесткость, что послужило толчком к значительному расширению исследований по теории сингулярно возмущенных дифференциальных систем, которые естественным образом возникают при моделировании и анализе объектов различной природы, способных одновременно совершать быстрые и медленные движения. Это может быть обусловлено наличием в системе малых или больших параметров, таких как массы, моменты инерции, коэффициенты упругости, постоянные времени, сопротивления, индуктивности и т. п. Сложную композицию медленных и быстрых движений представляет собой движение систем твердых тел. В задачах динамики спутников это может быть связано с наличием демпфирующих устройств или упругих элементов малой массы. Для гироскопических приборов и систем наличие быстрых — нутационных и медленных — прецессионных колебаний хорошо известно и наблюдается практически всегда.

В теории автоматического управления модели, описываемые сингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями, возникают по целому ряду причин. Во-первых, такая ситуация естественна для задач управления системами, динамика которых объективно складывается из разнотемповых движений: гироскопические, электромеханические и другие системы. Во-вторых, появление сингулярных возмущений может быть связано со спецификой применяемых методов управления и для однотемповых систем. Примерами могут служить задачи с использованием метода штрафа при малом коэффициенте штрафа за управление («дешевое» управление) или задачи стохастической фильтрации при вырождении шума в канале наблюдений.

Теория сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений интенсивно развивается, и ее методы активно применяются для решения широкого круга задач из различных областей естествознания и техники.

Сингулярно возмущенными называются системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при части производных, вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x \in R^m$, $t \in R$, $y \in R^n$, ε — малый параметр, точкой обозначается дифференцирование по t. Уравнения могут содержать и вектор управляющих параметров $u \in R^r$, т. е. иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, u, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, u, t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{2}$$

Первые результаты по теории сингулярно возмущенных систем получены в работах А.Н. Тихонова [173], Д.В. Аносова [3], А.Б. Васильевой [22], М.И. Вишика, Л.А. Люстерника [34], А.И. Климушева, Н.Н. Красовского [77], F. Hoppensteadt [275], W. Wasow [374], R. O'Malley [326]. Дальнейшее развитие теория получила в монографиях А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова [23–25], М.И. Вишика [371], В.М. Волосова, Б.И. Моргунова [37], Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розова [119], Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Колесова, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова [118], Н.Н. Моисеева [120, 121], С.А. Ломова [102], K.W. Chang, F.A. Howes [219], W. Eckhaus [236], A. Erdelyi [237], E. Hinch [273], J.A. Murdock [311], A.H. Nayfeh [319–321] и других авторов.

Задачи управления с сингулярными возмущениями и различные приложения сингулярно возмущенных систем также исследовались многими авторами, отметим монографии Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко [139], А.А. Воронова [38], Н.Н. Моисеева [121], А.А. Первозванского, В.Г. Гайцгори [134], Л.Д. Акуленко [1], И.В. Новожилова [123], Е.И. Геращенко, С.М. Геращенко [46], M. Van Dyke [235], P.V. Kokotović, H.K. Khalil, J. O'Reilly [298, 299], В.А. Плотникова [136], R. O'Malley [327, 329], A.H. Nayfeh [320, 321], J.H. Chow [221], D.S. Naidu [312], D.S. Naidu, A.K. Rao [318], D.R. Smith [354], L.T. Grujić, A.A. Martynyuk, M. Ribbens-Pavella [266], A. Bensoussan [208], Z. Gajić, M. Lim [254], S. Sastry [344], A.W. Bush [212], Z. Aganovic, Z. Gajić [200], J. Kevorkian, J. Cole [285,286], H. Khalil [289], C.M. Bender, A. Orszag [207] и коллективные работы [203, 244, 307, 310, 353].

Основные результаты исследований в области общей теории сингулярно возмущенных систем и различных ее приложений систематизированы в обзорах [18, 26, 58, 99, 211, 213, 257, 294, 295, 300, 302, 309, 314, 317, 324, 327, 339], см. также [45, 60, 75, 208, 254, 255, 298, 299, 312, 313, 315, 316, 367, 368]. Эти обзоры содержат большое количество ссылок на работы, в которых анализируются сингулярно возмущенные модели аэрокосмических, электрических, электромеханических, энергетических, робототехнических, химических, биохимических, экономических и др. систем. Особенно следует отметить последние из опубликованных обзоров D.S. Naidu [313, 314, 316], М.Г. Дмитриева, Г. А. Куриной [58], в которых проанализировано большое количество теоретических и прикладных работ, посвященных данной тематике.

Поток публикаций, посвященных теории и приложениям сингулярно возмущенных систем, непрерывно растет. При этом большое разнообразие задач сочетается со сравнительно небольшим арсеналом применяемых средств анализа. Абсолютное большинство статей и монографий по указанной тематике имеют в своей основе тот или иной метод построения асимптотических разложений решений начальных или краевых задач (см., например, [24, 26, 71, 72, 277, 312, 322]). В монографии [24] рассматривается один из эффективных асимптотических методов в теории сингулярных возмущений — метод пограничных функций Васильевой–Вишика–Люстерника. Работы [71,72] посвящены методу согласования (сращивания) асимптотических разложений. Для решения задач управления с быстрыми и медленными переменными используется также так называемая «прямая схема», [56–58, 100, 206]. Использованию метода усреднения в задачах управления посвящены работы [1, 45, 137, 253].

В то же время во многих случаях необходимо следить за поведением всей системы, а не отдельных траекторий, решать задачи качественного исследования системы. Необходимость повышения точности расчета сложных систем при одновременном снижении объема аналитических и численных вычислений делает актуальной разработку достаточно универсальных и эффективных методов декомпозиции дифференциальных систем с разнотемповыми переменными.

Для решения таких проблем представляется целесообразным привлекать не только асимптотические, но и геометрические методы анализа. Геометрическая теория динамических систем находит свои истоки в работах А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова [106, 141]. Она занимается вопросами существования и исследования свойств как отдельных решений, обладающих специальными качествами (положений равновесия, периодических и почти периодических решений), так и целых классов решений (интегральных многообразий).

