

Барыбин А.А.

**Электродинамика  
волноведущих  
структур. Теория  
возбуждения и  
связи волн**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 537.876; 621.372.8

ББК 31.27-01

Б 26

**Барыбин А. А. Электродинамика волноведущих структур. Теория возбуждения и связи волн.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 512 с. — ISBN 978-5-9221-0740-2.

На основе базовых положений электродинамики разработана самосогласованная теория возбуждения и связи волноводных мод, применимая к любым (закрытым и открытым) волноведущим структурам. Рассмотрены волноведущие структуры, содержащие в своем составе среды с изотропными, анизотропными и бианизотропными свойствами. Рассмотрение проводилось с учётом диссипации энергии в этих средах. В качестве приложения общей теории рассмотрены планарные оптические волноводы, используемые в интегральной оптике, электрооптике, акустооптике и магнитооптике. Коэффициенты модальной связи получаются как частный случай общих выражений, учитывающих статистические и динамические параметрические возмущения в применении к направляемым и излучательным модам открытых диэлектрических волноводов.

Результаты двух последних глав могут служить основой для разработки прикладных программ численного расчета разнообразных устройств волноводной оптики.

Книга предназначена студентам, аспирантам и преподавателям вузов, а также специалистам в области теоретической и прикладной электродинамики, интегральной оптики, акустооптики, электрооптики и магнитооптики.

ISBN 978-5-9221-0740-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© А. А. Барыбин, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	9
<b>Глава 1. Направляемые и излучательные моды открытых волноведущих структур . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1. Общие свойства собственных мод закрытого волновода без потерь . . . . .	20
1.2. Определение направляемых и излучательных мод открытого волновода . . . . .	31
1.3. Спектральное представление полей в открытых волноведущих структурах . . . . .	34
1.4. Поле излучения открытых волноведущих структур . . . . .	41
1.5. Поле излучения и концепция вытекающих мод . . . . .	48
1.6. Лучевая интерпретация направляемых и излучательных мод в планарных диэлектрических волноводах . . . . .	60
1.7. Электромагнитные поля и дисперсионные уравнения направляемых мод в планарных диэлектрических волноводах . . . . .	66
1.8. Нормировка направляемых мод в планарных диэлектрических волноводах . . . . .	74
1.9. Нормировка излучательных мод в планарных диэлектрических волноводах . . . . .	81
<b>Глава 2. Теория возбуждения волноведущих структур сторонними источниками . . . . .</b>	<b>101</b>
2.1. Энергетические соотношения электродинамики волноводов с бианизотропными средами . . . . .	104
2.2. Модальные разложения переносимой мощности и мощности потерь в закрытых волноводах . . . . .	113
2.3. Квази-ортогональность мод в закрытых волноводах с потерями . . . . .	116
2.4. Ортогональность активных и реактивных мод в волноводах без потерь . . . . .	119
2.5. Объемные и поверхностные возбуждающие источники . . . . .	125
2.6. Ортогональные дополнительные поля и эффективные поверхностные токи . . . . .	127
2.7. Электродинамический метод вариации постоянных в теории возбуждения волноводов . . . . .	132
2.8. Теория возбуждения волноводов на основе сопряженной леммы Лоренца . . . . .	141
2.9. Обсуждение уравнений возбуждения для диссипативных и недиссипативных закрытых волноводов . . . . .	150
2.10. Возбуждающие источники и модальные разложения полей в открытых волноводах с изотропным заполнением . . . . .	154
2.11. Сопряженная лемма Лоренца для многочастотного режима . . . . .	161
2.12. Квази-ортогональность и ортогональность мод в открытых волноводах с изотропным заполнением . . . . .	164
2.13. Возбуждение направляемых и излучательных мод в открытых оптических волноводах . . . . .	168

Глава 3. Теория связи мод в одиночном диэлектрическом волноводе . . .	176
3.1. Модальные разложения избыточной поляризации среды и возбуждающих токов . . . . .	179
3.2. Уравнения связанных мод для волноводов с потерями и без потерь . . . . .	184
3.3. Планарный диэлектрический волновод с периодическим возмущением границы . . . . .	197
3.4. Взаимная связь направляемых мод в гофрированном волноводе . . . . .	203
3.5. Связь направляемой моды с непрерывным спектром излучательных мод в гофрированном волноводе . . . . .	214
3.6. Тензорное описание оптических свойств анизотропных сред . . . . .	229
3.7. Электрооптическая связь направляемых мод в планарном волноводе . . . . .	231
3.8. Тензоры объемной и поверхностной связи мод за счет фотоупругого эффекта . . . . .	243
3.9. Дифракция света на звуке в фотоупругой среде . . . . .	246
3.10. Акустооптическая дифракция направляемых мод в планарном волноводе . . . . .	269
3.11. Тензоры объемной и поверхностной связи мод за счет эффектов Фарадея и Коттона–Мутона . . . . .	286
3.12. Магнитооптическая дифракция направляемых мод в планарных ферритовых структурах . . . . .	295
Глава 4. Теория связи мод в многоволноводных системах . . . . .	307
4.1. Модифицированная лемма Лоренца для разных диэлектрических сред . . . . .	310
4.2. Квази-ортогональность мод в многоволноводных системах с потерями . . . . .	313
4.3. Квази-ортогональность и ортогональность мод в многоволноводных системах без потерь . . . . .	315
4.4. Модальные разложения полей, избыточной поляризации среды и возбуждающих токов . . . . .	318
4.5. Тензоры объемной и поверхностной связи для многоволноводных систем . . . . .	320
4.6. Возбуждение направляемых и излучательных мод в системах с потерями . . . . .	328
4.7. Возбуждение направляемых и излучательных мод в системах без потерь . . . . .	334
4.8. Уравнения связанных мод для многоволноводных систем с потерями . . . . .	338
4.9. Уравнения связанных мод для многоволноводных систем без потерь . . . . .	341
4.10. Уравнения связанных мод для двух диэлектрических волноводов . . . . .	346
4.11. Коэффициенты связи для мод ТЕ- и ТМ-типа в связанных волноводах . . . . .	354
4.12. Обобщение теории связанных мод для непараллельных волноводов . . . . .	362
Приложение А. Общие вопросы спектрального анализа волноведущих структур . . . . .	367
А.1. Спектральная структура решения неоднородных граничных задач . . . . .	367
А.2. Аналитические свойства функции $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ на комплексной плоскости $k_z$ . . . . .	372
А.3. Метод седловой точки . . . . .	375

