Е. А. ВИНОГРАДОВ
И. А. ДОРОФЕЕВ

ТЕРМОСТИМУЛИРОВАННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2010

УДК 535.43 + 681.069
ББК 22.34
В 49

Виноградов Е. А., Дорофеев И. А. **Термостимулированные электромагнитные поля твердых тел.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 484 с. — ISBN 978-5-9221-1212-3.

Монография посвящена систематическому изложению основ физики флуктуационных электромагнитных полей твердых тел и их связи с фундаментальными явлениями в природе. С единых позиций излагаются современные теоретические модели тепловых полей и разнообразные способы описания их корреляционных свойств. На основе богатого экспериментального материала демонстрируется однозначная связь резонансных особенностей в спектре состояний термостимулированных полей, генерируемых твердыми телами, с их собственными модами — поляритонами. Детально исследованы особенности спектральных свойств бегущих и квазистационарных волн единого термостимулированного электромагнитного поля конденсированной среды. Экспериментальные результаты качественно и количественно согласуются с основными положениями феноменологических теоретических моделей. В рамках флуктуационной электродинамики рассмотрен ряд фундаментальных задач, связанных с дисперсионным взаимодействием тел, переносом энергии между телами, дифракцией полей с разными корреляционными свойствами на отверстии и свойствами квантовой системы вблизи поверхности твердого тела.

Для специалистов в области флуктуационной электродинамики, спектроскопии твердого тела, физики поверхности, а также для аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов.

ISBN 978-5-9221-1212-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

История физики тепловых электромагнитных полей насчитывает более ста лет. В классических работах Л. Больцмана, Г. Кирхгофа, Дж. Рэлея, Дж. Джинса, В. Вина, Й. Стефана, М. Планка, А. Эйнштейна были заложены фундаментальные основы современной науки о термостимулированных полях твердых тел. Исследование свойств равновесного теплового излучения привело к созданию квантовой механики и квантовой электродинамики и оформлению современного облика физической науки. К середине двадцатого века экспериментально и теоретически были детально исследованы спектральные свойства тепловых электромагнитных флуктуаций в системе в двух крайних случаях, когда размеры рассматриваемой системы либо много больше, либо много меньше характерной длины волны спектра флуктуаций. Результатом исследований стали широко известные законы Найквиста и Кирхгофа, описывающие спектральное распределение равновесных электромагнитных флуктуаций в системе в квазистационарном и геометрооптическом приближениях. В середине прошлого века С. М. Рытовым была создана общая корреляционная теория электромагнитных флуктуаций на основе использования уравнений Дж. Максвелла. В общей теории Рытова дается рецепт нахождения спектра флуктуаций в системе при произвольном соотношении между ее характерным размером и характерной длиной волны теплового поля, при этом законы Найквиста и Кирхгофа следуют как два противоположных асимптотических варианта общей теории. Знаменательным этапом в развитии физики флуктуационных явлений стало установление Х. Калленом и Т. Велтоном флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ), связывающей спектральную плотность флуктуаций динамических характеристик системы с ее диссипативными свойствами. На основе ФДТ теория равновесных тепловых электромагнитных флуктуаций получила свое дальнейшее развитие в работах М. Л. Левина и С. М. Рытова. В результате был установлен так называемый обобщенный закон Кирхгофа, связывающий спектр флуктуаций теплового поля на любом расстоянии от поверхности тела с регулярным электромагнитным полем точечного диполя. Была выявлена ключевая роль функций Грина в задаче определения спектра равновесных электромагнитных флуктуаций в системе. Важнейшая роль функций Грина и их связь с флуктуациями динамических переменных в задачах квантовой статистической физики, квантовой электродинамики была продемонстрирована в работах

Н. Н. Боголюбова, Дж. Швингера, Р. Кубо. В результате многолетних исследований ко второй половине прошлого столетия теория термостимулированных электромагнитных флуктуаций приобрела законченный вид. Альтернативные, но по существу эквивалентные теоретические подходы и примеры применения к разнообразным проблемам описаны в монографиях и статьях М. Л. Левина и С. М. Рытова, Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица, Л. П. Питаевского, И. Е. Дзялошинского, Г. С. Агарваля. Одновременно начали развиваться экспериментальные методы исследования инфракрасного термостимулированного излучения монокристаллов, пленок и многослойных структур. Разумеется, мы не имеем практической возможности перечислить работы всех исследователей, сделавших тот или иной вклад в развитие теории электромагнитных флуктуаций, поэтому ограничились примерами, на наш взгляд, первостепенной важности.

К настоящему времени весьма актуальным является экспериментальное и теоретическое исследование роли термостимулированных электромагнитных флуктуаций в разнообразных процессах вблизи поверхности твердого тела, а также связи спектральных особенностей флуктуационных полей вне тела с внутренней фононной и электронной динамикой самого рассматриваемого тела — источника тепловых полей. Тепловые колебания ионов и электронов конденсированных сред сопровождаются рождением флуктуационного электромагнитного поля. Связанное состояние механического (кулоновского) колебательного движения зарядов в кристаллах и пленках с рожденным этим движением электромагнитным полем и называется поляритоном, который является собственным состоянием любого объекта исследований в оптических экспериментах. В зависимости от величины волнового вектора поляритона его электромагнитное поле разделяют на радиационное (распространяющее в свободном пространстве или в дальнем поле) и на нерадиационное (квазистационарное или ближнее поле).

Предлагаемая монография представляет собой попытку систематизировать основные сведения о теории термостимулированных электромагнитных полей, известные авторам по доступной литературе, детально описать найденные закономерности при экспериментальном исследовании особенностей в спектрах тепловых полей и дать им непротиворечивые объяснения, а также привести ряд примеров применения теоретических разработок в решении некоторых прикладных задач, полученных, в том числе, и авторами этой монографии.

Монография состоит из семи глав, четырех приложений, 117 рисунков и графиков, вспомогательной таблицы. В первой главе описана статистическая модель термостимулированного поля и приведены особенности разнообразных теоретических методов расчета спектральных характеристик флуктуационных электромагнитных полей, генерируемых твердыми телами. Вторая глава монографии посвящена описанию свойств диэлектрической функции, являющейся основным элементом всех феноменологических теорий, и получению модельных выражений для диэлектрической функции на основе решения кинетических уравнений в том или ином приближении или решения уравнения для матрицы плотности. В качестве справочного материала приведены формулы для разнообразных времен релаксации электронной подсистемы и констант ангармонического распада для фононной подсистемы твердого тела. Учитывая важность на практике поверхностей раздела, приведены выражения для коэффициентов Френеля, в том числе с учетом эффектов пространственной дисперсии в первом приближении, и основные результаты теории поверхностных волн. В третьей главе приведены аналитические выражения для расчета спектральных характеристик тепловых полей плоскослоистых тел и детально рассмотрены их особенности на примере материалов с реальными оптическими свойствами. Четвертая, пятая и шестая главы посвящены в основном экспериментальным исследованиям оптических свойств кристаллов и пленок методами ИК спектроскопии отражения-поглощения и термостимулированного излучения, выполненным в Институте спектроскопии РАН. В четвертой главе описаны методы исследования спектров теплового излучения и их связи с фононными поляритонами ограниченных кристаллов, приведены разнообразные способы обработки экспериментальных спектров отражения. В пятой главе экспериментально и теоретически исследованы собственные состояния пленки диэлектрика на металлической подложке. Приведены результаты детального изучения влияния проводимости подложки, температуры образца, примесей в пленке на особенности в спектрах излучения, а также приведены примеры исследования оптических свойств гетероструктур в ИК области спектра. Шестая глава посвящена изучению нерадиационных состояний в кристаллах и пленках. Описаны особенности исследования термостимулированных спектров отражения и излучения поляритонами с использованием призмы неполного внутреннего отражения, помещенной над образцом. На примере изучения конкретных материалов исследованы спектры объемных и поверхностных поляритонов различных монокристаллов и пленок диэлектриков на металле. Учитывая важность в спектрах термостимулированного поля резонансов, связанных с поверхностными, интерференционными и волноводными поляритонами, приведены также альтернативные способы их исследования, в частности, методом комбинационного рассеяния света. Седьмая глава полностью посвящена важным приложениям теории флуктуационных электромагнитных полей. В частности, рассмотрены задачи о дисперсионном взаимодействии тел в разных термодинамических условиях, задачи об обмене энергией между телами, разделенными вакуумным промежутком, задача о дифракции поля с разной статистикой на отверстии в тонкой пленке и задача о свойствах квантовой системы вблизи поверхности твердого тела, таких, как сдвиг и уширение ее уровней, изменение времени релаксации. В приложениях приведены необходимые сведения о корреляционных характеристиках полей и понятиях, с ними связанных. Также приведены детали решения граничных задач электродинамики и альтернативные способы решения, широко применяемые для задач с произвольной геометрией.

Необходимо отметить, что в монографии все аналитические выражения для спектральных характеристик записаны через коэффициенты Френеля, имеющие четкий физический смысл в электродинамике поверхности.

Е. А. Виноградовым написаны главы 4–6, И. А. Дорофеевым написаны главы 1–3 и 7, а также приложения к ним.

Авторы благодарны фонду РФФИ за финансовую поддержку части исследований и за издание этой монографии.

Глава 1

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕПЛОВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, ГЕНЕРИРУЕМОГО МАКРОСКОПИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ

§ 1.1. Статистическая модель термостимулированных электромагнитных полей и их основные характеристики

1.1.1. Введение. Электромагнитные флуктуации являются частью фундаментального явления в природе — броуновского движения. В теоретических работах А. Эйнштейна и М. Смолуховского и П. Ланжевена [1–3] была выяснена флуктуационная природа этого движения и исследованы его основные статистические закономерности.

История исследования электромагнитных флуктуаций, или электрических шумов, хорошо известна в литературе [4–7]. В начале двадцатого века были надежно установлены закономерности в двух, прямо противоположных случаях, а именно, когда характерная длина волны в задаче много больше характерного ее размера, и в прямо противоположном случае, относящемся к геометрической оптике, когда длина волны много меньше характерного масштаба задачи. В первом случае, соответствующем квазистационарной области спектра, была получена формула Найквиста, описывающая спектральную интенсивность шума в произвольном двухполюснике с заданным импедансом. Во втором случае получены формулы Планка и Кирхгофа, описывающие спектральную плотность энергии и интенсивность равновесного излучения. При этом один из законов Кирхгофа фактически дает возможность определения спектральной интенсивности излучения тела в менее нагретое пространство, т. е. связан с термодинамически неравновесной ситуацией. Это классический закон Кирхгофа, согласно которому интенсивность излучения тела в некотором направлении на фиксированной частоте равна

$$I(\omega, \theta) = I_0(\omega)\,[1 - R(\omega, \theta)], \tag{1.1.1}$$

где угол θ — угол между направлением нормали к поверхности и направлением на регистрирующее устройство, $R(\omega, \theta)$ — коэффициент отражения тела на заданной частоте поля и в направлении, задаваемом углом θ, $I_0(\omega)$ — равновесная интенсивность излучения, не зависящая от углов падения и материала черной полости.