Идеи теории интегральных многообразий восходят к работам А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, Ф. Адамара, О. Перрона, Л. Боля. Основы теории интегральных многообразий были заложены в работах Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [14–16]. В книге Н. Н. Боголюбова [14] впервые было дано строгое определение интегрального многообразия для систем в стандартной форме, установлены теоремы о существовании и свойствах однопараметрических интегральных многообразий. Основные результаты по теории интегральных многообразий изложены в фундаментальной монографии Ю. А. Митропольского и О. Б. Лыковой [116], авторы которой внесли значительный вклад в развитие этого раздела дифференциальных уравнений.

Для исследования сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений метод интегральных многообразий применялся в работах Ю. А. Митропольского [115,116], К. В. Задираки [67,68], Я. С. Бариса и В.И. Фодчука [6–10], А.М. Самойленко, М.Я. Свищука [150], Ю.И. Неймарка [122], В.В. Стрыгина и В.А. Соболева [169], J. Hale [178], Д. Хенри [179], N. Fenichel [239], В.А. Соболева [159, 362] и других авторов, а для анализа различных задач управления и теории динамических систем в работах [1, 31–33, 94, 101, 117, 158, 160, 167, 168, 258, 268, 291, 292, 298, 304, 314, 355–363, 366] и др.

Геометрическая природа задач оптимального управления особенно ярко проявляется при решении нелинейных задач оптимального управления [139], и поэтому использование геометрического (или топологического) подхода можно считать естественным для теории управления. Геометрические методы анализа нелинейных систем разрабатывались и активно применялись в работах [89–91, 140]. Различные аспекты декомпозиции сложных систем и задач управления обсуждались в работах Л.Д. Акуленко [1], Е.И. Геращенко, С.М. Геращенко [46], В.А. Соболева [355–362], В.И. Елкина [61], С.В. Емельянова, С.К. Коровина, И.Г. Мамедова [62], Г.А. Куриной [97–99], Н.А. Парусникова, В.М. Морозова, В.И. Борзова [131], Ю.Н. Павловского, Т.Г. Смирновой [130], А.А. Первозванского, В.Г. Гайцгори [134], В.И. Матюхина и Е.С. Пятницкого [109, 110, 143], В.И. Цуркова [180], Ф.Л. Черноусько [182–185], Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколова [186], Ф.Л. Черноусько, В.Б. Колмановского [188, 189], К.И. Чернышова [191], L. Anderson [202], B. Avramovic [204], V. Dragan, A. Halanay [231–233], T.R. Gichev [259], L.T. Grujić [265], T.J. Kaper [282], R.E. O'Malley [327], R.E. O'Malley, R.L. Anderson [330], A. Saberi, H. Khalil, [335], A. Saberi, P. Sannuti [336, 337], P. Sannuti [340], W.C. Su, Z. Gajic, X.M. Shen [364], Y.Y. Wang, P.M. Frank [372]. В работе [63] выделяются основные методы понижения размерности сложных систем. Это метод сравнения [108], метод интегральных многообразий [116], методы теории сингулярных возмущений [23, 25], методы агрегирования и декомпозиции [38], метод квазирасщепления [63].

Системы с несколькими малыми параметрами при производных рассматривались в работах [39, 173, 197, 198, 231, 266, 274, 286–289, 326, 343] и др.

В настоящей работе описывается метод декомпозиции сингулярно возмущенных дифференциальных систем, базирующийся на идеях теории интегральных многообразий медленных и быстрых движений для сингулярно возмущенных дифференциальных систем. Основы данного метода были сформулированы в [355] и обоснованы в работах [356–361].

Интегральное многообразие системы называется медленным, если движение по нему осуществляется со скоростями порядка единицы. По быстрому многообразию движение осуществляется со скоростями порядка $1/\varepsilon$.

Основная идея метода состоит в выделении класса медленных движений изучаемой системы и последующем разделении быстрых и медленных движений. Под разделением движений понимается приведение рассматриваемой дифференциальной системы к специальному виду, в котором медленная подсистема не содержит быстрых переменных. Порядок рассматриваемой системы дифференциальных уравнений при этом понижается, получаемая в результате медленная подсистема меньшей размерности наследует основные элементы качественного поведения исходной системы в соответствующей области. По сути дела производится построение упрощенных моделей изучаемых объектов, но при этом более простые модели с высокой степенью точности отражают поведение исходных моделей. Быстрые переменные удовлетворяют быстрой подсистеме, которая может изучаться отдельно.

Чтобы пояснить сущность предлагаемого подхода, рассмотрим сначала порождающую или вырожденную систему, которая получается из (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\dot{x} = f(x, y, t, 0), \tag{3}$$

$$0 = g(x, y, t, 0). \tag{4}$$

Уравнение (4) задает поверхность в пространстве переменных x, y, t. Нас интересуют части этой поверхности, которые можно задать уравнением $y = h_0(x, t)$, т. е. можно выразить быстрые переменные y через медленные x и время t. Если функция $g(x, y, t, 0)$ не линейна по y, то решить уравнение (4) относительно y можно не всегда. Достаточным является выполнение требований теоремы о неявной функции, центральным из которых является $\det g_y(x, y, t, 0) \neq 0$. Поверхность, задаваемая уравнением (4), может распадаться на несколько «листов», каждый из которых задается явным уравнением вида $y = h_0(x, t)$. Обычно предполагается, что каждое из решений вида $y = h_0(x, t)$ является изолированным, т. е. существует такое положительное число ρ, что в окрестности $\|y - h_0(x, t)\| \leqslant \rho$ нет других решений уравнения (4). Следуя обычной схеме, мы должны подставить $y = h_0(x, t)$ в уравнение (3) и заняться его анализом. Несмотря на то что траектории системы (1) «протыкают» поверхность $g(x, y, t, 0) = 0$, переход к вырожденным уравнениям при естественных предположениях вполне допустим, так как в ε-окрестности каждого «листа» $y = h_0(x, t)$ лежит интегральное многообразие, по которому проходят траектории системы (1). Отметим также, что ответ на вопрос о допустимости использования порождающей системы (3), (4) в качестве «нулевого приближения» дает известная теорема А.Н. Тихонова [171–173], основное предположение которой состоит в требовании асимптотической устойчивости $y = h_0(x, t)$ как стационарного состояния так называемой *присоединенной* системы

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y, t, 0) \tag{5}$$

при фиксированных x и t.