---

Приложение Б. Соотношения функционального анализа и их электродинамические аналоги . . . . .	382
Б.1. Математическая формулировка . . . . .	382
Б.2. Электродинамическая формулировка . . . . .	386
Приложение В. Простая лемма Лоренца и ее электродинамические следствия . . . . .	391
В.1. Вывод леммы Лоренца в простой (несопряженной) форме . . . . .	391
В.2. Вывод соотношения ортогональности . . . . .	394
В.3. Вывод уравнений возбуждения мод . . . . .	396
Приложение Г. Элементы обычной теории связанных мод . . . . .	400
Г.1. Усреднение квадратичных величин для многочастотных процессов . . . . .	402
Г.2. Соотношения Мэнли–Роу для нелинейных волноведущих систем . . . . .	405
Г.3. Соотношения Мэнли–Роу для параметрических волноведущих систем . . . . .	406
Г.4. Энергетическая нормировка активных мод в параметрических системах . . . . .	409
Г.5. Общая форма уравнений связанных мод для недиссипативных волноведущих структур . . . . .	412
Г.6. Энергетические требования к коэффициентам связи . . . . .	413
Г.7. Критерий отбора сильно взаимодействующих мод . . . . .	416
Г.8. Условия фазового согласования мод при однородной, периодической и параметрической связи . . . . .	420
Г.9. Нормальные волны недиссипативной волноведущей структуры с двумя связанными модами . . . . .	423
Г.10. Режим переизлучения попутных мод . . . . .	435
Г.11. Режим переизлучения встречных мод . . . . .	439
Г.12. Режим усиления попутных мод . . . . .	444
Г.13. Режим усиления (генерации) встречных мод . . . . .	449
Г.14. Сравнительная характеристика режимов парной связи мод . . . . .	453
Приложение Д. Решение модифицированных уравнений связанных мод . . . . .	465
Д.1. Энергетические требования к коэффициентам связи . . . . .	465
Д.2. Модификация структуры решения связанных уравнений . . . . .	469
Приложение Е. Модальное разложение избыточной поляризации среды для волновода многоволноводной системы . . . . .	474
Е.1. Двухволноводная система . . . . .	474
Е.2. Трехволноводная и многоволноводная системы . . . . .	475
Приложение Ж. Коэффициенты связи и кросс-нормы для двух связанных волноводов . . . . .	477
Ж.1. Коэффициенты связи для мод ТЕ-типа . . . . .	477
Ж.2. Коэффициенты связи для мод ТМ-типа . . . . .	481
Ж.3. Кросс-норма мод ТЕ-типа . . . . .	492
Ж.4. Кросс-норма мод ТМ-типа . . . . .	494
Список литературы . . . . .	499
Предметный указатель . . . . .	506

## Предисловие

Электродинамика с момента своего зарождения во времена Максвелла до современного состояния прошла большой путь трудами многочисленных исследователей и ученых. Ее первые шаги как теории электромагнитного поля заложили надежные основы для практического применения электромагнитных колебаний и волн, что впоследствии сформировало различные направления технической электродинамики. В дальнейшем прогресс теоретической и технической электродинамики определялся не только чисто научными интересами, но и стимулировался технологическими потребностями и техническими задачами, возникавшими на определенном этапе.

Одним из первых стимулирующих факторов было развитие *радиосвязи* и *радиолокационной техники*. Возникла практическая необходимость в теоретическом изучении и инженерном освоении электромагнитных резонаторов, волноводов и антенн радиочастотного и сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазонов. В качестве волноведущих сред для разнообразных СВЧ-устройств изначально применялись пассивные диэлектрики с изотропными свойствами, а затем магнитодиэлектрики с анизотропными свойствами (ферриты). Антенная тематика и вопросы распространения электромагнитных волн в околоземной атмосфере породили в свое время большой интерес к изучению газовой плазмы (естественной и искусственной) как волноведущей среды. Накопленный за многие годы опыт в этих направлениях в настоящее время аккумулирован в многочисленных научных и инженерно-технических публикациях, которые составляют современную основу теоретической и технической электродинамики сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн.

Электромагнитные волны оптического диапазона издавна изучались в рамках геометрической и волновой оптики некогерентного и когерентного излучения. Несколько десятилетий назад появился мощный стимул для переформулировки ряда теоретических положений электродинамики в приложении к практическим нуждам *волоконной и интегральной оптики*, зародившейся в те годы. Сегодня оптические каналы передачи, приема и обработки информации широко применяются в современных системах связи и телекоммуникаций, включая всемирную сеть Интернет. Для этих целей используют оптические волноводы различного типа, среди которых преобладают волоконные и планарные конструкции как основные волноведущие структуры. Обработка информации в оптических волноводах осуществляется на основе материальных сред со специфическими свойствами, позволяющими эффективно управлять характеристиками распространения электромагнитных волн. К подобным средам прежде всего относятся материалы, обладающие акустооптическими, электрооптическими и магнитооптическими свойствами. Широкое применение также находят периодические волноводы с гофрированной поверхностью и связанные диэлектрические волноводы. Электродинамические

проблемы волновых процессов в разнообразных устройствах волоконной и интегральной оптики составляют сегодня предмет *волноводной оптики*.

В настоящее время наблюдается возросший интерес к электродинамическим проблемам, которые вызваны применением киральных и бианизотропных сред для управления электромагнитными процессами в волноведущих структурах. Несмотря на то, что свойство естественной киральности (оптической активности) в ряде природных веществ было известно свыше полтора столетия назад и достаточно изучено, оно не находило практического применения до последнего времени. Возрождение научного и технического интереса к подобным средам вызвано в настоящее время достижениями в технологии синтеза искусственных сред с бианизотропными свойствами. Уникальные свойства таких сред открывают неожиданные потенциальные возможности, связанные с их применением в СВЧ и оптическом диапазонах, что формирует новое направление *бианизотропной электродинамики*.