Из (1.1.1) можно найти мощность, переносимую через единичную площадку в фиксированном телесном угле $\Delta\Omega$, определяемом, например, геометрическими особенностями приемника излучения в эксперименте,

$$P(\omega, \Delta\Omega) = \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} I_0(\omega)\,[1 - R\,(\omega, \theta)] \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi. \tag{1.1.2}$$

Телесный угол, вырезаемый приемником излучения, ось которого образует с нормалью к площадке угол θ,

$$\Delta\Omega = \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta \, d\phi, \tag{1.1.3}$$

а интенсивность излучения черного тела в вакууме равна

$$I_0(\omega) = \frac{c}{4\pi}\, u_{0\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp\left[\hbar\omega/k_B T\right] - 1}\right), \tag{1.1.4}$$

где $u_{0\omega}$ — спектральная плотность равновесного излучения, c — скорость света в вакууме, k_B — константа Больцмана, T — температура равновесной системы.

Тогда относительная плотность мощности излучения на данной частоте в заданный телесный угол равна

$$\frac{P(\omega, \Delta\Omega)}{P_0(\omega, \Delta\Omega)} = \frac{\int\limits_{\phi_1}^{\phi_2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} [1 - R\,(\omega, \theta)] \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{\int\limits_{\phi_1}^{\phi_2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi}, \tag{1.1.5}$$

где $P_0(\omega, \Delta\Omega)$ — спектральная плотность мощности излучения черного тела на заданной частоте в заданный телесный угол.

Необходимо отметить, что современные феноменологические теории теплового излучения дают совершенно тот же результат для его спектрального состава в заданный телесный угол, что и классическая модель теплового излучения Кирхгофа. В этом смысле эти теории содержат закон Кирхгофа, описывающего свойства поля бегущих, или распространяющихся, волн в качестве своего предельного случая, дополняя общую теорию флуктуационного электромагнитного поля описанием свойств его квазистационарной части. Более того, разработаны теоретические методы расчета пространственно-временных корреляционных характеристик тепловых полей на любых расстояниях от исследуемых тел произвольных геометрических форм.

Исследование электродинамических флуктуаций является важной частью современной фундаментальной и прикладной науки, поскольку именно флуктуации динамических переменных системы определяют большой класс важнейших физических явлений. В частности, флуктуациями обеспечивается ван-дер-ваальсово взаимодействие тел, сила Казимира, которая может быть рассмотрена как частный случай ван-дер-ваальсова взаимодействия, перенос тепла между телами, разделенными вакуумным промежутком, захват атомов, молекул, когерентных материальных состояний в электромагнитных ловушках, а также целый ряд важнейших физико-химических явлений вблизи поверхности конденсированных сред, таких, как процессы адсорбции и десорбции атомов и молекул. При этом электромагнитные флуктуации приводят к изменению условий и характеристик спонтанного излучения атомов и молекул вблизи поверхности, к сдвигу их уровней, полному или частичному снятию вырождения, что может существенно изменить динамику явлений. Необходимо особо подчеркнуть, что исследования резонансных состояний в спектрах термостимулированных полей позволяет находить собственные моды системы — ее объемные и поверхностные поляритоны, свойства которых определяются всей совокупностью электродинамических и геометрических характеристик этой системы.

1.1.2. Особенности статистической модели случайных электромагнитных полей. К настоящему времени достаточно детально развита корреляционная теория свойств тепловых электромагнитных полей, индуцированных нейтральными макроскопическими телами. Электронейтральность тела предполагает отсутствие в среднем флуктуационной локальной плотности заряда, $\langle \rho^{\text{fluct}}(\vec{r}, t)\rangle = 0$, и, как следствие закона сохранения заряда, — средней флуктуационной плотности тока, $\left\langle \vec{j}^{\,\text{fluct}}(\vec{r}, t)\right\rangle = 0$, где $\vec{r}$ координата точки внутри тела. Соответственно равны нулю в среднем запаздывающие векторный и скалярный потенциалы в некоторой точке $\vec{R}$ пространства вне тела, $\left\langle \vec{A}^{\text{fluct}}(\vec{R}, t)\right\rangle = 0$, $\left\langle \phi^{\text{fluct}}(\vec{R}, t)\right\rangle = 0$. В свою очередь равенство нулю в среднем запаздывающих потенциалов означает равенство нулю средней величины электромагнитного поля. При этом другие усредненные характеристики, например, квадратичные по полю, могут не быть равными нулю. Физический смысл этого состоит в том, что известные квадратичные характеристики теплового электромагнитного поля определяют его энергию, имеющую конечную величину, отличную от нуля, если источник поля — макроскопическое тело — нагрето до некоторой температуры и является резервуаром энергии, существующей в разных видах. Например, в виде тепловой энергии движения ядер решетки тела и электронов, в виде электромагнитной энергии полей внутри и вне тела, генерируемых зарядами и токами, имеющими случайную, флуктуационную природу возникновения.

Как правило, в экспериментах регистрируются усредненные характеристики полей в вакууме, на некотором расстоянии от нагретых тел. Теоретическая модель предполагает, что источник термостимулированного флуктуационного электромагнитного поля представляет собой набор независимых излучателей, испускающих волны со случайными амплитудами, фазами и поляризациями, причем каждый элементарный излучающий объем испускает немонохроматические волны. Результирующее поле меняется сложным, случайным образом в пространстве и во времени.

В основе статистической модели флуктуационных электромагнитных полей лежит фундаментальная теорема теории вероятностей — центральная предельная теорема, см., например, [5]. Это название объединяет совокупность теорем различной степени общности и применимости, которые позволяют ответить на вопрос о том, как распределена сумма независимых случайных величин. В наиболее общей форме анализ этого вопроса был проведен А. М. Ляпуновым. Он доказал, что при некоторых условиях и неограниченном росте числа слагаемых нормированной суммы неодинаково распределенных независимых случайных величин распределение такой суммы стремится к нормальному закону. Поэтому разумно предположить, что источник теплового поля — макроскопическое тело — условно можно разделить на независимо излучающие элементарные объемы, и при этом все условия центральной предельной теоремы оказываются выполненными. В этом случае случайные электромагнитные поля принадлежат к классу нормальных, у которых все n-мерные распределения вероятностей являются гауссовыми, и для их исчерпывающего статистического описания достаточно знать лишь двумерную плотность вероятности. Поэтому в описании статистических характеристик тепловых полей особая роль принадлежит корреляционной теории случайных стационарных процессов, в которой рассматриваются только одномерное и двумерное распределения. Стационарность процесса означает, что средняя величина случайного поля является константой, и, в силу описанной физической модели, должна быть положена равной нулю. Корреляционная функция компонент случайного стационарного поля будет зависеть только от разности моментов времени и однозначно определять спектральный состав поля через теорему Винера–Хинчина [5]. В литературе используются различные определения для средних произведений полей, взятых в разных пространственно-временных точках. При этом часто используется понятие аналитического сигнала, вводятся нормальная и антинормальная корреляционные функции, как, например, в квантовой статистической оптике [8, 9], см. также приложение А. Обычно применяют разложение Фурье, имея в виду вспомогательный характер такой записи и считая, что все интегралы и производные полей понимаются в смысле сходимости по вероятности, или в среднем квадратичном

$$\vec{A}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \vec{A}(\omega) \exp(-i\omega t) \quad (\vec{A} = \vec{E},\, \vec{H},\, \vec{D},\, \vec{B}), \tag{1.1.6}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей соответственно, $\vec{B}$ и $\vec{D}$ — магнитная и электрическая индукции.

Корреляционные функции удобно записывать в симметризованном виде, например, для компонент электрического поля

$$\gamma_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; t-t') = \frac{1}{2}\big\langle E_i(\vec{r}, t)E_j(\vec{r}', t') + E_j(\vec{r}', t')E_i(\vec{r}, t)\big\rangle, \tag{1.1.7}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю, см. также приложение А.

Фурье-образ корреляционной функции, согласно теореме Винера–Хинчина, является спектральной плотностью флуктуаций:

$$\gamma_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \tau) \exp(i\omega\tau)\, d\tau. \tag{1.1.8}$$

Задачей корреляционной теории флуктуационных электромагнитных полей является разработка методов расчета корреляционных функций полей, или их спектральных характеристик, в заданной геометрии тел с реальными электродинамическими свойствами.

§ 1.2. Макроскопические уравнения флуктуационной электродинамики

1.2.1. Усреднение микроскопических уравнений флуктуационной электродинамики. Динамика любого электромагнитного процесса, в том числе имеющего флуктуационную природу, должна описываться системой уравнений Максвелла. Поэтому исходными являются уравнения для микроскопических напряженностей флуктуационных полей $(\vec{E}^M, \vec{H}^M)$ в вакууме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}^M(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{H}^M(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad && \operatorname{div} \vec{H}^M(\vec{r}, t) = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H}^M(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{E}^M(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad && \operatorname{div} \vec{E}^M(\vec{r}, t) = 0. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Усреднение микроскопических полей по ансамблю фактически означает усреднение по флуктуациям, что дает нулевые средние значения полей: $\langle \vec{E}^M \rangle = \langle \vec{H}^M \rangle = 0$. Тем не менее, статистическая информация о тепловом поле не теряется, поскольку достаточно исследовать динамику корреляционных функций. Как показано Е. Вольфом [10, 11], корреляционные функции удовлетворяют обычному волновому уравнению в вакууме, а их фурье-образы — уравнению Гельмгольца. Используя теоремы Грина, достаточно просто показать, см., например, [8], что спектральная плотность в этом случае удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\gamma(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) = \iint\limits_S \frac{\partial G}{\partial n}(\vec{r}, \vec{s}) \frac{\partial G^*}{\partial n'}(\vec{r}\,', \vec{s}\,') \gamma(\vec{s}, \vec{s}\,'; \omega)\, ds\, ds', \qquad (1.2.2)$$

где G — функция Грина некоторой граничной задачи, в данном случае она выбрана такой, что исчезает на поверхности тела S, $\vec{s}$ — это координата точки на поверхности тела, нормаль к которой $\vec{n}$. Соотношение (1.2.2) показывает, что спектральная плотность поля в двух точках пространства $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ вне тела может быть найдена, если известно ее значение на поверхности нагретого тела. Как часто бывает в физике, это соотношение можно прочитать и в обратном порядке. А именно, если найдена спектральная плотность излучения в пространстве вне тела, то с помощью решения интегрального уравнения (1.2.2) имеется принципиальная возможность найти корреляционные свойства теплового поля на поверхности тела.