Для некоторых прикладных задач использование вырожденных уравнений вместо точных дает вполне приемлемые результаты, но для целого ряда задач приближение (3), (4) является слишком грубым.

Возможны по меньшей мере две интерпретации использования уравнений (3), (4) вместо (1). При первой анализируется справедливость предельного перехода $x(t,\varepsilon) \longrightarrow x_0(t)$, $y(t,\varepsilon) \longrightarrow y_0(t)$, где $x = x(t,\varepsilon)$, $y = y(t,\varepsilon)$ — решение уравнений (1), $(x(t_0,\varepsilon) = x^0$, $y(t_0,\varepsilon) = y^0)$, а $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ — решение порождающей задачи, т. е. $x_0(t)$ — решение уравнения

$$\dot{x} = f(x, h_0(x,t), t, 0), \quad x_0(t_0) = x^0, \tag{6}$$

а $y_0(t) = h_0(x_0(t), t)$. Если приближение $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ является слишком грубым, то естественным представляется построение более точных приближений для $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ при помощи асимптотических методов (метода пограничных функций [23], метода регуляризации [102] и т. д.).

При второй интерпретации переход к порождающим уравнениям рассматривается как декомпозиция системы (1) в нулевом приближении, при которой для переменной x строится независимое уравнение (6), а переменная y определяется либо из алгебраического соотношения $y = h_0(x,t)$, либо из присоединенного уравнения (5). При такой точке зрения на порождающую задачу ее уточнение нужно искать на пути более точной декомпозиции системы, когда с более высокой степенью точности строится независимое уравнение для медленной переменной, а быстрая переменная определяется из более точного алгебраического соотношения вида $y = h(x,t,\varepsilon)$, либо из некоторого дифференциального уравнения размерности n, коэффициенты которого могут зависеть от медленной переменной.

В настоящей работе реализуются идеи, основанные на второй интерпретации, и декомпозиция системы (1) осуществляется путем введения новых переменных v и z по формулам

$$\begin{aligned} x &= \varphi(v,t,\varepsilon) + \Phi(v,z,t,\varepsilon), \\ y &= \psi(v,t,\varepsilon) + \Psi(v,z,t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{7}$$

где φ, ψ, Φ, Ψ — непрерывные функции, в некоторой области обладающие тем свойством, что для переменных v и z получается система уравнений вида

$$\dot{v} = F(v,t,\varepsilon), \tag{8}$$

$$\varepsilon\dot{z} = G(v,z,t,\varepsilon). \tag{9}$$

Если Φ, Ψ и G обращаются в нуль при $z = 0$ и $\det G_z(v,0,t,0) \neq$ $\neq 0$, то естественно называть v медленной переменной, а z — строго быстрой переменной. Уравнения

$$x = \varphi(v,t,\varepsilon), \quad y = \psi(v,t,\varepsilon) \tag{10}$$

задают в расширенном фазовом пространстве некоторую гладкую поверхность.

Поскольку система уравнений (8), (9) имеет множество решений $v = v(t)$, $z = 0$, то эта поверхность в расширенном фазовом пространстве состоит из интегральных кривых, т. е. является интегральным многообразием, а векторное дифференциальное уравнение (8) описывает поведение решений на этом многообразии. Обычно формула (7) и приведение к виду (8), (9) имеют место в некоторой окрестности поверхности (10).

Расщепляющее преобразование (7) приводит исходную сингулярно возмущенную систему (1) к «блочно-треугольному» виду (8), (9) с независимой медленной подсистемой (8) и быстрой подсистемой (9), описывающей затухающие колебания. Используя представление (7) и свойства решений результирующей системы, устанавливается свойство притяжения интегрального многообразия медленных движений и принцип сведения, заключающийся в том что решение исходной сингулярно возмущенной системы, лежащее на интегральном многообразии медленных движений, является устойчивым (асимптотически устойчивым, неустойчивым) тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает соответствующее решение медленной подсистемы. Принцип сведения позволяет сводить задачу об устойчивости решений разнотемповой исходной системы к задаче об устойчивости решений медленной подсистемы.

Расщепляющее преобразование эффективно строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Алгоритмы декомпозиции могут быть реализованы в виде программ для систем компьютерной алгебры.

Предлагаемый подход позволяет понизить порядок рассматриваемой системы и устранить вычислительную жесткость, а его эффективность подтверждается решением ряда теоретических и прикладных задач.

Этот подход успешно применялся авторами настоящей работы и их коллегами для решения различных задач теории управления [29,30,39, 44,51,65,84,117,128,151–161,177,245–251,310,347,351,352,355,361, 370], механики [13,88,156,169,310], химической кинетики и физики горения и взрыва [48,49,78,163–165,192–196,260,264,310,346,349–352]. Некоторые результаты этих исследований включены в настоящую работу. Следует также отметить, что идеи предлагаемого метода используются и другими авторами для решения различных задач теории управления [170,252].