Таким образом, современная электродинамика имеет дело с различного рода анизотропными и бианизотропными средами, обладающими разнообразными физическими свойствами (диэлектрическими, магнитными, акустооптическими, электрооптическими, магнитооптическими и др.), которые можно собирательно назвать *сложными средами*, в отличие от простых сред с изотропными свойствами.

К настоящему моменту научная литература, посвященная различным аспектам электродинамики волноведущих структур, огромна и отличается разнообразием применяемых подходов, формулировок и приближений. Это делает чрезвычайно трудной, а зачастую и невыполнимой, задачу формирования единой физической картины и согласования между собой результатов, полученных разными авторами. Более того, применение различных волноведущих сред (например, с акустооптическими, электрооптическими и магнитооптическими свойствами) привело к формированию самостоятельных научно-технических направлений в волноводной оптике, таких как акустооптика, электрооптика и магнитооптика. В последние годы эти направления, в том числе и бианизотропная электродинамика, развивались практически независимо друг от друга, что породило большое количество работ, базирующихся на различных теоретических моделях и подходах. Как следствие этого, ученые и инженеры, специализирующиеся в разных областях теоретической и технической электродинамики, зачастую испытывают трудности в общении и взаимопонимании, а также при чтении литературы.

Все вышесказанное свидетельствует о том, что в настоящее время возникла необходимость в разработке строгой и последовательной теории возбуждения и связи мод в волноведущих структурах, изложенной с единых электродинамических позиций. Это вполне реально, так как теоретическое изучение электромагнитных волн в любой волноведущей структуре всегда базируется на совместном решении уравнений Максвелла с учетом специфики применяемой среды в форме материальных уравнений и электродинамических граничных условий. Разрабатываемая теория должна быть построенной на фундаментальных формулировках электродинамики, таких как теорема Пойнтинга, лемма Лоренца, спектр собственных мод волноведущей структуры и т. п. Только в этом случае она может дать единый электродинамический

подход к анализу различных волноводов и сформировать физически непротиворечивую картину разнообразных волновых взаимодействий. Именно это и составляет основную цель данной монографии.

Самосогласованный подход к разработке единой теории волновых взаимодействий, основанный на строгих электродинамических принципах, будет осуществлен последовательно в три этапа, описанные во введении.

Глава 1 посвящена рассмотрению волнораспространяющих свойств и отличительных особенностей открытых волноводов как наиболее общей формы волнораспространяющей структуры. Открытые волноводы имеют в составе своего спектра не только дискретные моды (являющиеся единственно возможными для закрытых волноводов), но и излучательные моды непрерывной части спектра.

В гл. 2 разрабатывается теория возбуждения дискретных и излучательных мод открытого волновода заданными источниками для общего случая бианизотропных сред. В частном случае теория применима к оптическим волноводам, а также допускает обобщение на случай сред с пространственной дисперсией, рассмотрение которых выходит за рамки данной книги.

Главы 3 и 4 содержат изложение техники перехода от уравнений возбуждения мод заданными источниками к уравнениям связанных мод на примере открытых волноводов с последующим анализом оптико-волновых взаимодействий в одноволноводных и многоволноводных оптических системах.

Математические выводы и вспомогательный материал, в частности общие аспекты теории связанных мод, вынесены в приложения.

Изложение в книге построено так, чтобы сделать ее доступной большинству читателей без обращения к другой литературе. Однако для этого читатель должен обладать начальными знаниями в области теории электромагнитного поля и классической электродинамики, изложенными, например, в следующих книгах:

- *Никольский В. В.* Теория электромагнитного поля. 3-е изд. — М.: Высшая школа, 1964.
- *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
- *Каценеленбаум Б. З.* Высокочастотная электродинамика (основы математического аппарата). — М.: Наука, 1966.
- *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Советское радио, 1971.
- *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1988.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и преподавателей вузов, а также для специалистов в области теоретической и прикладной электродинамики, интегральной оптики, акустооптики, электрооптики и магнитооптики. Результаты двух последних глав могут служить основой для разработки прикладных программ численного расчета устройств волноводной оптики.

Любые критические замечания и пожелания, высланные по нижеуказанному адресу, будут приняты с благодарностью.

Санкт-Петербург  
декабрь 2006 г.

*А. А. Барыбин*  
barybin@mail.ru



## Введение

### ПОСТАНОВКА И КРАТКОЕ ОБСУЖДЕНИЕ ПРОБЛЕМ, РАЗРАБАТЫВАЕМЫХ В КНИГЕ

Предлагаемое введение содержит материал, который кратко вводит читателя в круг общих проблем и задач, решаемых в последующих главах книги на пути к разработке единой электродинамической теории возбуждения и связи мод в волноведущих структурах.

Анализ любой волноведущей структуры имеет конечной целью выяснение характера волновых взаимодействий в форме обмена мощностью между модами этой структуры при наличии ее возмущения. Поэтому разработка общей электродинамической теории волновых взаимодействий осуществляется последовательно в три этапа:

- решение волноводной задачи на собственные значения,
- решение задачи о возбуждении волновода заданными источниками,
- решение задачи о связи между модами рассматриваемого волновода.

**Первый этап** — решение волноводной задачи на собственные значения, имеет дело с так называемым *базовым волноводом*, выделенным из сложной волноведущей структуры. Геометрическая форма и параметры среды, заполняющей подобный волновод, должны допускать решение граничной задачи на собственные значения для однородных уравнений Максвелла (без возбуждающих источников) с соответствующими электродинамическими граничными условиями (ЭГУ). Такое решение дает искомый спектр базового волновода, дискретные моды которого подчиняются дисперсионному уравнению, полученному на этом этапе.

Основными характеристиками собственной моды (для определенности, с номером  $m$ ) любого волновода, в том числе выбранного в качестве базового, являются следующие:

1) *постоянная распространения*  $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$ , которая найдена из решения дисперсионного уравнения и описывает продольное распределение полей в форме  $\exp(-\gamma_m z)$ ;

2) набор собственных функций, которые найдены как решение однородной граничной задачи и описывают поперечное распределение электрического и магнитного полей  $\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t)$  и  $\hat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t)$ , отмеченных сверху колпачком и в дальнейшем называемых *мембранными функциями*.