В объеме самого тела, т. е. в какой-либо среде, уравнения для микроскопических полей более сложные, чем в вакууме, поскольку необходимо учитывать движение зарядов [12–14]:

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot} \vec{E}^M(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}^M(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\
\operatorname{rot} \vec{H}^M(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^M(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^M(\vec{r}, t), \\
\operatorname{div} \vec{H}^M(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E}^M(\vec{r}, t) = 4\pi \rho^M(\vec{r}, t),
\end{gathered} \qquad (1.2.3)$$

при этом микроскопическая плотность заряда и микроскопическая плотность тока могут быть записаны, считая заряды точечными объектами:

$$\rho^M(\vec{r}, t) = \sum_i e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)), \quad j^M(\vec{r}, t) = \sum_i e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)), \qquad (1.2.4)$$

где e_i, $\vec{v}_i$, $\vec{r}_i$ — заряд, скорость и координата i-го заряда.

Усреднение по ансамблю также приводит к нулевым средним токам $\langle \vec{j}^M \rangle = 0$, зарядам $\langle \rho^M \rangle = 0$ и полям $\langle \vec{E}^M \rangle = \langle \vec{H}^M \rangle = 0$. На практике, однако, как и в других разделах физики броуновского движения, во флуктуационной электродинамике предпочитают работать с уравнениями для динамических переменных, для того чтобы, используя стандартные способы решения электродинамических задач, получить средние квадратичные характеристики полей. Для этого уравнения (1.2.3) можно усреднить по элементарным объемам, оставляя как угодно быстрое изменение полей во времени:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V}\vec{E}^M(\vec{r}+\vec{\rho},t)\,d^3\rho, \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V}\vec{H}^M(\vec{r}+\vec{\rho},t)\,d^3\rho, \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

здесь $\vec{\rho}$ — радиус-вектор некоторой точки в выделенном элементарном объеме ΔV, центр которого определен координатой $\vec{r}$. Из (1.2.5) видно, что усреднение по элементарному объему фактически означает пространственное сглаживание полей, оставляя зависимость от координат [12–14].

Усредненные уравнения Максвелла в среде с заданной статистикой сторонних или полных токов и граничные условия на поверхности тел, а также линейные материальные уравнения позволяют определить все статистические характеристики термостимулированных случайных полей.

Необходимо отметить, что макроскопические уравнения Максвелла в среде могут быть записаны в разнообразных формах. Это определяется в первую очередь способом определения индуцированных токов. Например [13–15], если ввести полную индукцию

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) + 4\pi\vec{\mathcal{P}}(\vec{r},t),$$

в которую включены все эффекты движения зарядов и токи намагничивания, а поляризация

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{t}\vec{j}(\vec{r},t')\,dt'$$

включает весь индуцированный ток, без разделения на отдельные вклады, то система уравнений Максвелла в среде записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}_{\text{ext}}(\vec{r},t), \quad \operatorname{div}\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) = 4\pi\rho_{\text{ext}}(\vec{r},t). \end{gathered} \tag{1.2.6}$$

В данном случае в систему уравнений введены сторонние токи $\vec{j}_{\text{ext}}$ и заряды ρ_{ext}, связанные уравнением непрерывности. Это могут быть случайные сторонние токи, имеющие смысл вспомогательных (фиктивных) токов, т. е. тех токов, которые индуцируют флуктуационные токи $\vec{j}$ в системе. Полный ток равен сумме токов и является источником флуктуационного поля. Часто сторонние случайные токи называют «ланжевеновскими», по аналогии с описанием механического броуновского движения. Естественно, что средняя величина сторонних токов $\left\langle \vec{j}_{\text{ext}} \right\rangle = 0$, а тензор спектральной плотности сторонних токов определяется флуктуационно-диссипативной теоремой.

Если по каким-то причинам имеет смысл разделить наведенные токи на ток свободных носителей, ток поляризации связанных зарядов и вихревой ток намагничивания, то вводятся другой по смыслу вектор электрической индукции

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}, t)$$

и вектор напряженности магнитного поля

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, t) - 4\pi \vec{M}(\vec{r}, t).$$

В поляризации среды $\vec{P}$ можно учесть вклад токов свободных и связанных носителей или только вклад тока связанных носителей, специально выделяя ток свободных носителей заряда. При этом вектор намагниченности среды $\vec{M}$ определяет вихревые токи. В этом случае система уравнений Максвелла в среде выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \\
\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ext}}(\vec{r}, t), \quad \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = 4\pi \rho_{\text{ext}}(\vec{r}, t).
\end{gathered} \tag{1.2.7}$$

Здесь также введены в систему уравнений сторонние токи $\vec{j}_{\text{ext}}$. Смысл названия «сторонние» токи означает, что динамика процессов в рассматриваемой задаче не влияет на какие-либо характеристики этих токов, которые могут быть обусловлены и не электромагнитными явлениями. Индуцированные же токи и заряды являются в общем случае функционалами напряженностей полей, которые, в свою очередь, определяются суммой индуцированных и сторонних токов и зарядов. Сторонние и индуцированные токи и заряды по отдельности, а так же их сумма связаны соответствующими уравнениями непрерывности.

Реальная задача включает в себя несколько пространственных областей с разными электродинамическими свойствами. Поэтому необходимо решить систему уравнений (1.2.6) или (1.2.7) с подходящими граничными условиями и линейными материальными уравнениями в нашем случае. Граничные условия и материальные уравнения должны быть сформулированы в соответствие с конкретными особенностями задачи и моделью среды, см. например [12–16].

1.2.2. Флуктуационно-диссипативная теорема. Для определения корреляционных функций компонент полей потребуется знание корреляционных функций токов в системе, или функций Грина, которые задаются флуктуационно-диссипативной теоремой (ФДТ). Как известно [7, 15, 17, 18], эта теорема связывает спонтанные флуктуации параметров системы с ее диссипативными свойствами (см. приложение А). В частности, спектральную плотность флуктуаций сторонних токов с антиэрмитовой частью тензора диэлектрической проницаемости вещества

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) = \varepsilon'_{ij}(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) + i\varepsilon''_{ij}(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega).$$

Спектральная плотность флуктуаций сторонних токов определяется как фурье-образ их корреляционной функции:

$$\Phi_{ij}^{\text{ext}}(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ij}^{\text{ext}}(\vec{r}, \vec{r}\,'; \tau) \exp(i\omega\tau)\, d\tau, \tag{1.2.8}$$

а корреляционная функция может быть записана в симметризованном виде:

$$\Phi_{ij}^{\text{ext}}(\vec{r}, \vec{r}\,'; t - t') = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Spur}\left\{\rho_0 \left(j_i^{\text{ext}}(\vec{r}, t) j_j^{\text{ext}}(\vec{r}\,', t') + j_j^{\text{ext}}(\vec{r}\,', t') j_i^{\text{ext}}(\vec{r}, t)\right)\right\}, \tag{1.2.9}$$

где $\rho_0 = \exp\left[(F - H_0)/k_B T\right]$ — равновесная матрица плотности, F — свободная энергия, H_0 — невозмущенный гамильтониан рассматриваемой системы. Вычисления приводят к известной формуле

$$\Phi_{ij}^{\text{ext}}(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) = -\frac{i\omega\Theta(\omega, T)}{4\pi} \left[\varepsilon_{ij}(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) - \varepsilon^*_{ji}(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega)\right], \tag{1.2.10}$$

где $\Theta(\omega, T) = (\hbar\omega/2) \operatorname{cth}(\hbar\omega/2k_B T)$ — средняя энергия осциллятора при температуре T. Эту величину в литературе часто записывают, явно выделяя среднее число заполнения на моду, или фактор вырождения

$$\delta = \langle n(\omega) \rangle = \left[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1\right]^{-1},$$

тогда

$$\Theta(\omega, T) = \hbar\omega\,(1/2 + \langle n(\omega) \rangle).$$

Имеет смысл подчеркнуть, что можно записать ФДТ через восприимчивость системы, однозначно связанной с диэлектрической проницаемостью: $\chi_{ij}(\omega) = \left(\varepsilon_{ij}(\omega) - \delta_{ij}\right)/4\pi$.

При этом возможна двоякая трактовка поляризации ограниченной системы в поле, а именно

$$P_i(\omega) = \chi_{ij}(\omega) E_j(\omega) = \chi_{ij}^{(e)}(\omega) E_j^{(e)}(\omega).$$

То есть ее можно определять как отклик на внешнее поле $\vec{E}^{(e)}$, в которое помещено исследуемое тело, или как отклик на истинное поле $\vec{E}$ в среде. В общем случае связь между тензорами χ и $\chi^{(e)}$ определяется интегральным уравнением. Хорошо, впрочем, известен один классический случай, связанный с поляризацией однородного и изотропного тела эллипсоидальной формы в квазистатическом однородном поле [12]. В этом, простейшем, случае

$$\chi^{(e)} = \frac{4\pi\chi}{1 + 4\pi\chi n^{(\alpha)}},$$

где $n^{(\alpha)}$ $(\alpha = x, y, z)$ — это так называемый коэффициент деполяризации. Поскольку восприимчивость системы может быть введена двумя способами, то и ФДТ соответственно можно записать в двух формах. Оказывается [15], что кроме формулы (1.2.10), которая, учитывая соотношение $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}$, связывает истинную восприимчивость системы χ со спектральной плотностью флуктуаций сторонних токов, можно найти связь восприимчивости системы $\chi^{(e)}$, со спектральной плотностью флуктуаций $\Phi_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)$ истинных токов в системе, являющихся суммой сторонних и наведенных токов $\vec{j} = \vec{j}_{\text{ext}} + \vec{j}_{\text{ind}}$. По форме эти связи одинаковы, различаясь существенно по смыслу. Очевидно, что истинная восприимчивость χ характеризует свойства самой среды, а $\chi^{(e)}$ включает в себя еще и геометрические особенности образца. Поэтому, как было отмечено в [15], «фундаментальнее» использование корреляционных функций сторонних токов в образце.

§ 1.3. Теоретические методы расчета свойств термостимулированных электродинамических полей

1.3.1. Ланжевеновский подход. Теория Рытова. Как известно [1–3], существуют альтернативные подходы в описании броуновского движения. П. Ланжевен предложил использовать механические уравнения движения для броуновской частицы в жидкости. Для этого в уравнения движения была введена дополнительная сила как случайная функция времени $\vec{f}^{\,\text{ext}}(t)$, отражающая молекулярную структуру жидкости:

$$m\,\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = -m\gamma\vec{u}(t) + \vec{f}^{\,\text{ext}}(t), \tag{1.3.1}$$

где m — масса частицы, γ — коэффициент трения, $\vec{u}(t)$ — мгновенная скорость частицы.