Книга состоит из одиннадцати глав. В первой главе приводятся основные понятия общей теории интегральных многообразий, доказывается существование интегрального многообразия медленных движений нелинейных сингулярно возмущенных систем, изучаются его свойства, обосновывается алгоритм его построения в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Далее в окрестности интегрального многообразия вводится в рассмотрение расширенная вспомогательная система и устанавливается существование у этой системы интегрального многообразия быстрых движений, которое также может быть построено в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Описанные интегральные многообразия используются для построения расщепляющего преобразования, приводящего рассматриваемую систему к блочно-треугольному виду, в котором медленная подсистема становится независимой и во многих случаях может служить упрощенной моделью. Доказывается принцип сведения, который позволяет сводить задачу об устойчивости решения исходной разнотемповой системы к задаче об устойчивости решения медленной подсистемы. Изучаются устойчивые, неустойчивые и условно устойчивые интегральные многообразия. Обсуждаются возможности применения метода интегральных многообразий для систем со слабой диссипацией.

Во второй главе доказывается возможность применения метода декомпозиции для гироскопических систем. Для них, как известно, не выполняется основное требование теоремы А. Н. Тихонова об асимптотической устойчивости присоединенной системы, чем объясняются трудности, возникающие при использовании аппарата асимптотических методов. Метод декомпозиции применяется для разделения прецессионных и нутационных движений.

Третья глава посвящена разработке алгоритма декомпозиции линейных разнотемповых систем. Доказывается существование линейного преобразования, приводящего систему к блочно-диагональному виду, т. е. производится полное разделение движений. Получены рекуррентные формулы для коэффициентов асимптотических разложений расщепляющего преобразования. Метод декомпозиции применяется для решения задачи обоснования допустимости применения прецессионных уравнений гироскопических компасов.

В четвертой главе рассматриваются квазилинейные сингулярно возмущенные дифференциальные системы. Расщепляющее преобразование для таких систем эффективно строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра с коэффициентами, представляющими собой суммы форм соответствующих порядков относительно координат быстрых переменных. Отдельно рассмотрен класс систем, линейных по быстрым переменным.

Пятая глава посвящена изучению особенностей декомпозиции краевых задач. Выделен класс краевых задач, которые не удается расщепить регулярным образом при помощи преобразования, описанного в первой главе. Для этого класса задач разработано модифицированное расщепляющее преобразование, лишенное этого недостатка.

Шестая глава посвящена исследованию вырожденных систем. Изучен вопрос о существовании интегральных многообразий таких систем. Рассмотрено несколько способов вычисления функций, описывающих интегральное многообразие: в явном, неявном и параметрическом виде. Результаты применяются к задаче управления с большим коэффициентом усиления. Изучается проблема ветвления интегральных многообразий. В этом случае каждая ветвь интегрального многообразия строится в виде асимптотического разложения по дробным степеням малого параметра.

В седьмой главе метод декомпозиции сингулярно возмущенных систем обобщается на случай систем с несколькими малыми параметрами при производных.

В восьмой главе обсуждаются особенности применения метода декомпозиции для систем, линейных по управлению, рассмотрены некоторые частные случаи.

Девятая глава посвящена применению метода декомпозиции для получения условий управляемости и наблюдаемости линейных и нелинейных двухтемповых и многотемповых систем. В качестве примера рассмотрена модель однозвенного манипулятора с упругим сочленением.

В десятой главе на основе метода декомпозиции разрабатывается алгоритм построения матричного коэффициента усиления в линейно-квадратичной задаче синтеза оптимального управления для систем с быстрыми и медленными переменными. В качестве приложений рассмотрены задачи об управлении процессом конвективного нагрева и об управлении температурным полем. При этом метод декомпозиции применяется для анализа распределенной модели. Для разнотемповых систем, линейных по быстрым переменным, производится декомпозиция краевой задачи принципа максимума на краевую задачу для медленных переменных и две начальных задачи для быстрых переменных.

В одиннадцатой главе метод декомпозиции применяется для решения задач быстродействия для линейных и нелинейных сингулярно возмущенных систем. Разрабатываются алгоритмы построения асимптотики точек переключения. Эффективность предложенных алгоритмов продемонстрирована решением задач быстродействия для магнитоэлектрического силового привода и системы связанных маятников.

Глава 1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ И МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ

1.1. Интегральное многообразие медленных движений

1.1.1. Основные понятия

Метод интегральных многообразий является удобным аппаратом исследования многомерных систем дифференциальных уравнений, использование которого позволяет решать важную для приложений задачу понижения размерности.

Приведем необходимые сведения о методе интегральных многообразий применительно к сингулярно возмущенной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y,t,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x,y,t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x \in R^m$, $y \in R^n$, $t \in R$, ε — малый положительный параметр. Функции f и g определены и непрерывны по совокупности переменных при всех $t \in R$, $x \in R^m$, $y \in D \subset R^n$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ (D — область в R^n).

Если положить в (1.1) $\varepsilon = 0$, получим порождающую или вырожденную систему

$$\dot{x} = f(x,y,t,0), \tag{1.2}$$

$$0 = g(x,y,t,0). \tag{1.3}$$

Предположим, что уравнение (1.3) имеет решение

$$y = h_0(x,t), \tag{1.4}$$

где функция $h_0(x,t)$ определена при всех $t \in R$, $x \in R^m$. Будем предполагать, что h_0 является изолированным решением уравнения (1.3), т. е. существует такое положительное число ρ, что в окрестности $\|y - h_0(x,t)\| < \rho$ нет других решений этого уравнения.

Гладкая поверхность S в $R^m \times R^n \times R$ называется интегральным многообразием системы (1.1), если любая траектория этой системы, имеющая хотя бы одну общую точку с S, целиком принадлежит поверхности S. Формально, если при $t = t_0$ точка $(x(t_0), y(t_0), t_0) \in S$, то траектория $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), t)$ целиком принадлежит S.

Для автономной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.5}$$

интегральное многообразие имеет вид $S_1 \times (-\infty, \infty)$, где S_1 — поверхность в фазовом пространстве $R^m \times R^n$. Поэтому естественно рассматривать для автономных систем интегральное многообразие как поверхность $S_1 \in R^m \times R^n$. В этом случае вместо термина «интегральное многообразие» часто используется термин «инвариантное многообразие». Название «инвариантное многообразие» естественнее, так как поверхность S_1 не меняет своего положения в фазовом пространстве $R^m \times R^n$ под действием системы (1.5). Иными словами, поверхность остается неизменной при эволюции системы (1.5) во времени.