Полные невозмущенные поля  $m$ -й моды (при гармонической зависимости от времени в форме  $\exp(i\omega t)$ ) записываем в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z, t) &= \mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) e^{i\omega t} = \widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t) e^{(i\omega t - \gamma_m z)}, \\ \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z, t) &= \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) e^{i\omega t} = \widehat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t) e^{(i\omega t - \gamma_m z)}.\end{aligned}\quad (1)$$

Волновой множитель  $\exp(i\omega t - \gamma_m z)$  учитывает *дисперсию моды*, понимаемую в *расширенной форме* как частотную зависимость не только фазовой скорости  $v_{\text{ph},m}(\omega) = \omega/\beta_m(\omega)$ , но и амплитудной постоянной  $\alpha_m(\omega)$ . В диссипативных системах потери обеспечивают ненулевое затухание ( $\alpha_m \neq 0$ ) для всех без исключения мод, называемых поэтому *диссипативными модами*.

В недиссипативных системах модальный спектр содержит, как известно, кроме *распространяющихся мод* с  $\alpha_m = 0$  и  $\gamma_m = i\beta_m$ , также моды, имеющие комплекснозначные постоянные распространения  $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$  с  $\alpha_m \neq 0$ , несмотря на отсутствие потерь. Такие моды могут существовать только на частотах, соответствующих полосе непропускания волновода, и поэтому называются *нераспространяющимися* модами. Среди них имеются *исчезающие моды* (англ. *evanescent modes*), которые затухают по амплитуде ( $\alpha_m \neq 0$ ) без изменения фазы ( $\beta_m = 0$ ), так что их постоянная распространения чисто вещественная ( $\gamma_m = \alpha_m$ ). Кроме того, возможны более общие физические ситуации, когда в полосе непропускания существуют так называемые *комплексные моды* (англ. *complex modes*), имеющие одновременно  $\alpha_m \neq 0$  и  $\beta_m \neq 0$ . Для таких мод затухание амплитуды в форме  $\exp(-\alpha_m z)$  сопровождается распространением фазы, описываемым фазовым множителем  $\exp[i(\omega t - \beta_m z)]$ .

Следовательно, термин *нераспространяющийся* в применении к комплексным модам является неточным. По этой причине нераспространяющиеся моды (комплексные и исчезающие) предпочтительнее собирательно называть *реактивными модами*, поскольку их затухание имеет чисто реактивный (недиссипативный) характер, связанный с запасанием реактивной энергии без переноса ее вдоль волновода.

По этой терминологии, распространяющиеся моды с чисто мнимой постоянной распространения  $\gamma_m = i\beta_m$ , в отличие от реактивных, следует называть *активными модами*. Для таких мод характерно существование действительной групповой скорости  $v_{\text{gr},m} = (\partial\beta_m/\partial\omega)^{-1}$ , которая определяет активную *собственную мощность*, переносимую  $m$ -й модой вдоль волновода,

$$P_m = v_{\text{gr},m} W_m, \quad (2)$$

где  $W_m$  — средняя во времени электромагнитная энергия, запасенная  $m$ -й модой в единице длины волновода.

*Реактивные моды*, подобно активным, также запасают энергию ( $W_m \neq 0$ ), но каждая из них по отдельности *не может* переносить *собственную мощность* из-за отсутствия у нее групповой скорости (вследствие комплексных или чисто вещественных значений  $\gamma_m$ ). Как показано в гл. 2, такая возможность для каждой реактивной моды возникает только в отношении *взаимной мощности*, переносимой в паре с другой реактивной модой, названной *двойниковой модой* (англ. *twin-conjugate mode*).

Таким образом, вновь введенные термины *активная мода* и *реактивная мода* классифицируют их по наличию или отсутствию переносимой активной мощности  $P_m$ , определяемой выражением (2). Эти термины полностью эквивалентны терминам *распространяющаяся мода* и *нераспространяющаяся мода*, если под этим понимать наличие или отсутствие не фазовой скорости, а *групповой скорости* моды.

Разработке первого этапа анализа в применении к открытым волноведущим структурам посвящена гл. 1, где изучаются спектральные и энергетические характеристики открытого диэлектрического волновода, используемого в качестве базового волновода, который имеет в своем спектре как дискретные направляемые моды, так и непрерывные излучательные моды.

**Второй этап** — решение задачи о возбуждении волновода сторонними источниками, рассматривает оставшуюся (после выделения базового волновода на первом этапе) часть исследуемой волноведущей структуры как возмущение базового волновода. Это возмущение записывается в форме *возбуждающих источников* (электрических и магнитных токов, соответственно отмеченных верхними индексами  $e$  и  $m$  от англ. *electric* и *magnetic*), которые считаются заданными на данном этапе.

Возбуждающие источники в форме *объемных токов*  $\mathbf{J}_b^{e,m}$  (с нижним индексом  $b$  от англ. *bulk*) входят в уравнения Максвелла,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_b^m, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_b^e, \quad (4)$$

и в форме *поверхностных токов*  $\mathbf{J}_s^{e,m}$  (с нижним индексом  $s$  от англ. *surface*) входят в электродинамические граничные условия,

$$\mathbf{n}_s^+ \times \mathbf{E}^+ + \mathbf{n}_s^- \times \mathbf{E}^- = -\mathbf{J}_s^m, \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_s^+ \times \mathbf{H}^+ + \mathbf{n}_s^- \times \mathbf{H}^- = \mathbf{J}_s^e. \quad (6)$$

Здесь векторы с верхними индексами  $\pm$  обозначают поля, взятые в точках границы с поверхностными токами  $\mathbf{J}_s^{e,m}$ , лежащих по разные ее стороны, которые отмечены единичными нормальными  $\mathbf{n}_s^\pm$ , направленными *внутри* соседних сред, разделяемых этой границей.

Иными словами, второй этап анализа разрабатывает *теорию возбуждения мод* волновода заданными токами, чему и посвящена гл. 2 в применении к любым сложным волноведущим структурам с многослойными изотропными, анизотропными и бианизотропными средами.