Сила трения $-m\gamma\vec{u}(t)$ в уравнении (1.3.1) отвечает приближению сплошной среды, а случайная сила $\vec{f}^{\,\text{ext}}(t)$ является причиной флуктуационного характера движения рассматриваемой частицы. Поскольку масса частицы много больше, чем масса молекул жидкости, то резонно предположить, что движение частицы является результатом огромного числа ударов со стороны молекул, поэтому и выполняются условия для центральной предельной теоремы. Кроме того, считается, что нет выделенных направлений случайной силы в среде, а поэтому ее среднее значение равно нулю, а разные ее компоненты не коррелируют. В результате можно считать процесс $\vec{f}^{\,\mathrm{ext}}(t)$ гауссовым с нулевым средним

$$\left\langle f_i^{\mathrm{ext}}(t)\right\rangle = 0, \quad \left\langle f_i^{\mathrm{ext}}(t) f_k^{\mathrm{ext}}(t')\right\rangle = 2D\delta_{ik}\delta(t-t'), \tag{1.3.2}$$

где интенсивность случайной силы $D = \gamma m k_B T$ находится из условия статистического равновесия между броуновскими частицами и окружающей средой [19]. Дельта-коррелированная особенность в (1.3.2) фактически означает нулевое приближение по малому параметру $\tau_{\mathrm{cor}}/\tau_{\mathrm{rel}}$, где τ_{cor} — есть время корреляции молекулярных толчков, а $\tau_{\mathrm{rel}} = \gamma^{-1}$ — время релаксации, или характерный масштаб времени броуновского движения. Соотношение Эйнштейна $D = \gamma m k_B T$, устанавливающее связь между интенсивностью ланжевеновского источника с диссипативной характеристикой среды γ и температурой T, является первым известным флуктуационно-диссипативным соотношением. Заметим, что математические особенности ланжевеновского описания броуновского движения и его связи с альтернативными подходами исследованы, например, в [5, 20, 21].

По аналогии с ланжевеновским подходом к описанию механической задачи, С. М. Рытовым была построена теория равновесных электромагнитных флуктуаций. В основе этой теории [4–7] лежит система макроскопических уравнений Максвелла (1.2.7). Для спектральных амплитуд динамическая часть этой системы принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},\omega) &= -ik_0\vec{D}(\vec{r},\omega) + \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}^{\,e}_{\mathrm{ext}}(\vec{r},\omega), \\ \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},\omega) &= ik_0\vec{B}(\vec{r},\omega) - \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}^{\,m}_{\mathrm{ext}}(\vec{r},\omega), \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме, и для удобства и симметрии записи введены сторонние магнитные токи. Фурье трансформанты индукций и напряженностей полей связаны линейными материальными соотношениями

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\vec{r},\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega), \quad \vec{B}(\vec{r},\omega) = \mu(\vec{r},\omega)\vec{H}(\vec{r},\omega),$$

а электрическая и магнитная проницаемости имеют для изотропных и однородных сред вид: $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\mu = \mu' + i\mu''$.

С конкретными граничными условиями задачи, материальными уравнениями и при заданных случайных источниках система (1.3.3) однозначно определяет спектральные амплитуды напряженностей и индукций. Очевидно, что вторые моменты флуктуационного электромагнитного поля будут определяться вторыми же моментами сторонних токов. Рытовым [22] была получена общая форма ФДТ для непрерывных систем, состояние которых описывается случайными полями. Он показал, что корреляционные матрицы спектральных амплитуд полей и сторонних токов однозначно определяются самими линеаризованными макроскопическими уравнениями Максвелла.

В дальнейшем теория тепловых электромагнитных флуктуаций, разработанная в соавторстве с М. Л. Левиным, приобрела законченный и изящный вид [7]. Получен фундаментальный обобщенный закон Кирхгофа, без ограничений на соотношение между длиной волны флуктуационного поля и характерным пространственным масштабом задачи, из которого прямо следует его классический вариант. На основе теоремы взаимности, примененной к полю точечного диполя и рассматриваемому флуктуационному полю, было показано, что функции пространственной корреляции компонент флуктуационных полей выражаются через смешанные потери полей от двух точечных диполей. Например, для компонент флуктуационного электрического поля по направлениям в пространстве, задаваемым единичными векторами $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$,

$$\left\langle E_{\ell_1}(\vec{r}_1)E^*_{\ell_2}(\vec{r}_1)\right\rangle = \frac{2\Theta(\omega,T)}{\pi}\,Q_{ee}\left(\vec{r}_1,\vec{\ell}_1;\vec{r}_2,\vec{\ell}_2\right), \qquad (1.3.4)$$

$Q_{ee}\left(\vec{r}_1,\vec{\ell}_1;\vec{r}_2,\vec{\ell}_2\right)$ — это смешанные потери полей двух электрических диполей [1]), один из которых ($\vec{\mu}_1 = -\vec{\ell}_1/i\omega$) расположен в точке $\vec{r}_1$ и ориентирован по направлению $\vec{\ell}_1$, а второй ($\vec{\mu}_2 = -\vec{\ell}_2/i\omega$) — в точке $\vec{r}_2$ с ориентацией по $\vec{\ell}_2$. Такие диполи соответствуют единичному электрическому точечному току

$$\vec{j}^{\,e}_0 = \vec{\ell}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = -i\omega\vec{\mu}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'),$$

расположенному в точке $\vec{r} = \vec{r}\,'$,

$$Q_{ee}\left(\vec{r}_1,\vec{\ell}_1;\vec{r}_2,\vec{\ell}_2\right) = \\ = -\frac{i\omega}{16\pi}\int\limits_V d^3r\left\{E^{e1}_i E^{e2*}_j\left(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^*_{ji}\right) + H^{e1}_i H^{e2*}_j\left(\mu_{ij}-\mu^*_{ji}\right)\right\}, \qquad (1.3.5)$$

где $E^{e1}_i = E^{e1}_i(\vec{r},\vec{r}_1;\vec{\ell}_1)$, $H^{e1}_i = H^{e1}_i(\vec{r},\vec{r}_1;\vec{\ell}_1)$ — поля первого точечного электрического диполя, и аналогично для полей второго диполя, а интегрирование ведется по объему тела, генерирующего тепловое поле. Аналогично выглядят формулы для компонент флуктуацион-

[1]) Повсюду в тексте книги используется обозначение электрического диполя в виде $\vec{\mu}$, что, надеемся, не приведет к путанице в связи с подобным же обозначением для магнитной проницаемости, используемом крайне редко.

ного магнитного поля $\left\langle H_{\ell_1}(\vec{r}_1)H^*_{\ell_2}(\vec{r}_1)\right\rangle$ и смешанного произведения $\left\langle E_{\ell_1}(\vec{r}_1)H^*_{\ell_2}(\vec{r}_1)\right\rangle$, но при расчете потерь здесь дополнительно нужно использовать поля

$$E_i^{m1,2} = E_i^{m1,2}(\vec{r}, \vec{r}_{1,2}; \vec{\ell}_{1,2}), \quad H_i^{m1,2} = H_i^{m1,2}(\vec{r}, \vec{r}_{1,2}; \vec{\ell}_{1,2})$$

магнитных точечных диполей ($\vec{m}_1 = -\vec{\ell}_1/i\omega$, $\vec{m}_2 = -\vec{\ell}_2/i\omega$), соответствующих единичному магнитному току

$$\vec{j}_0^{\,m} = \vec{\ell}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = -i\omega\vec{m}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,').$$

Следует отметить, что обобщенный закон Кирхгофа, выражаемый, в частности, формулой (1.3.4), дает возможность расчета спектральных характеристик флуктуационного поля, генерируемого нагретым телом произвольной формы в холодное пространство, т. е. описывает неравновесную ситуацию, как и классический закон Кирхгофа (1.1.1). Существенная разница между ними заключается в том, что в рамках цитируемой здесь теории появилась возможность нахождения спектральных характеристик тепловых полей в ближней зоне — зоне квазистационарных случайных полей, чего в принципе не мог дать классический закон, поскольку получен в геометрооптическом приближении.

В случае полного термодинамического равновесия, когда температуры всех тел равны, авторы теории показали, используя комплексную лемму Лоренца, что потери определяются просто полями точечных источников, или функциями Грина задачи

$$Q_{ee}\left(\vec{r}_1, \vec{\ell}_1; \vec{r}_2, \vec{\ell}_2\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\vec{\ell}_1\vec{E}^{e2}(\vec{r}_1)\right\} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\vec{\ell}_2\vec{E}^{e1}(\vec{r}_2)\right\}, \tag{1.3.6}$$

а обобщенный закон Кирхгофа (1.3.2) приобретает простой вид:

$$\left\langle E_{\ell_1}(\vec{r}_1)E^*_{\ell_2}(\vec{r}_1)\right\rangle = -\frac{\Theta(\omega,T)}{\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\vec{\ell}_1\vec{E}^{e2}(\vec{r}_1)\right\} = \\ = -\frac{\Theta(\omega,T)}{\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\vec{\ell}_2\vec{E}^{e1}(\vec{r}_2)\right\}. \tag{1.3.7}$$

Аналогичные формулы получены для корреляционных функций компонент магнитной напряженности теплового поля и смешанных корреляционных функций.

Следует отметить, что формула (1.3.6) легко получается из теоремы Пойнтинга, из которой следует, что диссипируемая мощность во всем пространстве, создаваемая полем регулярного тока $\vec{j}_0 = \vec{\ell}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$, равна

$$Q(\vec{r}, \vec{\ell}) = -\int d^3r'\left\langle\vec{j}_0(\vec{r}, \vec{r}\,')\vec{E}(\vec{r}\,')\right\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\vec{\ell}\vec{E}(\vec{r})\right\}. \tag{1.3.8}$$

Таким образом, в любом случае, и когда система находится в полном термодинамическом равновесии с окружающим пространством, и в случае неполного равновесия, когда нагрето лишь рассматриваемое тело, спектральные характеристики теплового флуктуационного поля определяются функциями Грина соответствующей регулярной задачи. Предложенная теория позволяет рассчитать корреляционные функции термостимулированного поля на любом расстоянии от поверхности теплового источника, при этом дает возможность получить исчерпывающую информацию о спектральных характеристиках как бегущих, так и квазистационарных волн этого флуктуационного поля.