Простейшим примером интегрального многообразия является интегральная кривая системы. Примером инвариантных многообразий являются фазовые траектории системы, в том числе стационарные состояния и предельные циклы. Расширенное фазовое пространство $R^m \times R^n \times R$, очевидно, тоже является интегральным многообразием.

Основной интерес представляют интегральные многообразия сравнительно невысокой размерности, выделяющиеся каким-либо дополнительным свойством. Наиболее часто используемое свойство — устойчивость, т. е. способность притягивать траектории системы, не принадлежащие интегральному многообразию.

Характер свойства, выделяющего тот или иной тип интегрального многообразия, зависит от целей исследования исходной системы.

Как правило, в реальных задачах интегральное многообразие, имеющее нужное свойство, построить во всем расширенном фазовом пространстве не удается. Поэтому построение интегрального многообразия осуществляется локально. Оно строится в некоторой области фазового пространства, т. е. речь идет о существовании локального интегрального многообразия.

Гладкая поверхность $S \in R^m \times R^n \times R$ называется локальным интегральным многообразием для системы (1.1), если вместе с точкой $(x(t_0), y(t_0), t_0)$ траектории $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t)$ поверхности S принадлежит участок траектории при $t \in [t_0, T]$, $t_0 < T \leqslant \infty$. С точки зрения дифференциальной геометрии интегральное многообразие S — это многообразие без края размерности меньшей, чем $n + m + 1$. Локальное интегральное многообразие — это многообразие с краем ∂S. Если начальная точка траектории принадлежит интегральному многообразию S, то вся траектория принадлежит S. Если начальная точка траектории принадлежит локальному интегральному многообразию S, то траектория либо целиком принадлежит S, либо принадлежит S до тех пор, пока она не пересечет край ∂S локального интегрального многообразия. В дальнейшем мы не будем выделять терминологически локальное интегральное многообразие.

Среди интегральных многообразий системы (1.1) нас будут интересовать только m-мерные интегральные многообразия (многообразия размерности медленных переменных), которые представимы в виде графика вектор-функции $y = h(x, t, \varepsilon)$. При этом предполагается, что $h(x, t, \varepsilon)$ достаточно гладко зависит от малого параметра ε.

В случае автономной системы интегральное многообразие разыскивается в виде графика функции $y = h(x, \varepsilon)$. В этом случае m является геометрической размерностью многообразия. В случае неавтономной системы мы, следуя установившейся традиции, не учитываем t (время) в качестве дополнительной единицы размерности интегрального многообразия. В этом случае m-мерное интегральное многообразие имеет геометрическую размерность $m + 1$. Кроме того, интегральное многообразие можно представлять себе не как фиксированную поверхность, а как параметрическое семейство близко расположенных поверхностей. Параметром семейства является ε.

Интегральные многообразия указанного выше вида называются многообразиями медленных движений. Название соответствует традициям, установившимся в нелинейной механике. Интегральное многообразие можно понимать как поверхность, на которой достигается локальный минимум фазовой скорости, т. е. как поверхность наиболее длительных медленных фазовых изменений (движений).

Движение по интегральному многообразию осуществляется в соответствии с уравнениями

$$\dot{x} = f(x, h(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon). \tag{1.6}$$

Если $x(t, \varepsilon)$ — решение этого уравнения, то пара $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$, где $y(t, \varepsilon) = h(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$, является решением исходной системы (1.1), так как эта пара задает траекторию на интегральном многообразии.

Из соотношения

$$y = h(x, t, \varepsilon), \tag{1.7}$$

которое выполняется на интегральном многообразии, следует

$$\varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(x, h(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon) = g(x, h, t, \varepsilon). \tag{1.8}$$

Это уравнение получается подстановкой h вместо y во второе уравнение системы (1.1).

При $\varepsilon = 0$ соотношение (1.6) переходит в соотношение

$$\dot{x} = f(x, h(x, t, 0), t, 0), \tag{1.9}$$

соотношение (1.7) в $y = h(x, t, 0)$, а соотношение (1.8) — в

$$g(x, h(x, t, 0), t, 0) = 0. \tag{1.10}$$

В нулевом приближении $y = h(x, t, \varepsilon)$ дает $y = h_0(x, t)$, а соотношения (1.9), (1.10) определяют в нулевом приближении вырожденную систему (1.2), (1.3).

1.1.2. Приведение системы к специальному виду

Будем предполагать, что для системы (1.1) выполнены следующие условия:

I. Уравнение $g(x,y,t,0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(x,t)$ при $t \in R$, $x \in R^m$.

II. В области $\Omega_0 = \{(x,y,t,\varepsilon) | \, x \in R^m, \ \|y - h_0(x,t)\| < \rho, \ t \in R, \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$ функции f, g и h_0 равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по всем переменным до $(k+2)$-го порядка включительно ($k \geqslant 0$).

III. Собственные значения $\lambda_i(x,t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ матрицы

$$B(x,t) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x,t), t, 0)$$

подчиняются неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_i(x,t) \leqslant -2\gamma < 0. \tag{1.11}$$

Для дальнейшего изучения необходимо преобразовать систему (1.1) при помощи замены $y = z + h_0(x,t)$ к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x,z,t,\varepsilon), \\ \varepsilon \dot{z} &= B(x,t)z + Z(x,z,t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$X(x,z,t,\varepsilon) = f(x, z + h_0(x,t), t, \varepsilon),$$

$$Z(x,z,t,\varepsilon) = g(x, z + h_0(x,t), t, \varepsilon) - \\ - \frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x,t), t, 0)z - \varepsilon \frac{\partial h_0}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial h_0}{\partial x}(x,t) X(x,z,t,\varepsilon).$$