Теоретическую основу второго этапа составляет *метод модальных разложений*, широко используемый в волновой теории. Основная идея метода базируется на том факте, что совокупность собственных мод невозмущенного базового волновода является *полной*, т.е. система мембранных функций  $\{\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t), \hat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t)\}$  полна на поперечном сечении волновода. Это означает, что возбуждение мод заданным током (как и связь между ними) возмущает только продольное (в направлении оси волновода) распределение мод и оставляет

без изменения их поперечные распределения, описываемые мембранными функциями. Эти функции были найдены на первом этапе из решения невозмущенной задачи на собственные значения.

Искомые электромагнитные поля при наличии возмущений могут быть представлены в форме модального разложения по невозмущенному спектру базового волновода (опуская у полей (1) временную зависимость  $\exp(i\omega t)$ ):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z) \mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z) \hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}_t) e^{-\gamma_m z}, \quad (7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z) \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z) \hat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}_t) e^{-\gamma_m z}.$$

Здесь амплитуды  $A_m(z)$ , называемые *амплитудами возбуждения*, содержат искомую зависимость от  $z$ , порожденную возбуждением мод заданным распределением токов. Вне области возбуждения амплитуда моды остается неизменной ( $A_m(z) = \text{const}$ ) и равной той величине, которую мода приобрела на выходе из области возбуждения.

Нахождение закона изменения амплитуды  $A_m(z)$  *внутри* области возбуждения является основной и конечной целью теории возбуждения мод.

В простейшем случае волноводов без потерь уравнение возбуждения *активной моды* заданными объемными ( $\mathbf{J}_b^{e,m}$ ) и поверхностными ( $\mathbf{J}_s^{e,m}$ ) токами имеет вид (см. уравнение (2.7.15))

$$\begin{aligned} \frac{dA_m}{dz} = & -\frac{1}{N_m} \int_{S_b} (\mathbf{J}_b^e \cdot \mathbf{E}_m^* + \mathbf{J}_b^m \cdot \mathbf{H}_m^*) dS - \\ & -\frac{1}{N_m} \int_{L_s} (\mathbf{J}_s^e \cdot \mathbf{E}_m^* + \mathbf{J}_s^m \cdot \mathbf{H}_m^*) dL. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь объемные токи занимают область  $S_b$ , а поверхностные локализованы на контуре  $L_s$ ; при этом  $N_m$  — *норма*  $m$ -й активной моды, построенная на ее мембранных функциях в следующей форме (см. уравнение (2.7.16)):

$$N_m = 2\text{Re} \int_S (\hat{\mathbf{E}}_m \times \hat{\mathbf{H}}_m^*) \cdot \mathbf{e}_z dS, \quad (9)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения базового волновода.

Для реактивных мод в волноводах без потерь и диссипативных мод при наличии потерь уравнения (8) и (9) имеют другой вид, приведенный в гл. 2.

Знание закона изменения амплитуды возбуждения  $A_m(z)$ , полученного из решения уравнения (8) (или ему подобного), позволяет найти продольное распределение *собственной мощности*, переносимой  $m$ -й модой (см. уравнения (2.2.10) и (2.4.12)),

$$P_m(z) = \frac{1}{4} N_m |A_m(z)|^2 e^{-2\alpha_m z}, \quad (10)$$

где  $\alpha_m = 0$  для активных (распространяющихся) мод в волноводе без потерь.

Обоснование выражений (9) и (10), а также аналогичных формул, выражающих *взаимную норму*  $N_{mn}$  и *взаимную мощность*  $P_{mn}$  для пары мод с номерами  $m$  и  $n$ , будет сделано в гл. 2 (см. уравнения (2.2.6)–(2.2.13)).

В рамках метода модальных разложений решающей является *проблема полноты* системы базисных функций невозмущенного волновода в области возбуждающих источников. Большинство авторов решают эту проблему путем разложения искомым электромагнитных полей по невозмущенному спектру мод с учетом только поперечных компонент полей. Такой подход к проблеме возбуждения обеспечивает полноту системы собственных функций на поперечном сечении волновода благодаря исключению продольной компоненты полей. Однако эта процедура одновременно исключает из рассмотрения и так называемые *ортогональные дополнительные поля*. Как следствие этого, в области источников, содержащей не только поперечные, но продольные объемные токи, модальные разложения (7), широко используемые в литературе, дают неполное представление искомым полей.

Как показано в гл. 2, *внутри* области возбуждающих источников *полные* электромагнитные поля всегда должны быть представлены в следующей форме (см. уравнения (2.6.1) и (2.6.2)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, z) = \mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z) \mathbf{E}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z), \quad (11)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_t, z) = \mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z) = \sum_m A_m(z) \mathbf{H}_m(\mathbf{r}_t, z) + \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z). \quad (12)$$

Здесь модальные разложения полей  $\mathbf{E}_a(\mathbf{r}_t, z)$  и  $\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_t, z)$  (отмеченные индексом  $a$  и совпадающие с выражениями (7)) дополнены полями  $\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_t, z)$  и  $\mathbf{H}_b(\mathbf{r}_t, z)$  (отмеченными индексом  $b$ ), которые ортогональны полям невозмущенного модального спектра. Такие дополнительные поля порождены продольными объемными токами  $\mathbf{J}_{bz}^{e,m} = \mathbf{e}_z J_{bz}^{e,m}$  и пропорциональны этим токам в форме следующих соотношений (см. уравнения (2.6.27)):

$$\mathbf{E}_b = -\mathbf{e}_z \frac{J_{bz}^e}{i\omega\epsilon_{zz}}, \quad (13)$$

$$\mathbf{H}_b = -\mathbf{e}_z \frac{J_{bz}^m}{i\omega\mu_{zz}}, \quad (14)$$

где  $\epsilon_{zz}$  и  $\mu_{zz}$  —  $zz$ -компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости для анизотропной среды, заполняющей базовый волновод.