1.3.2. Метод функций Грина. В современной физике исключительно важным и плодотворным оказался подход, основанный на понятии функции Грина [23–25]. Так в теории твердого тела была введена функция Грина, определенная с помощью усредненных, по-разному упорядоченных полевых операторов. Ее фурье-образ полностью определяет спектр квазичастичных возбуждений в твердом теле. Естественно, что для описания электромагнитных возбуждений в рамках уже разработанной общей методики имело смысл построить соответствующую теорию по аналогии. Роль полевых операторов в теории электромагнитных флуктуаций [25] играют операторы потенциалов φ и $\vec{A}$ электромагнитного поля. Ключевым понятием теории является запаздывающая функция Грина

$$iD^R_{ik}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; t_1, t_2) = \\ = \begin{cases} \big\langle \widehat{A}_i(\vec{r}_1, t_1)\widehat{A}_k(\vec{r}_2, t_2) - \widehat{A}_k(\vec{r}_2, t_2)\widehat{A}_i(\vec{r}_1, t_1)\big\rangle, & t_1 > t_2 \\ 0, & t_1 < t_2. \end{cases} \tag{1.3.9}$$

В случае, когда функция Грина зависит только от разности $t = t_1 - t_2$, фурье-образ этой функции

$$D^R_{ik}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega) = \int\limits_0^\infty dt\, e^{i\omega t} D^R_{ik}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; t). \tag{1.3.10}$$

В основе теории лежит общая теория отклика макроскопической системы на внешнее воздействие и теоремы Кубо [19]. Общее выражение для гамильтониана взаимодействия электромагнитного поля со средой:

$$\widehat{V} = -\frac{1}{c}\int d^3r\, \widehat{\vec{j}}(\vec{r}, t)\widehat{\vec{A}}(\vec{r}, t) + \int d^3r\, \widehat{\rho}(\vec{r}, t)\widehat{\varphi}(\vec{r}, t), \tag{1.3.11}$$

где $\widehat{\vec{j}}$ и $\widehat{\rho}$ — операторы плотности тока и плотности заряда среды, а интегрирование ведется по всему ее объему. Для удобства в этой теории используется калибровка $\varphi = 0$, что не сказывается на наблюдаемых величинах — напряженностях полей. Учитывая выражение (1.3.11) и выбранную калибровку, можно записать оператор взаимодействия, связанный с классическим сторонним током:

$$\widehat{V} = -\frac{1}{c}\int d^3r\ \vec{j}_0(\vec{r},t)\widehat{\vec{A}}(\vec{r},t). \tag{1.3.12}$$

Известно, что для дискретных динамических величин x_i, характеризующих какое-либо свойство системы под действием внешних воздействий f_i, оператор энергии взаимодействия имеет вид

$$\widehat{V} = -\sum_i f_i \widehat{x}_i.$$

Средние значения динамических величин $\langle x_i(t)\rangle$ являются линейными функционалами внешних сил $f_a(t)$, а их фурье-компоненты связаны простым линейным соотношением

$$\langle x_i(\omega)\rangle = \sum_j \chi_{ij}(\omega) f_j(\omega),$$

где $\chi_{ij}(\omega)$ — обобщенные восприимчивости. В случае распределенных по пространству величин x_i и f_i оператор взаимодействия

$$\widehat{V} = -\sum_i \int d^3r\, f_i(\vec{r},t)\widehat{x}_i(\vec{r},t). \tag{1.3.13}$$

Сравнивая (1.3.12) и (1.3.13) и полагая в качестве внешних сил f_a компоненты стороннего тока $\vec{j}_0$, в качестве динамических величин x_a необходимо выбрать компоненты векторного потенциала $\vec{A}/c$.

В рамках теории линейного отклика можно записать

$$\langle x_i(\vec{r},t)\rangle = \int d^3r' \int dt'\, \chi_{ij}(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') f_j(\vec{r}\,',t'), \tag{1.3.14}$$

откуда для фурье-компонент средний отклик, как и в дискретном случае, выражается через восприимчивость системы:

$$\langle x_i(\vec{r},\omega)\rangle = \sum_j \int d^3r'\, \chi_{ij}(\vec{r},\vec{r}\,';\omega) f_j(\vec{r}\,',\omega), \tag{1.3.15}$$

восприимчивость же, согласно Кубо, выражается через средние значения коммутаторов операторов $\widehat{x}_a(\vec{r},t)$ в гейзенберговском представлении:

$$\chi_{ij}(\vec{r},\vec{r}\,';\omega) = \frac{i}{\hbar}\int\limits_0^\infty dt\, e^{i\omega t}\, \langle \widehat{x}_i(\vec{r},t)\widehat{x}_j(\vec{r}\,',0) - \widehat{x}_j(\vec{r}\,',0)\widehat{x}_i(\vec{r},t)\rangle. \tag{1.3.16}$$

Сравнивая эту формулу с определением запаздывающей функции Грина (1.3.9), (1.3.10), получим

$$D_{ik}^R(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) = -i \int\limits_0^\infty dt\, e^{i\omega t} \left\langle \widehat{A}_i(\vec{r}, t)\widehat{A}_k(\vec{r}\,', 0) - \widehat{A}_k(\vec{r}\,', 0)\widehat{A}_i(\vec{r}, t) \right\rangle, \tag{1.3.17}$$

откуда видно, что компоненты тензора $-D_{ik}^R(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega)/\hbar c^2$ следует рассматривать как обобщенные восприимчивости. Поэтому, учитывая (1.3.15), можно записать для средней величины компоненты векторного потенциала флуктуационного поля

$$\langle A_i(\vec{r}, \omega)\rangle = -\frac{1}{\hbar c}\int d^3r'\, D_{ik}^R(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) j_k(\vec{r}\,', \omega). \tag{1.3.18}$$

Но среднее поле, определяемое векторным потенциалом, удовлетворяет системе уравнений (1.2.6) или (1.2.7), а в фурье-компонентах — системе (1.3.3). Обозначая далее средний векторный потенциал без угловых скобок и учитывая, что в выбранной калибровке $\vec{B}(\omega) = \operatorname{rot}\vec{A}(\omega)$, $\vec{E}(\omega) = i(\omega/c)\vec{A}(\omega)$, а также материальные уравнения в общем случае для анизотропных сред, $B_i(\omega) = \mu_{ik}(\omega)H_k(\omega)$, $D_i(\omega) = \varepsilon_{ik}(\omega)E_k(\omega)$, можно получить уравнение для запаздывающей функции Грина. Это уравнение в обозначениях [25] выглядит следующим образом:

$$\left[\operatorname{rot}_{im}\left(\mu_{mn}^{-1}\operatorname{rot}_{n\ell}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_{i\ell}\right] D_{\ell k}^R(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega) = -4\pi\hbar\delta_{ik}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'), \tag{1.3.19}$$

где подразумевается, что $\operatorname{rot}_{i\ell} = e_{ik\ell}\partial/\partial x_k$, $\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)_i = \operatorname{rot}_{i\ell} A_\ell$, и, как обычно, по повторяющемуся индексу проводится суммирование. Так же, как и в теории Рытова, определяя функцию Грина из конкретной граничной задачи и используя ФДТ для обобщенных восприимчивостей $-D_{ik}^R(\vec{r}, \vec{r}\,'; \omega)/\hbar c^2$, можно найти спектральную плотность корреляций компонент векторного потенциала флуктуационного поля. Например, для симметризованной корреляционной функции

$$\left(A_i^{(1)} A_k^{(2)}\right)_\omega = \frac{i\Theta(\omega, T)}{\hbar\omega}\left\{D_{ik}^R(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega) - D_{ki}^{R*}(\vec{r}_2, \vec{r}_1; \omega)\right\}, \tag{1.3.20}$$

где значки (1) и (2) означают, что значение величины берется в точке $\vec{r}_1$ или $\vec{r}_2$.

Учитывая определение полей через векторный потенциал, сразу записываются спектральные плотности корреляций компонент поля:

$$(E_i^{(1)} E_k^{(2)})_\omega = (\omega^2/c^2)(A_i^{(1)} A_k^{(2)})_\omega,$$

и

$$(B_i^{(1)} B_k^{(2)})_\omega = \operatorname{rot}_{i\ell}^{(1)} \operatorname{rot}_{km}^{(2)} (A_\ell^{(1)} A_m^{(2)})_\omega.$$

Если среда не магнитоактивна, то

$$D_{ik}^{R}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega) = D_{ki}^{R}(\vec{r}_2, \vec{r}_1; \omega),$$

и тогда (1.3.20) приобретает более простой вид:

$$\left(A_i^{(1)} A_k^{(2)}\right)_\omega = -\frac{2\Theta(\omega, T)}{\hbar\omega} \operatorname{Im}\left\{D_{ik}^{R}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega)\right\}, \qquad (1.3.21)$$

т. е. выражается через мнимую часть функции Грина. Внешнее различие с теорией Рытова, см. (1.3.5), связано с разным определением функций Грина и преобразований Фурье в [7] и [25]. В частности, уравнение Гельмгольца, следующее для векторного потенциала или вектора Герца из системы (1.3.1), содержит в правой части диполь $\vec{\mu} = i(\vec{\ell}/\omega)$ (или $\vec{m} = i(\vec{\ell}/\omega)$), соответствующий единичному току в теории Рытова.

1.3.3. Теория Агарваля. В 1970-х годах Г. С. Агарвалем [26] был предложен теоретический метод расчета свойств термостимулированных полей твердых тел. Этот метод, как и рассмотренный в разделе 3.2, также основан на теории линейного отклика, теоремах Кубо и, естественно, на уравнениях Максвелла. Автор использовал другой вид гамильтониана взаимодействия:

$$V = -\int d^3r \left\{\vec{P}_0(\vec{r}, t)\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{M}_0(\vec{r}, t)\vec{H}(\vec{r}, t)\right\}, \qquad (1.3.22)$$

где $\vec{P}_0(\vec{r}, t)$ и $\vec{M}_0(\vec{r}, t)$ — сторонние поляризация и намагниченность, связанные со сторонними токами в (1.3.9) и (1.3.10) выражением

$$\vec{j}_0(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}_0(\vec{r}, t)}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M}_0. \qquad (1.3.23)$$

Гамильтониан взаимодействия (1.3.22) получается из (1.3.11), если учесть, что в этом подходе сторонняя плотность зарядов $\rho_0(\vec{r}, t) = -\operatorname{div} \vec{P}_0(\vec{r}, t)$, а также использовать формулы векторного анализа [14]

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{P}_0) = \varphi \operatorname{div} \vec{P}_0 + \vec{P}_0 \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

и

$$\operatorname{div}[\vec{M}_0 \times \vec{A}] = \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{M}_0 + \vec{M}_0 \cdot \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Из (1.3.15) прямо следует, что восприимчивость определяется первой функциональной производной

$$\frac{\delta \langle x_i(\vec{r}, \omega)\rangle}{\delta f_j(\vec{r}', \omega)} = \chi_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega). \qquad (1.3.24)$$

Учитывая, что гамильтониан (1.3.22) имеет вид (1.3.11), можно определить четыре типа функций отклика:

$$
\begin{aligned}
\chi_{ij}^{EE}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) &= \frac{\delta E_i(\vec{r}, \omega)}{\delta P_{0j}(\vec{r}', \omega)},\\
\chi_{ij}^{EH}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) &= \frac{\delta E_i(\vec{r}, \omega)}{\delta M_{0j}(\vec{r}', \omega)},\\
\chi_{ij}^{HE}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) &= \frac{\delta H_i(\vec{r}, \omega)}{\delta P_{0j}(\vec{r}', \omega)},\\
\chi_{ij}^{HH}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) &= \frac{\delta H_i(\vec{r}, \omega)}{\delta M_{0j}(\vec{r}', \omega)},
\end{aligned}
\tag{1.3.25}
$$

которые по теореме Кубо (1.3.17) связаны с соответствующими симметризованными корреляционными функциями типа (1.1.7) и их фурье-преобразованиями (1.1.8). Используя эти фурье-преобразования и следующие определения:

$$\langle [A(0), B(t)] \rangle = (i/\hbar)\, \langle B(t)A(0) - A(0)B(t) \rangle, \tag{1.3.26}$$

$$\langle \{A(0), B(t)\} \rangle = (1/2)\, \langle B(t)A(0) + A(0)B(t) \rangle, \tag{1.3.27}$$