Используя формулу разложения векторной функции в ряд Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, можно представить функцию Z в следующем виде:

$$Z(x,z,t,\varepsilon) = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, h_0(x,t) + \theta z, t, 0)(1-\theta) z \right] z \, d\theta + \\ + \varepsilon \left[\int\limits_0^1 \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, h_0(x,t) + z, t, \theta\varepsilon) \, d\theta - \frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial h_0}{\partial x}(x,t) X(x,z,t,\varepsilon) \right].$$

Пользуясь условием II, нетрудно установить следующие неравенства:

$$\|X(x,z,t,\varepsilon)\| \leqslant A, \quad \|Z(x,z,t,\varepsilon)\| \leqslant A(\|z\|^2 + \varepsilon), \tag{1.13}$$

$$\|B(x,t)\| \leqslant A, \tag{1.14}$$

$$\big\|X(x_1, z_1, t, \varepsilon) - X(x_2, z_2, t, \varepsilon)\big\| \leqslant A(\|x_1 - x_2\| + \|z_1 - z_2\|), \tag{1.15}$$

$$\|Z(x_1, z_1, t, \varepsilon) - Z(x_2, z_2, t, \varepsilon)\| \leqslant A(\|\overline{z}\| + \varepsilon)(\|x_1 - x_2\| + \|z_1 - z_2\|), \tag{1.16}$$

$$\big\|B(x_1, t_1) - B(x_2, t_2)\big\| \leqslant A(\|x_1 - x_2\| + |t_1 - t_2|), \tag{1.17}$$

где A — некоторое положительное число, $\|\overline{z}\| = \max(\|z_1\|, \|z_2\|)$. Неравенства (1.13)–(1.17) справедливы при всех значениях t, t_1, t_2, x, x_1, x_2, $\|z_1\| \leqslant \rho$, $\|z_2\| \leqslant \rho$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Ниже через Ω обозначается область $\{(x, z, t, \varepsilon) | x \in R^m,\ \|z\| \leqslant \rho,\ t \in R,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, в которой определены правые части системы (1.12).

1.1.3. Операторное уравнение для интегрального многообразия

В этом параграфе мы будем изучать интегральные многообразия медленных движений системы (1.12), которые описываются уравнением вида

$$z = p(x, t, \varepsilon). \tag{1.18}$$

При этом будем предполагать, что функция p определена в области $\Omega_1 = \{(x, t, \varepsilon) |\, x \in R^m,\ t \in R,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, непрерывна в этой области по t и ε, удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной, не зависящей от t:

$$\|p(x_1, t, \varepsilon) - p(x_2, t, \varepsilon)\| \leqslant \Delta \|x_1 - x_2\| \tag{1.19}$$

и ограничена:

$$\|p(x, t, \varepsilon)\| \leqslant D. \tag{1.20}$$

Такие интегральные многообразия будем в дальнейшем называть (D, Δ)-многообразиями.

Если траектория $(x(t), z(t), t)$ лежит на интегральном многообразии (1.18), то $z(t) = p(x(t), t, \varepsilon)$. Функции $x(t)$ и $z(t) = p(x(t), t, \varepsilon)$ должны удовлетворять системе (1.12). При этом первое уравнение системы принимает вид

$$\dot{x} = X(x, p(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon). \tag{1.21}$$

Из (1.15) и (1.19) получаем неравенство

$$\|X(x_1, p(x_1, t, \varepsilon), t, \varepsilon) - X(x_2, p(x_2, t, \varepsilon), t, \varepsilon)\| \leqslant A(1 + \Delta)\|x_1 - x_2\|. \tag{1.22}$$

Следовательно, правая часть уравнения (1.21), ограниченная по норме числом A, удовлетворяет условию Липшица по переменной x с постоянной $A(1 + \Delta)$, не зависящей от t, и поэтому уравнение (1.21) при каждом $x_0 \in R^m$ имеет единственное решение

$$\varphi(t) = \Phi(t, \tau, x_0, \varepsilon | p), \quad \Phi(\tau, \tau, x_0, \varepsilon | p) = x_0,$$

определенное при $t \in R$.

Функция $z = p(\varphi(t), t, \varepsilon)$ является ограниченным на всей оси решением уравнения

$$\varepsilon \dot{z} = B(\varphi(t), t) z + Z(\varphi(t), z, t, \varepsilon) \tag{1.23}$$

и поэтому должна удовлетворять интегральному уравнению [54, 169]

$$z(\tau) = \varepsilon^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\tau} U_\varphi(\tau, t, \varepsilon) Z(\varphi(t), z(t), t, \varepsilon) dt, \tag{1.24}$$

где $U_\varphi(t, s, \varepsilon)$, $(U_\varphi(s, s, z) = I)$ — фундаментальная матрица линейного однородного уравнения

$$\varepsilon \dot{z} = B(\varphi(t), t) z.$$

Ниже будет установлена следующая оценка:

$$\|U_\varphi(\tau, t, \varepsilon)\| \leqslant K e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}(\tau - t)}, \quad K \geqslant 1, \quad -\infty < t \leqslant \tau < +\infty, \tag{1.25}$$

которая обеспечивает сходимость несобственного интеграла в (1.24).

Положим $x_0 = x$ и $\varphi(t) = \Phi(t, \tau, x, \varepsilon | p)$. Тогда для $p(x, t, \varepsilon)$ из (1.24) получим уравнение

$$p(x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\tau} U_\varphi(\tau, t, \varepsilon) Z(\varphi(t), p(\varphi(t), t, \varepsilon), t, \varepsilon) dt. \tag{1.26}$$

С другой стороны, если уравнение (1.26) имеет решение, удовлетворяющее (1.19), (1.20), то это решение определяет (D, Δ)-многообразие системы (1.12). Действительно, для любой точки (x_0, z_0, t_0), лежащей на поверхности $z = p(x, t, \varepsilon)$, т. е. удовлетворяющей соотношению $z_0 = p(x_0, t_0, \varepsilon)$, уравнение (1.21) имеет решение $x = \varphi(t) = \Phi(t, t_0, x_0, \varepsilon | p)$. Из (1.26) и соотношения

$$\Phi(t, \tau, \Phi(\tau, t_0, x_0, \varepsilon | p), \varepsilon | p) = \Phi(t, t_0, x_0, \varepsilon | p)$$

следует, что $z = p(\varphi(t), t, \varepsilon)$ является решением уравнения (1.23). Таким образом, уравнение (1.26) можно рассматривать как операторное уравнение для отыскания функции p.