Знание ортогональных дополнительных полей, даваемых равенствами (13) и (14), позволяет найти так называемые *эффективные поверхностные токи* в форме (см. уравнения (2.6.28))

$$\mathbf{J}_{s,eff}^m = \mathbf{n}_b \times \mathbf{E}_b \Big|_{L_b} = \boldsymbol{\tau}_b \frac{J_{bz}^e(L_b)}{i\omega\epsilon_{zz}}, \quad (15)$$

$$\mathbf{J}_{s,eff}^e = -\mathbf{n}_b \times \mathbf{H}_b \Big|_{L_b} = -\boldsymbol{\tau}_b \frac{J_{bz}^m(L_b)}{i\omega\mu_{zz}}. \quad (16)$$

Здесь  $J_{bz}^e(L_b)$  и  $J_{bz}^m(L_b)$  — продольные компоненты объемных токов, взятые на границе  $L_b$  области  $S_b$  их существования,  $\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_b$  — единичный *тангенциальный* вектор, а  $\mathbf{n}_b$  означает единичную нормаль к  $L_b$ , направленную *наружу* по отношению к сечению  $S_b$ , занятому объемными токами  $\mathbf{J}_b^{e,m}$ .

Эффективные поверхностные токи  $\mathbf{J}_{s,eff}^{e,m}$ , как и объемные токи  $\mathbf{J}_b^{e,m}$ , играют роль *возбуждающих токов* и входят в уравнение возбуждения (8) (или ему подобные) вместо  $\mathbf{J}_s^{e,m}$  с заменой контура интегрирования  $L_s$  на  $L_b$ .

Эффективные поверхностные токи (15) и (16), порожденные ортогональными дополнительными полями (13) и (14), ранее были потеряны практически всеми авторами. Нахождение тех и других будет выполнено в гл. 2 для общего случая *бианизотропных сред*, дающего по сравнению с формулами (13)–(16) более сложные выражения, которые перемешивают вклады от электрических и магнитных продольных токов. В этом и состоит специфика второго этапа нашего анализа, которая отличает его от результатов ранее опубликованных работ.

Разработке второго этапа, связанного с построением общей теории возбуждения волноведущих структур сторонними источниками, полностью посвящена гл. 2. В основу разработанной теории положено новое понятие *квази-ортогональности мод*, обобщающее привычное понятие ортогональности на случай диссипативных систем. Именно это позволяет вывести уравнения возбуждения мод в общей форме, справедливой как для диссипативных, так и недиссипативных волноведущих структур. В отсутствие потерь эти уравнения применимы не только для распространяющихся мод (переносящих собственную мощность), но и для нераспространяющихся (исчезающих) мод (переносящих только взаимную мощность в паре со своей *двойниковой модой*).

**Третий этап** — решение задачи о связи между волноводными модами, представляет возбуждающие источники (введенные на втором этапе как объемные и эффективные поверхностные токи, входящие в уравнения возбуждения) в форме спектрального разложения по собственным модам базового волновода. Эта процедура обеспечивает взаимную связь между волноводными модами и превращает уравнения возбуждения мод, полученные на втором этапе, в уравнения связанных мод. Иными словами, третий этап анализа завершает разработку *электродинамической теории связанных мод*, чему посвящены гл. 3 и 4 в применении к одноволноводным и многоволноводным оптическим системам.

Согласно современным физическим воззрениям, возмущение любой среды на оптических частотах проявляется как диэлектрическое возмущение в форме *избыточной поляризации*  $\mathbf{P}$ . В этих условиях объемные возбуждающие токи, входящие в уравнения Максвелла (3) и (4), принимают вид

$$\mathbf{J}_b^e = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{J}_b^m = 0, \quad (17)$$

откуда для эффективных поверхностных токов (15) и (16) получаем

$$\mathbf{J}_{s,eff}^m \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{J}_{s,eff}^e = 0. \quad (18)$$

Избыточная поляризация  $\mathbf{P} = \Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Sigma} \cdot \mathbf{E}$  вызвана диэлектрическим возмущением среды в форме суммарного тензора (см. уравнение (2.10.19)):

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Sigma}(\mathbf{r}, t) = \Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}) + \Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{dyn}(\mathbf{r}, t) \equiv \Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}) + \operatorname{Re}\{2\delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r})e^{i\omega_p t}\}. \quad (19)$$

Суммарный тензор диэлектрического возмущения (19) учитывает не только статическое,  $\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r})$ , но и динамическое,  $\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{dyn}(\mathbf{r}, t)$ , возмущение среды. Последнее порождено параметрическими процессами в среде на частоте  $\omega_p$  накачки (индекс  $p$  от англ. *pump*), гармоники которой совместно с частотой  $\omega$  оптического сигнала создают спектр комбинационных частот:

$$\omega_{\nu} = \omega + \nu\omega_p, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, диэлектрическое возмущение, записанное в общей форме (19), обеспечивает многочастотный режим работы волноведущей структуры, при котором поля представлены в виде суммы частотных компонент. В частности, для электрического поля и избыточной поляризации среды имеем следующие частотные разложения (см. уравнения (2.10.21) и (2.10.23)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{\nu} t}, \quad (20)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}^{(\nu)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{\nu} t}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{E}^{(\nu)}$  и  $\mathbf{P}^{(\nu)}$  — комплексные амплитуды поля и поляризации на частоте  $\omega_{\nu}$ , при этом (см. уравнение (2.10.24))

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = \Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}^{(\nu)} + \delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}^{(\nu-1)} + \delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^* \cdot \mathbf{E}^{(\nu+1)}. \quad (22)$$

Комплексные амплитуды электрического поля,  $\mathbf{E}^{(\nu)}$  и  $\mathbf{E}^{(\nu\pm 1)}$ , на частотах  $\omega_{\nu}$  и  $\omega_{\nu\pm 1} = \omega_{\nu} \pm \omega_p$ , входящие в (22), представляются в виде полного модального разложения (11), учитывающего ортогональное дополнительное поле  $\mathbf{E}_b$ . Это поле на частоте  $\omega_{\nu}$  определяется выражениями (13) и (17) в виде  $\mathbf{E}_b^{(\nu)} = -\mathbf{e}_z P_z^{(\nu)}/\boldsymbol{\epsilon}$  для базового волновода с изотропным заполнением, когда  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}$ . Здесь и далее в книге принято обозначение  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_r \boldsymbol{\epsilon}_0$ , где  $\boldsymbol{\epsilon}_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость и  $\boldsymbol{\epsilon}_0$  — электрическая постоянная.