а также соотношение [19]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} \langle [A(0), B(t)] \rangle = \frac{\omega}{i\Theta(\omega, T)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} \langle \{A(0), B(t)\} \rangle, \tag{1.3.28}$$

получим связь спектральной плотности симметризованной функции корреляций с обобщенной восприимчивостью: $\chi_{ab}^{AB}(\omega) = \chi_{ab}^{AB\prime}(\omega) + i\chi_{ab}^{AB\prime\prime}(\omega)$ в случаях, когда функция $\langle [A(0), B(t)] \rangle$ имеет разную четность по отношению к обращению времени, а именно:

$$\gamma_{ij}^{AB}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = \frac{2i\Theta(\omega, T)}{\omega} \operatorname{Re}\left\{\chi_{ij}^{AB}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)\right\} \quad \text{(четная)}, \tag{1.3.29}$$

$$\gamma_{ij}^{AB}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = -\frac{2\Theta(\omega, T)}{\omega} \operatorname{Im}\left\{\chi_{ij}^{AB}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)\right\} \quad \text{(нечетная)}. \tag{1.3.30}$$

Очевидно, что в случае взаимной корреляции компонент электрического и магнитного полей надо использовать (1.3.29), а в случае смешанных корреляций (1.3.30). Поэтому для спектральных плотностей компонент полей и их симметризованных корреляционных функций (1.3.27), имеем

$$
\begin{aligned}
\gamma_{ij}^{EE}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) &= \frac{2i\Theta(\omega, T)}{\omega} \operatorname{Re}\left\{\chi_{ij}^{EE}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)\right\},\\
\gamma_{ij}^{HH}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) &= \frac{2i\Theta(\omega, T)}{\omega} \operatorname{Re}\left\{\chi_{ij}^{HH}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)\right\},
\end{aligned}
\tag{1.3.31}
$$

а для смешанных спектральных плотностей

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{EH}(\vec{r},\vec{r}\,';\omega) &= -\frac{2\Theta(\omega,T)}{\omega}\,\mathrm{Im}\left\{\chi_{ij}^{EH}(\vec{r},\vec{r}\,';\omega)\right\}, \\ \gamma_{ij}^{HE}(\vec{r},\vec{r}\,';\omega) &= -\frac{2\Theta(\omega,T)}{\omega}\,\mathrm{Im}\left\{\chi_{ij}^{HE}(\vec{r},\vec{r}\,';\omega)\right\}. \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

Для того чтобы найти восприимчивости (1.3.25), необходимо решить соответствующую электродинамическую задачу, выразив поля через сторонние поляризацию и намагниченность.

Граничная задача решается с использованием системы (1.2.7), в которую введены сторонние поляризация и намагниченность:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}+4\pi\vec{M}_0\right), \quad \mathrm{div}\left(\vec{B}+4\pi\vec{M}_0\right)=0, \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} &= \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D}+4\pi\vec{P}_0\right), \quad \mathrm{div}\left(\vec{D}+4\pi\vec{P}_0\right)=0. \end{aligned} \tag{1.3.33}$$

Записывая решение этой системы в виде (1.3.14), например, через функцию Грина конкретной задачи, и используя определения (1.3.25), можно найти по формулам (1.3.31), (1.3.32) спектральные характеристики флуктуационных электромагнитных полей в рассматриваемой задаче, все специфические особенности которой определяются ее геометрией и электродинамическими характеристиками.

Отметим здесь, что описанные теоретические методы нахождения спектральных характеристик теплового электромагнитного поля излучения фактически идентичны, поскольку основаны на решении системы макроскопических уравнений Максвелла с заданными граничными и линейными материальными условиями. В каждом подходе рассматривается длинноволновая часть излучения, в которой волновые векторы полей удовлетворяют условию $ka \ll 1$, где a — межатомные расстояния в среде. В этой области частот все спектральные характеристики флуктуационных электромагнитных полей выражаются через феноменологические понятия — диэлектрическую и магнитную проницаемости среды. Поэтому практическое использование той или иной теории во многом является делом вкуса. Следует, впрочем, заметить, что теоретические подходы, описанные в разделах 3.2 и 3.3, позволяют находить характеристики случайных полей в условиях полного термодинамического равновесия в системе. Для того чтобы рассмотреть поля в условиях частичного равновесия, когда одна часть системы нагрета и излучает в холодное окружение, необходимо из полученного равновесного решения вычесть часть, соответствующую рассеянному этой нагретой частью системы черному излучению, см. например, задачу 3 после § 77 ссылки [25]. Фактически именно так и получен классический закон Кирхгофа (1.1.1), в котором из интенсивности равновесного излучения вычтена отраженная телом доля интенсивности черного излучения. Теория же Рытова дает рецепт нахождения характеристик флуктуационного электромагнитного тела сразу в условиях, когда нагретое тело излучает в холодное пространство. Свойства же равновесного поля получаются из обобщенного закона Кирхгофа как частный, более простой случай. Следует еще раз подчеркнуть, что решения, полученные в рамках разных теоретических подходов, разумеется, идентичны.

1.3.4. Вычисление корреляционных функций в квантовой статистической физике. В квантовой статистической физике важную роль играют двухвременные средние величины, составленные из операторов, взятых в различные моменты времени. Операторы, соответствующие динамическим переменным рассматриваемой системы, используются в представлении Гейзенберга [27], например,

$$\widehat{A}(t) \equiv \exp(i\widehat{H}t)\widehat{A}\exp(-i\widehat{H}t), \tag{1.3.34}$$

где $\widehat{H}$ — оператор Гамильтона системы, $\widehat{H}$ и $\widehat{A}$ — шредингеровские операторы, явно не зависящие от времени. Операторы в гейзенберговском представлении удовлетворяют уравнению движения

$$i\hbar\,\frac{d\widehat{A}(t)}{dt} = \big[\widehat{A}(t)\widehat{H}(t)\big] = \big[\widehat{A}(t)\widehat{H}\big] \equiv \widehat{A}(t)\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{A}(t). \tag{1.3.35}$$

Вся необходимая информация о наблюдаемых и их свойствах содержится в корреляционных функциях типа

$$K_{AB}(t,t') = \big\langle \widehat{A}(t)\widehat{B}(t')\big\rangle, \quad K_{BA}(t,t') = \big\langle \widehat{B}(t')\widehat{A}(t)\big\rangle, \tag{1.3.36}$$

где усреднение можно провести по большому каноническому ансамблю Гиббса. В условиях равновесия статистический оператор, с помощью которого проводится усреднение, дается выражением

$$\widehat{\rho} = C\exp(-\beta\widehat{H}'), \tag{1.3.37}$$

где $\beta = 1/k_BT$, $\widehat{H}' = \widehat{H} - \mu\widehat{N}$, $\widehat{N}$ — оператор полного числа частиц, μ — химический потенциал, отнесенный к одной частице, нормировочная постоянная $C = \exp(\beta\Omega)$, где Ω — термодинамический потенциал в переменных μ и T.

В случае равновесия, как известно, корреляционные функции зависят лишь от разности $t - t'$:

$$K_{AB}(t,t') = K_{AB}(t-t'), \quad K_{BA}(t,t') = K_{BA}(t-t'). \tag{1.3.38}$$

При совпадении времен $t = t'$ корреляционные функции определены и дают средние значения от произведения операторов, например,

$$K_{AB}(0) = \big\langle \widehat{A}(t)\widehat{B}(t)\big\rangle = \big\langle \widehat{A}(0)\widehat{B}(0)\big\rangle, \tag{1.3.39}$$

т. е. функции распределения квантовой статистической механики, которые позволяют вычислять средние значения динамических величин.

Формулы (1.3.38) можно представить в виде [28]

$$K_{AB}(t-t') = \left\langle \widehat{A}(t)\widehat{B}(t')\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} J(\omega)\exp\left[-i\omega(t-t')\right]d\omega, \qquad (1.3.40)$$

$$K_{BA}(t-t') = \left\langle \widehat{B}(t')\widehat{A}(t)\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} J(\omega)\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)\exp\left[-i\omega(t-t')\right]d\omega, \qquad (1.3.41)$$

где

$$J(\omega) = \sum_{n,m}\rho_n\left(\Phi_n^*\widehat{B}(0)\Phi_m\right)\left(\Phi_m^*\widehat{A}(0)\Phi_n\right)\delta(\omega+\omega_n-\omega_m), \qquad (1.3.42)$$

где $\rho_n = \rho_{nn'} = \delta_{nn'}\exp\left(\beta\Omega - \beta E_n\right)$ — матричный элемент статистического оператора, Φ_n и E_n — собственные функции и собственные значения оператора Гамильтона $\widehat{H}'\Phi_n = E_n\Phi_n$, см. также приложение А.

Как следует из (1.3.40), функция $J(\omega)$ является спектральной интенсивностью корреляционной функции

$$K_{AB}(t-t') = \left\langle \widehat{A}(t)\widehat{B}(t')\right\rangle.$$

Зная спектральную интенсивность, можно найти корреляционные функции (1.3.38) или составленную из них симметризованную корреляционную функцию.

Наиболее распространенным аналитическим методом вычисления корреляционных функций в настоящее время считается метод уравнений движения для двухвременных температурных функций Грина [29]. С этой целью в квантовой статистической физике вводятся разнообразные функции Грина: причинные, запаздывающие, опережающие, половинные [29–31]. Они являются удобным и полезным обобщением понятия корреляционной функции. Например, запаздывающая и опережающая функции Грина

$$G^R(t,t') = -i\theta(t-t')\left\{\left\langle \widehat{A}(t)\widehat{B}(t')\right\rangle - \left\langle \widehat{B}(t')\widehat{A}(t)\right\rangle\right\}, \qquad (1.3.43)$$

$$G^A(t,t') = i\theta(t'-t)\left\{\left\langle \widehat{A}(t)\widehat{B}(t')\right\rangle - \left\langle \widehat{B}(t')\widehat{A}(t)\right\rangle\right\}, \qquad (1.3.44)$$

где $\theta(t-t')$ — функция Хевисайда.

Нетрудно заметить, что в случае $t = t'$ все функции Грина, в отличие от корреляционных функций (1.3.36), не определены из-за функции $\theta(t-t')$. Однако, введение разрывной функции позволяет установить важнейшие аналитические свойства функций Грина. Для этого необходимо рассмотреть фурье-преобразование функций Грина (1.3.43) и (1.3.44), учитывая, что в замкнутых или равновесных системах функция Грина зависит лишь от разности $t - t'$. Выражения для фурье-образов можно представить в виде

$$G^{R,A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega') \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega'}{k_B T}\right)\right] \frac{d\omega'}{\omega - \omega' \pm i\varepsilon}, \tag{1.3.45}$$

где запаздывающей функции соответствует знак плюс, а опережающей — минус.