1.1.4. Интегральные неравенства

В дальнейшем будет использоваться следующее утверждение [175].

Теорема 1.1 (об интегральном неравенстве). *Пусть непрерывная и положительная на сегменте $[t_0, t_0 + T]$ функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$u(t) \leqslant f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} [\varphi_1(t)\varphi_2(s)u(s) + \psi(t, s)] ds,$$

где $f(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi(t, s)$ — непрерывные, неотрицательные при $t \in [t_0, t_0 + T]$ функции. Тогда имеем

$$u(t) \leqslant u_0(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,s)ds +$$
$$+ \varphi_1(t) \int_{t_0}^{t} \varphi_2(\tau) f(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^{t} \varphi_1(s)\varphi_2(s)ds\right) d\tau +$$
$$+ \varphi_1(t) \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} \varphi_1(s)\varphi_2(s)ds\right) \varphi_2(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} \psi(t,s)ds\right) d\tau.$$

Заметим, что T может быть выбрано сколь угодно большим, поэтому оценка справедлива при всех $t \geqslant t_0$, если функции f, φ_1, φ_2, ψ определены при $t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty$. Таким же образом можно рассмотреть неравенство

$$u(t) \leqslant f(t) + \int_{t}^{t_0} \left[\varphi_1(t)\varphi_2(s)u(s) + \psi(t,s)\right] ds$$

при $t \leqslant t_0$ и получить оценку $u(t) \leqslant u_0(t)$.

Введем в рассмотрение метрическое пространство $C(D, \Delta)$ ограниченных и непрерывных в Ω_1 функций $p(x,t,\varepsilon)$, принимающих значения в R^n и удовлетворяющих условиям (1.19), (1.20) с метрикой

$$d(p, \overline{p}) = \sup_{\Omega_1} \|p(x,t,\varepsilon) - \overline{p}(x,t,\varepsilon)\|.$$

Для произвольных p, $\overline{p} \in C(D, \Delta)$ рассмотрим уравнение (1.21) и установим справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть $A(1+\Delta) \leqslant \alpha$, тогда при всех $\tau \geqslant t$ имеет место неравенство*

$$\|\Phi(t,\tau,x,\varepsilon|p) - \Phi(t,\tau,\overline{x},\varepsilon|\overline{p})\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x - \overline{x}\| e^{\alpha(\tau - t)} + \frac{1}{1+\Delta} d(p,\overline{p})(e^{\alpha(\tau-t)} - 1). \quad (1.27)$$

Доказательство. Заметим, что функции

$$\varphi(t) = \Phi(t,\tau,x,\varepsilon|p), \quad \overline{\varphi}(t) = \Phi(t,\tau,\overline{x},\varepsilon|\overline{p})$$

удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\varphi(t) = x + \int_{\tau}^{t} X(\varphi(s), p(s,\varphi(s),\varepsilon), s, \varepsilon) ds$$
$$\overline{\varphi}(t) = \overline{x} + \int_{\tau}^{t} X(\overline{\varphi}(s), p(s,\overline{\varphi}(s),\varepsilon), s, \varepsilon) ds.$$

Используя оценки (1.16), (1.19) и (1.20), при $\tau \geqslant t$ получаем

$$\|\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)\| \leqslant \|x - \overline{x}\| + \int_t^\tau A[(1+\Delta)\|\varphi(s) - \overline{\varphi}(s)\| + d(p, \overline{p})]ds.$$

В силу теоремы об интегральном неравенстве получаем требуемую оценку (1.27). При этом полагаем $f(t) = \|x - \overline{x}\|$, $\varphi_1(t) = A(1+\Delta)$, $\varphi_2(s) = 1$, $\psi(t,s) = Ad(p, \overline{p})$, $\tau \geqslant t$, а роль $u_0(t)$ играет функция, стоящая в правой части неравенства (1.27). ■

1.1.5. Оценки фундаментальных матриц

Для обоснования оценки (1.25) докажем предварительно следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть матрица $A(t)$ при $-\infty < t < \infty$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по t с константой q. Если действительные части собственных значений матрицы $A(t)$ при всех t не превосходят числа $-2\gamma < 0$, то существуют такие положительные числа K и ε_0, что фундаментальная матрица $U(t,s,\varepsilon)$, $U(s,s,\varepsilon) = I$ уравнения $\varepsilon\dot{z} = A(t)z$ удовлетворяет неравенству*

$$\|U(t,s,\varepsilon)\| \leqslant K\exp(-\frac{\gamma}{\varepsilon}(t-s))$$

при всех $-\infty < s \leqslant t < \infty$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Доказательство. При любом фиксированном $t_0 \in R$ справедливо тождество

$$U(\tau,t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}A(t_0)(\tau-t)} + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau e^{\frac{1}{\varepsilon}A(t_0)(\tau-s)}\left[A(s) - A(t_0)\right]U(s,t,\varepsilon)ds. \tag{1.28}$$

Из условий следует, что для некоторого $K \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|e^{\frac{1}{\varepsilon}A(t_0)(\tau-t)}\| \leqslant Ke^{-\frac{3\gamma}{2\varepsilon}(\tau-t)} \tag{1.29}$$