Возбуждающие токи в форме объемного электрического тока (17) и эффективного поверхностного магнитного тока (18), по аналогии с (20) и (21), представлены в виде суммы частотных составляющих (индекс *eff* опущен):

$$\mathbf{J}_b^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_b^{e(\nu)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{\nu} t}, \quad (23)$$

$$\mathbf{J}_s^m(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_s^{m(\nu)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{\nu} t}. \quad (24)$$

Уравнения (19)–(22) обеспечивают модальные разложения для комплексных амплитуд возбуждающих токов на частоте  $\omega_{\nu}$ , входящие в выражения

(23) и (24) в следующей форме (см. уравнения (3.1.16)–(3.1.21)):

$$\mathbf{J}_b^{\varepsilon(\nu)} \equiv i\omega_\nu \mathbf{P}^{(\nu)} = i\omega_\nu \sum_m \left[ A_m^{(\nu)} (\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu)}) + A_m^{(\nu-1)} (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu-1)}) + A_m^{(\nu+1)} (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^* \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu+1)}) \right], \quad (25)$$

$$\mathbf{J}_s^{m(\nu)} \equiv \frac{\tau_b P_z^{(\nu)}}{\varepsilon} \Big|_{L_b} = \sum_m \left[ A_m^{(\nu)} (\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu)}) + A_m^{(\nu-1)} (\delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu-1)}) + A_m^{(\nu+1)} (\delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_c^* \cdot \mathbf{E}_m^{(\nu+1)}) \right], \quad (26)$$

где введены отсутствующие в современной литературе физические величины:

- **тензоры объемной связи** (статический  $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$  и динамический  $\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ ),

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left( \bar{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon + \Delta \varepsilon_{zz}} \right), \quad (27)$$

$$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \left( \bar{\mathbf{I}} - \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z}{\varepsilon + \Delta \varepsilon_{zz}} \right) \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left( \bar{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varepsilon + \Delta \varepsilon_{zz}} \right), \quad (28)$$

отличающиеся от *тензоров диэлектрического возмущения* (статического  $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  и динамического  $\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ), которые входят в суммарный тензор возмущения (19);

- **тензоры поверхностной связи** (статический  $\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_c$  и динамический  $\delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_c$ ),

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_c = \frac{\tau_b \mathbf{e}_z \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta \varepsilon_{zz}(L_b)}, \quad (29)$$

$$\delta \bar{\boldsymbol{\xi}}_c = \frac{\tau_b \mathbf{e}_z \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta \varepsilon_{zz}(L_b)} \cdot \left( \bar{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)}{\varepsilon(L_b) + \Delta \varepsilon_{zz}(L_b)} \right), \quad (30)$$

порожденные эффективным поверхностным магнитным током; при этом  $\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$ ,  $\tau_b \mathbf{e}_z$  и  $\bar{\mathbf{I}}$  обозначают диадные произведения векторов и единичный тензор, а  $\varepsilon(L_b)$ ,  $\Delta \varepsilon_{zz}(L_b)$ ,  $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)$  и  $\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(L_b)$  — значения соответствующих величин, взятые в точках контура  $L_b$ , ограничивающего сечение  $S_b$ , занятое объемными токами. Тензоры связи (27)–(30) помечены нижним индексом  $c$  (от англ. *coupling*), для того чтобы отличить их от тензоров возмущения  $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  и  $\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Подстановка модальных разложений (25) и (26) для возбуждающих токов в уравнения возбуждения типа (8) (или им подобные) превращает последние в уравнения связанных мод (см. соответствующие параграфы в гл. 3 и 4).

Для простейшего случая волноведущей структуры без потерь общая система *уравнений связанных мод* имеет вид (с нижними модальными индексами  $m, n = 1, 2, \dots, \infty$  и с верхними частотными индексами  $(\nu)$  и  $(\nu \pm 1)$ ) (см. уравнение (3.2.24)):

$$\frac{dA_m^{(\nu)}}{dz} = \sum_n \left[ c_{mn}^{(\nu, \nu)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu)})z} A_n^{(\nu)} + c_{mn}^{(\nu, \nu-1)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu-1)})z} A_n^{(\nu-1)} + c_{mn}^{(\nu, \nu+1)} e^{i(\beta_m^{(\nu)} - \beta_n^{(\nu+1)})z} A_n^{(\nu+1)} \right]. \quad (31)$$



Здесь коэффициенты связи, определенные в форме матричных элементов для тензоров связи (27)–(30), характеризуют связь между модами как на одной частоте (благодаря статическим тензорам  $\Delta\bar{\epsilon}_c$  и  $\Delta\bar{\xi}_c$ ), так и на разных частотах (благодаря динамическим тензорам  $\delta\bar{\epsilon}_c$  и  $\delta\bar{\xi}_c$ ) (см. уравнения (3.2.17)–(3.2.19) при  $\alpha = n$ ):

$$c_{mn}^{(\nu,\nu)} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int_{S_b} \left( \hat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\bar{\epsilon}_c \cdot \hat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)} \right) dS - \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int_{L_b} \left( \hat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \Delta\bar{\xi}_c \cdot \hat{\mathbf{E}}_n^{(\nu)} \right) dL, \quad (32)$$

$$c_{mn}^{(\nu,\nu-1)} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int_{S_b} \left( \hat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\bar{\epsilon}_c \cdot \hat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)} \right) dS - \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int_{L_b} \left( \hat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\bar{\xi}_c \cdot \hat{\mathbf{E}}_n^{(\nu-1)} \right) dL, \quad (33)$$

$$c_{mn}^{(\nu,\nu+1)} = -\frac{i\omega_\nu}{N_m^{(\nu)}} \int_{S_b} \left( \hat{\mathbf{E}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\bar{\epsilon}_c^* \cdot \hat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)} \right) dS - \frac{1}{N_m^{(\nu)}} \int_{L_b} \left( \hat{\mathbf{H}}_m^{(\nu)*} \cdot \delta\bar{\xi}_c^* \cdot \hat{\mathbf{E}}_n^{(\nu+1)} \right) dL. \quad (34)$$

Система связанных уравнений (31) существенно усложняется при учете излучательных мод непрерывного спектра и тем более в случае волноведущих структур с потерями (см. уравнения (3.2.9)–(3.2.10) и (3.2.16)–(3.2.23)).