Из полученных формул сразу следует так называемая спектральная теорема

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[G^R(\omega + i\varepsilon) - G^A(\omega - i\varepsilon)\right] = -iJ(\omega) \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)\right], \tag{1.3.46}$$

если учесть известное представление дельта-функции, см. приложение А. Спектральная теорема позволяет находить спектральную интенсивность корреляционной функции по известной функции Грина.

Удобство использования функций Грина связано с известными аналитическими свойствами их фурье-трансформант на плоскости комплексной частоты, в то время как фурье-трансформанта корреляционной функции аналитической не является.

Способ вычисления корреляционной функции на основе решения бесконечной цепочки уравнений движения для двухвременных температурных функций Грина был предложен в работе [29]. Такой способ решения, некоторые трудности его применения и ряд важных примеров описаны, например, в [30, 31]. Схема вычисления корреляционных функций включает в себя составление системы зацепляющихся уравнений движения для функций Грина с использованием явного вида гамильтониана системы, расцепление этой системы с помощью более или менее обоснованного условия и ее решения, определения скачков фурье-образов найденных функций Грина через действительную ось и вычисление спектральной интенсивности искомых корреляционных функций по спектральной теореме (1.3.46).

Нам неизвестен ни один пример применения такой схемы во флуктуационной электродинамике для нахождения корреляционных характеристик термостимулированного электромагнитного поля, генерируемого нагретым телом. Хотя очевидно, что в принципе такая схема должна работать и в этом случае. По-видимому, основной трудностью здесь является получение явного вида гамильтониана термостимулированного электромагнитного поля реального тела в представлении вторичного квантования. Процедура квантования радиационной (свободной) части поля хорошо известна. Квантование же квазистационарной части поля нетривиально, и на наш взгляд, интересным решением проблемы может быть работа [32], в которой квантование проведено в простейшем случае полупространства без потерь. Отметим лишь один результат: отдельно от источника проквантовать квазистационарное поле нельзя (нет квазистационарных фотонов), поэтому возникает проблема нахождения подходящих попарно ортогональных собственных функций системы, которая была решена в цитируемой работе путем введения в рассмотрение триплетных состояний, включающих падающее поле на границу полупространства, отраженное и прошедшее, связанных коэффициентами Френеля. С физической точки зрения использование материальных характеристик в системе собственных функций должно быть понятно, поскольку квазистационарные поля неразрывно связаны с их источниками и не могут, в отличие от радиационных полей, без них существовать. Иными словами, квантовать неизбежно приходится не только поле, но и среду, его порождающую, т. е. квант в данном случае является элементарным возбуждением всей системы, включающей материальную среду. Другая принципиальная проблема — обоснованное условие расцепления бесконечной системы зацепляющихся уравнений для функций Грина.

В свою очередь, как мы видели в разделах 1.3.1–1.3.3, во флуктуационной электродинамике корреляционные функции и спектр возбуждений термостимулированного электромагнитного поля твердых тел находятся из решения динамических уравнений — системы уравнений Максвелла. А именно, зная решение для точечного источника поля определенного вида, можно найти спектральную интенсивность, например, несимметризованной корреляционной функции [25]

$$J_{ik}(\omega) = i\left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)\right]^{-1}\left[D^R_{ik}(\omega) - \left(D^R_{ki}(\omega)\right)^*\right], \qquad (1.3.47)$$

где $D^R_{ik}(\omega)$ — фурье-образ запаздывающей функции Грина (1.3.9), определенной по компонентам векторного потенциала теплового поля. Для симметризованной корреляционной функции, как нетрудно установить, справедлива формула (1.3.20). Фурье-трансформанта $D^R_{ik}(\omega)$ полностью определяет возможные резонансные состояния в спектре состояний теплового поля. В частности, знаменатели функции Грина определяют дисперсионные уравнения для поверхностных поляритонов системы — ее собственных мод, на частотах которых наблюдаются резонансные особенности в спектре. Практически, имея набор собственных функций, например, в системах координат, в которых допускается разделение переменных, можно найти соответствующие функции Грина в виде разложения по собственным функциям рассматриваемой системы. Имеющиеся в литературе экспериментальные результаты качественно и количественно согласуются с теоретическими представлениями. Разнообразные способы описания термостимулированных полей и ряд примеров решения задач флуктуационной электродинамики можно найти в работе [33].

С другой стороны, следуя описанному в этом пункте рецепту квантовой статистической физики, если в определении (1.3.43) в качестве операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ взять компоненты векторного потенциала теплового поля, то спектральная теорема (1.3.46) в этом случае запишется в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[G^R_{ik}(\omega+i\varepsilon)-G^A_{ik}(\omega-i\varepsilon)\right]=-iJ_{ik}(\omega)\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)\right]. \tag{1.3.48}$$

Нетрудно заметить, что определение (1.3.9) эквивалентно определению (1.3.43).

Тогда, если функции Грина G^R_{ik} и D^R_{ik} определены идентично, то подход [29], который основан на использовании цепочки зацепляющихся уравнений для нахождения G^R_{ik}, должен быть эквивалентен подходу [25], основанному на решении системы уравнений Максвелла для нахождения D^R_{ik}.

Для пояснения определим обычным образом запаздывающую функцию Грина по компонентам векторного потенциала термостимулированного электромагнитного поля:

$$G^R_{ik}(\vec r,\vec r\,';t,t')=$$
$$=-i\theta(t-t')\left\{\left\langle\widehat{A}_i(\vec r,t)\widehat{A}_k(\vec r\,',t')\right\rangle-\left\langle\widehat{A}_k(\vec r\,',t')\widehat{A}_i(\vec r,t)\right\rangle\right\}, \tag{1.3.49}$$

где операторы динамических переменных системы взяты в представлении Гейзенберга, а усреднение проведено по большому каноническому ансамблю. Для составления цепочки уравнений движения используем определение временной производной оператора через его коммутатор с гамильтонианом системы (1.3.35) и применим к функции Грина (1.3.49).

Цепочка уравнений для временных образов выглядит так:

$$\begin{gathered}
i\hbar\,\frac{dG^R_{ik}(t,t')}{dt}=\hbar\delta(t-t')\left\langle[\widehat{A}_i(t)\widehat{B}_k(t')]\right\rangle+G^{R'}_{ik}(t,t'),\\
G^{R'}_{ik}(t,t')=-i\theta(t-t')\left\{\left\langle[\widehat{A}_i(t)\widehat{H}]\widehat{B}_k(t')\right\rangle-\left\langle\widehat{B}_k(t')[\widehat{A}_i(t)\widehat{H}]\right\rangle\right\},\\
i\hbar\,\frac{dG^{R'}_{ik}(t,t')}{dt}=\hbar\delta(t-t')\left\langle[[\widehat{A}_i(t)\widehat{H}]\widehat{B}_k(t')]\right\rangle+G^{R''}_{ik}(t,t'),\\
G^{R''}_{ik}(t,t')=-i\theta(t-t')\left\{\left\langle[[\widehat{A}_i(t)\widehat{H}]\widehat{H}]\widehat{B}_k(t')\right\rangle-\left\langle\widehat{B}_k(t')[[\widehat{A}_i(t)\widehat{H}]\widehat{H}]\right\rangle\right\},\\
i\hbar\,\frac{dG^{R''}_{ik}(t,t')}{dt}=\hbar\delta(t-t')\left\langle[[[\widehat{A}_i(t)\widehat{H}]\widehat{H}]\widehat{B}_k(t')]\right\rangle+G^{R'''}_{ik}(t,t'),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{1.3.50}$$

Будем считать, что система находится в равновесии, т. е. все зависимости только от разности моментов времени $t-t'$, кроме того, положим

$t' = 0$. Тогда можно перейти к фурье-трансформантам в (1.3.50) и записать для них бесконечную цепочку связанных уравнений, которая выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}
\hbar\omega G_{ik}^{R}(\omega; \vec{r}, \vec{r}') = \hbar \left\langle [\widehat{A}_i \widehat{A}_k] \right\rangle + G_{ik}^{R'}(\omega; \vec{r}, \vec{r}'), \\
\hbar\omega G_{ik}^{R'}(\omega; \vec{r}, \vec{r}') = \hbar \left\langle [[\widehat{A}_i \widehat{H}] \widehat{A}_k] \right\rangle + G_{ik}^{R''}(\omega; \vec{r}, \vec{r}'), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered} \tag{1.3.51}$$

где $\left\langle [\widehat{A}_i \widehat{A}_k] \right\rangle$, $\left\langle [[\widehat{A}_i \widehat{H}] \widehat{A}_k] \right\rangle$ и т. д. — средние от коммутаторов тех же операторов в шредингеровском представлении, $G_{ik}^{R}(\omega)$ — фурье-трансформанта первой функции Грина $G_{ik}^{R}(t - t')$ (1.3.49), $G_{ik}^{R'}(\omega)$, $G_{ik}^{R''}(\omega)$ — фурье-трансформанты второй $G_{ik}^{R'}(t - t')$, третьей $G_{ik}^{R''}(t - t')$ и т. д. двухвременных функций Грина, определенных в (1.3.50).

Способы нахождения функций Грина из уравнений движения постоянно совершенствуются. В частности, используется процедура «линеаризации» уравнения движения путем замены коммутатора во второй функции Грина и ее самой на некоторое разложение с помощью так называемых K- и F-матриц в прямом алгебраическом методе [31].

Таким образом, определяя фурье-образ $G_{ik}^{R}(\omega)$ из цепочки связанных уравнений (1.3.51) с заданным гамильтонианом системы, можно найти фурье-образ $J_{ik}(\omega)$, используя спектральную теорему (1.3.48).

С другой стороны фурье-трансформанта функции Грина во флуктуационной электродинамике [25], определяемая аналогично (1.3.49), является, например, в простейшем случае, когда $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$, $\mu_{ik} = \delta_{ik}$, решением уравнения с граничными условиями

$$\sum_n \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_n} - \delta_{in}\Delta - \delta_{in} \frac{\omega^2}{c^2}\, \varepsilon(\omega, \vec{r}) \right] D_{nk}^{R}(\omega; \vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\hbar\delta_{ik}\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \tag{1.3.52}$$

Очевидно, что решение бесконечной цепочки уравнений (1.3.51) должно быть идентично решению задачи (1.3.52). Отсюда следует, что, используя решение, полученное одним методом, можно найти условия его нахождения по схеме другого метода. Но и это не главное. Очевидно, что уже известные решения задач флуктуационной электродинамики накладывают ограничения на возможный вид гамильтониана в представлении чисел заполнения, используемый в методе уравнений движения для функций Грина. Причем речь идет о гамильтониане термостимулированного поля, порождаемого объектами с реальными характеристиками. В простейшем случае — это полупространство с комплексной диэлектрической проницаемостью.