при всех $-\infty < t \leqslant \tau < \infty$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и любых $t_0 \in R$. Для фиксированных τ и t положим $t_0 = \tau$. Тогда из (1.28), (1.29) при $\tau \geqslant t$ получаем

$$\begin{aligned}\|U(\tau,t,\varepsilon)\| \leqslant Ke^{-\frac{3\gamma}{2\varepsilon}(\tau-t)} &+ \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau Ke^{-\frac{3\gamma}{2\varepsilon}(\tau-s)}\|A(\tau) - A(s)\|\|U(s,t,\varepsilon)\|ds \leqslant \\ &\leqslant Ke^{-\frac{3\gamma}{2\varepsilon}(\tau-t)} + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau Kq\varepsilon^{-\frac{3\gamma}{2\varepsilon}(\tau-s)}\|U(s,t,\varepsilon)\|(\tau-s)ds.\end{aligned}$$

Последнее неравенство удобно переписать в виде

$$u(\tau) \leqslant K + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_t^\tau Kq(\tau - s)u(s)ds,$$

где

$$u(\tau) = \|U(\tau, t, \varepsilon)\| e^{\frac{3\gamma}{2\varepsilon}(\tau - t)}.$$

Из теоремы об интегральном неравенстве следует неравенство

$$u(\tau) \leqslant u_0(\tau) = \frac{1}{2}K\left[e^{\sqrt{Kq\varepsilon^{-1}}\,(\tau-t)} + e^{-\sqrt{Kq\varepsilon^{-1}}\,(\tau-t)}\right]$$

или

$$\|U(\tau, t, \varepsilon)\| \leqslant \frac{1}{2}Ke^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}(\tau-t)}\left[e^{-(\frac{\gamma}{2\varepsilon}+\sqrt{Kq\varepsilon^{-1}}\,)(\tau-t)} + e^{-(\frac{\gamma}{2\varepsilon}-\sqrt{Kq\varepsilon^{-1}}\,)(\tau-t)}\right].$$

Если $\varepsilon_0 < \gamma^2/4Kq$, то при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и $t \leqslant \tau$ выражение в квадратных скобках не превосходит двух, т. е. утверждение леммы справедливо. ■

Для конечного промежутка это утверждение было установлено в [243], а на бесконечный промежуток распространено в [169].

Хорошо известно, что экспоненциально убывающая оценка фундаментальной матрицы линейной однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x$$

с собственными числами матрицы $A(t)$ в левой открытой комплексной полуплоскости, справедливая в случае постоянной матрицы A, для систем с переменными коэффициентами, вообще говоря, не имеет места [19]. Доказанная выше лемма устанавливает что фундаментальные матрицы линейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем с переменными коэффициентами оцениваются так же, как и фундаментальные матрицы систем с постоянными коэффициентами. Это не должно рассматриваться как неожиданный факт, поскольку дифференциальная система вида

$$\varepsilon\dot{x} = A(t)x$$

с малым множителем при производной может рассматриваться как система с медленно меняющимися коэффициентами

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\varepsilon\tau)x,$$

где $\tau = t/\varepsilon$. Последняя система может рассматриваться как система с «почти постоянной» матрицей A.

Построим класс систем дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon\dot{x} = A(t)x,$$

обладающих следующим свойством. Предположим, что вещественные части собственных значений матрицы $A(t)$ при всех t не превосходят числа -2γ, все характеристические показатели системы при достаточно малых значениях положительного параметра ε отрицательны, а при $\varepsilon = 1$ имеется хотя бы один положительный характеристический показатель. Тем самым будет продемонстрирована важная особенность сингулярно возмущенных систем. Ограничимся приводимыми системами [55], т. е. будем предполагать существование такой матрицы Ляпунова $U(t)$, что новая переменная y удовлетворяет системе с постоянными коэффициентами $\varepsilon\dot{y} = By$, где $B = U^{-1}AU - \varepsilon U^{-1}\dot{U}$. При этом будем решать обратную задачу, т. е. по заданной матрице $B(\varepsilon)$ будем находить матрицу $A(t)$.

Пусть $B(\varepsilon) = B_0 + \varepsilon B_1$, вещественные части собственных значений матрицы B_0 отрицательны, а матрица B_1 выбрана так что матрица $B(1) = B_0 + B_1$ имеет хотя бы одно собственное значение с положительной вещественной частью. При выборе матриц B_0 и B_1 можно руководствоваться следующими соображениями. Рассмотрим сначала случай двумерного вектора x. Пусть $\widetilde{B}$ — некоторая (2×2)-матрица, предварительно приведенная к диагональной форме $\widetilde{B} = \mathrm{diag}\{\alpha, -\alpha - \delta\}$, $\alpha \geqslant 0$, $\delta > 0$, тогда при помощи матрицы

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

при достаточно больших значениях β матрица

$$B_0 = \widetilde{B} + \widehat{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha - \delta \end{pmatrix}$$

может быть сделана устойчивой. Для этого достаточно выбрать β из неравенства $\beta^2 > \alpha^2 + \alpha\delta$. Если положить $B(1) = \widetilde{B}$ и $B_1 = -\widehat{B}$, то требуемые условия выполнены, так как матрица $B(1)$ имеет одно положительное собственное число α и одно отрицательное $-\alpha - \delta$, а собственные числа матрицы B_0 имеют отрицательные вещественные части. Распространить этот результат на случай системы произвольной конечной размерности не представляет труда, если исходить из предположений о том, что матрица B_1 приводится к вещественной диагональной форме, при этом для каждого положительного диагонального элемента найдется соответствующий отрицательный, модуль которого больше положительного элемента. Без ограничения общности можно считать такие положительный и отрицательный элемент соседними и с соответствующими двумерными диагональными блоками поступить так, как это было сделано выше.

Теперь, исходя из соотношения $A = U(B + \varepsilon U^{-1}\dot{U})U^{-1} = BU^{-1} + \varepsilon\dot{U}\,U^{-1} = UB_0U^{-1} + \varepsilon UB_1U^{-1} + \varepsilon\dot{U}U^{-1}$, потребуем выполнения равенства $\dot{U} + UB_1 = 0$. Из ограниченности матрицы Ляпунова $U(t)$ с необходимостью следует, что собственные числа матрицы B_1 должны располагаться на мнимой оси, что имеет место, например, для косо-