Отметим, что описанная аналогия может быть полезна при рассмотрении других процессов гауссовой статистики, но иной, неэлектромагнитной природы.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. *Einstein A.* Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen // Ann. Phys. 1905. V. 322, № 8. P. 549–560; Zur Theorie der Brownschen Bewegung. 1906. V. 324, № 2. P. 371–381.
2. *von Smoluchowski M.* Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen // Ann. Phys. 1906. V. 326, № 14. P. 756–780.
3. *Langevin P.* Stir Ia théorie du mouvement brownien // Comptes Rendues. 1908. V. 146. P. 530–533.
4. *Рытов С. М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. — М.: АН СССР, 1953.
5. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. — М.: Наука, 1966.
6. *Рытов С. М.*, *Кравцов Ю. А.*, *Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. — М.: Наука, 1978.
7. *Левин М. Л.*, *Рытов С. М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
8. *Клаудер Дж.*, *Сударшан Э.* Основы квантовой оптики. — М.: Мир, 1970).
9. *Клышко Д. Н.* Физические основы квантовой электроники. — М.: Наука, 1986.
10. *Wolf E.* A Macroscopic Theory of Interference and Diffraction of Light from Finite Sources. II. Fields with a Spectral Range of Arbitrary Width // Proc. Roy. Soc. A. 1955. V. 230, № 1181. P. 246–265.
11. *Wolf E.* Reciprocity Inequalities, Coherence Time and Bandwidth in Signal Analysis and Optics // Proc. Phys. Soc. 1958. V. 71. P. 257–269.
12. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Т. 8. — М.: Физматлит, 2003.
13. *Бредов М. М.*, *Румянцев В. В.*, *Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. — М.: Наука, 1985.
14. *Батыгин В. В.*, *Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике. — М.: Наука, 1970.
15. *Ильинский Ю. А.*, *Келдыш Л. В.* Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
16. *Силин В. П.*, *Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961.
17. *Callen H. B.*, *Welton T. A.* Irreversibility and generalized noise // Phys. Rev. 1951. V. 83. P. 34–40.
18. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Т. 5. — М.: Физматлит, 2005.

19. *Kubo R.* The fluctuation-dissipation theorem // Reports on Progress in Physics. 1966. V. 29. P. 255–284.
20. *Климонотович Ю. Л.* Нелинейное броуновское движение // УФН. 1994. Т. 164. С. 811–844.
21. *Gillespie D. T.* The mathematics of Brownian motion and Johnson noise // Am. J. Phys. 1995. V. 64. P. 225–240.
22. *Рытов С. М.* О тепловых флуктуациях в распределенных системах // ДАН СССР. 1956. Т. 110. С. 371.
23. *Schwinger J.* On the Green's Functions of Quantized Fields // Proc. Nat. Acad. Sci. 1951. V. 37. P. 452–455.
24. *Боголюбов Н. Н.*, *Ширков Д. В.* Квантовые поля. — М.: Физматлит, 2005.
25. *Лифшиц Е. М.*, *Питаевский Л. П.* Статистическая физика. Ч. II. — М.: Физматлит, 2001.
26. *Agarwal G. S.* Quantum electrodynamics in the presence of dielectrics and conductors. I. Electromagnetic-field response functions and black-body fluctuations in finite geometries // Phys. Rev. A. 1975. V. 11, № 1. P. 230–242.
27. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Т. 3. — М.: Физматлит, 2004.
28. *Kubo R.* Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems // J. Phys. Soc. Jap. 1957. V. 12, № 6. P. 570–586.
29. *Боголюбов Н. Н.*, *Тябликов С. В.* Запаздывающие и опережающие функции Грина в статистической физике // ДАН СССР. 1959. Т. 126. С. 53–56.
30. *Зубарев Д. Н.* Двухвременные функции Грина в статистической физике // УФН. 1960. Т. LXX1, вып. 1. С. 71–116.
31. *Сарры М. Ф.* Аналитические методы вычисления корреляционных функций в квантовой статистической физике // УФН. 1991. Т. 161, № 11. С. 48–92.
32. *Carniglia C. K.*, *Mandel L.* Quantization of evanescent electromagnetic waves // Phys. Rev. D. 1971. V. 3, № 2. P. 280–296.
33. *Виноградов Е. А.*, *Дорофеев И. А.* Термостимулированные электромагнитные поля твердых тел // УФН. 2009. Т. 179, № 5. С. 449–485.

Глава 2
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ МАТЕРИАЛА

Поскольку в основе теории тепловых флуктуационных полей положен диэлектрический формализм, то наиболее удачная модель диэлектрической функции определяет совпадение расчетов с экспериментальными результатами. В этом параграфе мы рассмотрим разнообразные модели диэлектрической проницаемости твердых тел. Как известно, специфика зонной структуры материала определяет его принадлежность к металлам, полупроводникам, или диэлектрикам. Диэлектрики только шириной запрещенной зоны (несколько электрон-вольт, эВ) отличаются от полупроводников. У них, практически во всем разумном для твердого тела диапазоне температур, полностью заполнена валентная зона и свободна зона проводимости. У полупроводников ширина запрещенной зоны порядка и меньше 1 эВ, поэтому уже при комнатных температурах заселяется зона проводимости, и электропроводность возникает по двум зонам: электронная проводимость по зоне проводимости и дырочная проводимость по валентной зоне. Таковы, например, типичные полупроводники четвертой группы периодической таблицы элементов. У щелочных металлов, элементов первой группы, одна из зон заполнена наполовину, поэтому эти элементы являются металлами. Щелочноземельные элементы второй группы характеризуются перекрытием зон, у них уровень Ферми проходит по перекрывающимся зонам, поэтому у металлов второй группы проводимость осуществима по двум зонам. Элементы третьей группы также образуют металлические кристаллы. Сложная зонная структура веществ определяет их разнообразные свойства, в том числе и оптические. Для расчета спектральных характеристик термостимулированных полей, генерируемых различными твердыми телами, необходимо знание диэлектрических и магнитных проницаемостей этих тел в широких спектральных диапазонах. Такие данные можно получить из справочников оптических свойств веществ. Вместе с тем, модельные выражения для проницаемостей чрезвычайно важны, поскольку позволяют исследовать причинно-следственную связь между характерными особенностями строения веществ и их оптическими свойствами. В частности, исследовать резонансные состояния — поляритоны — собственные состояния сложной системы, включающей в себя электромагнитное поле и кристаллическую решетку. В данной монографии мы будем использовать как полуэмпирические формулы для проницаемостей, так и разнообразные теоретические модельные их выражения. Напомним, прежде всего, самые общие свойства функций оптического отклика и диэлектрических проницаемостей.

§ 2.1. Общие свойства диэлектрической проницаемости

Аналитические свойства диэлектрической проницаемости подробно описаны в известных учебниках [1–7]. Если использовать систему уравнений вида (1.2.6), то линейный отклик системы, включающий электрические и магнитные явления, описывается линейным материальным уравнением самого общего вида:

$$\mathcal{D}_\alpha(\vec{r},t) = \int d^3r' \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \varepsilon_{\alpha\beta}\,(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')E_\beta\,(\vec{r}\,',t'), \tag{2.1.1}$$

где ядро интегрального оператора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ является действительной тензорной функцией отклика. Аналогичную форму имеют и другие линейные материальные уравнения $\vec{j} = \widehat{\sigma}\vec{E}$ и $\vec{\mathcal{P}} = \widehat{\chi}\vec{E}$, связывающие индуцированный ток и поляризацию в системе через проводимость $\sigma_{\alpha\beta}\,(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')$ и восприимчивость $\chi_{\alpha\beta}\,(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')$. Для замкнутой стационарной и пространственно однородной системы зависимость от координат и времени упрощается, например,

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\,(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = \varepsilon_{\alpha\beta}\,(\vec{r}-\vec{r}\,';t-t').$$

Иногда отклик записывают в другом виде, вводя функцию $f_{\alpha\beta}\,(t-t')$:

$$\mathcal{D}_\alpha(\vec{r},t) = E_\alpha(\vec{r},t) + \int d^3r' \int\limits_{-\infty}^{t} dt' f_{\alpha\beta}\,(\vec{r},\vec{r}\,';t-t')E_\beta\,(\vec{r}\,',t'), \tag{2.1.2}$$

откуда при сравнении с (2.1.1) следует, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\,(t-t') = \delta_{\alpha\beta}\delta\,(t-t') + f_{\alpha\beta}\,(t-t').$$

В случае зависимости ядер интегральных преобразований от разностей координат и времен интегральные уравнения (2.1.1) и (2.2.2) приводятся к алгебраическому виду с помощью преобразования Фурье. Так, в простейшем случае локальной среды, когда

$$f_{\alpha\beta}(\vec{r}-\vec{r}\,';\tau) = f_{\alpha\beta}(\tau)\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'),$$

где $\tau = t - t'$, преобразование Фурье по времени (1.1.6) выражения (2.1.2) приводит к соотношению

$$\mathcal{D}_\alpha(\omega) = E_\alpha(\omega) + E_\beta(\omega)\int\limits_0^\infty d\tau f_{\alpha\beta}(\tau)\, e^{i\omega\tau} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)E_\beta(\omega), \qquad (2.1.3)$$

где

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) = \delta_{\alpha\beta} + \int\limits_0^\infty d\tau f_{\alpha\beta}(\tau)\, e^{i\omega\tau}. \qquad (2.1.4)$$

Если имеется возможность произвести и пространственное разложение Фурье, например, вида

$$E_\alpha(\vec{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k\, d\omega}{(2\pi)^4}\, E_\alpha(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)}, \qquad (2.1.5)$$

то из (2.1.1) с разностным ядром

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{R}; \tau) = \varepsilon_{\alpha\beta}\,(\vec{r} - \vec{r}\,'; t - t')$$

следует

$$\mathcal{D}_\alpha(\vec{k}, \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)E_\beta(\vec{k}, \omega), \qquad (2.1.6)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$ — фурье-образ функции $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{R}; \tau) = \varepsilon_{\alpha\beta}\,(\vec{r} - \vec{r}\,'; t - t')$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = \int\limits_0^\infty d\tau \int d^3R\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{R}, \tau) e^{-i(\vec{k}\,\vec{r} - \omega\tau)}. \qquad (2.1.7)$$

Здесь интегрирование по пространству ведется по области $R < c\tau$, а положительность $\tau = t - t'$ выражает так называемый принцип причинности, заключающийся в том, что отклик системы может следовать только после включения возмущения.

Аналогичное разложение справедливо для тока и поляризации:

$$j_\alpha(\vec{k}, \omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)E_\beta(\vec{k}, \omega), \qquad (2.1.8)$$

$$\mathcal{P}_\alpha(\vec{k}, \omega) = \chi_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)E_\beta(\vec{k}, \omega). \qquad (2.1.9)$$

Из общей связи $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t)$ и (2.1.6)–(2.1.9) следует, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi\chi_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega), \qquad (2.1.10)$$

а учитывая, что

$$j_\alpha(\vec{k}, \omega) = -i\omega\mathcal{P}_\alpha(\vec{k}, \omega),$$

поскольку $\vec{j}(\vec{r}, t) = \partial\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t)/\partial t$, следует связь

$$\chi_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = i\sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)/\omega.$$