Принципиальной особенностью разработанной теории является тот факт (не замеченный ранее другими авторами), что связь между модами обеспечивают *отнюдь не* тензоры диэлектрического возмущения (статический  $\Delta\bar{\epsilon}$  и динамический  $\delta\bar{\epsilon}$ ), а вновь введенные тензоры *объемной связи* ( $\Delta\bar{\epsilon}_c$ ,  $\delta\bar{\epsilon}_c$ ) и *поверхностной связи* ( $\Delta\bar{\xi}_c$ ,  $\delta\bar{\xi}_c$  — они прежде вообще были потерями). Для конкретной волноведущей структуры тензоры возмущения,  $\Delta\bar{\epsilon}$  и  $\delta\bar{\epsilon}$ , появляются при выделении базового волновода, а тензоры связи рассчитываются по формулам (27)–(30). Тогда коэффициенты связи типа (32)–(34), построенные на тензорах связи, позволяют исследовать взаимодействие между модами, используя основные положения общей теории связанных мод (изложенной в приложении Г) или ее модификации, приведенной в приложении Д.

Именно такая схема будет демонстрироваться в гл. 3 и 4 в применении к следующим случаям взаимодействия между оптическими модами:

- акустооптическая связь мод,
- электрооптическая связь мод,
- магнитооптическая связь мод,
- связь мод в гофрированном волноводе,
- связь двух и большего числа оптических волноводов.

Все изложенное в данном введении получит обоснованное подтверждение в последующих главах.

В заключение укажем основные математические обозначения, использованные как во введении, так и в остальной части книги:

а) тензоры ранга 0 (скаляры), 1 (векторы), 2 и выше второго обозначены, соответственно, как  $A$ ,  $\mathbf{A}$  (полужирная буква),  $\overline{\mathbf{A}}$  (полужирная буква с одной чертой) и  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  (полужирная буква с двумя чертами);

б) их произведения обозначены как  $AB$  (для двух скаляров);  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  (для скалярного, векторного и диадного произведения двух векторов);  $\mathbf{A}\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{D}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ ,  $\overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}} = A_{ij}B_{jk}$  и  $\overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{B}}} = A_{ijk}B_{klm}$  (для скалярного произведения двух векторных диад и тензоров);  $\mathbf{A}\mathbf{B} : \mathbf{C}\mathbf{D} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ ,  $\overline{\mathbf{A}} : \overline{\mathbf{B}} = A_{ij}B_{ji}$  и  $\overline{\overline{\mathbf{A}}} : \overline{\overline{\mathbf{B}}} = A_{ijk}B_{kjl}$  (для двойного скалярного произведения двух векторных диад и тензоров); здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

## Глава 1

### НАПРАВЛЯЕМЫЕ И ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫЕ МОДЫ ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР

Настоящая глава имеет дело с дисперсионными и нормировочными характеристиками открытых волноведущих структур. Выбор их в качестве объекта изучения диктуется тем обстоятельством, что для них спектр собственных мод имеет более общий состав по сравнению с экранированными (закрытыми) волноводами. Как известно, для любого закрытого волновода спектр мод всегда является дискретным, в то время как в спектре открытого волновода, наряду с дискретными модами, также присутствуют излучательные моды непрерывной части спектра. Именно это и делает открытые волноведущие структуры более привлекательным объектом для дальнейшего электродинамического изучения.

Для того чтобы продемонстрировать впоследствии строгий электродинамический подход к анализу взаимодействия как направляемых мод дискретного спектра, так и излучательных мод непрерывного спектра, в качестве *базового волновода* выбрана планарная трехслойная диэлектрическая структура. В этом случае можно строго вывести дисперсионные уравнения для мод ТЕ- и ТМ-типов и последовательно выполнить анализ структуры полей для направляемых и излучательных мод. Результаты такого анализа использованы при вычислении нормы этих мод, а в дальнейшем (см. гл. 3 и 4) и при нахождении коэффициентов связи между ними.

Современная литература, посвященная общим проблемам распространения электромагнитных волн и специальным вопросам, связанным со спецификой открытых волноводов, достаточно обширна (см., например, книги [1–24] и цитируемую в них литературу). Несмотря на широкий охват волноводных проблем в опубликованной литературе, ниже будем рассматривать основные спектральные, модальные и энергетические свойства открытых волноведущих структур. Для такого рассмотрения имеются по крайней мере три причины, сформулированные в виде следующих задач:

- строгое спектральное обоснование непрерывной части спектра, присущей *излучательным модам*;
- установление связи между реактивными (нераспространяющимися) излучательными модами и так называемыми *вытекающими модами* на основе строгого спектрального подхода;

- демонстрация техники вычисления нормы для дискретных и излучательных мод планарной трехслойной диэлектрической структуры как базового волновода, используемого при анализе возбуждения и связи мод.

Прежде чем анализировать открытые волноведущие структуры, сначала необходимо рассмотреть общие волноводные свойства закрытого (экранированного) волновода произвольного сечения. Целью является выяснение характера трансформации спектра мод при переходе к открытой структуре путем удаления на бесконечность внешней экранирующей границы. Это и составляет содержание п. 1.1, где выясняются общие условия существования и взаимной трансформации *объемных, поверхностных и комплексных* мод закрытого волновода.

Последующие параграфы данной главы посвящены рассмотрению дисперсионных и энергетических особенностей открытых волноводов, в том числе планарной трехслойной диэлектрической структуры. Параграфы 1.2–1.4 содержат анализ дискретного и непрерывного спектров произвольного открытого волновода с использованием результатов п. 1.1 и общего спектрального подхода, изложенного в приложении А.

Параграф 1.5 посвящен разработке концепции вытекающих мод с целью установления связи между ними и нераспространяющимися (исчезающими) модами непрерывного спектра. В п. 1.6 излагается общепринятая лучевая интерпретация мод планарной диэлектрической структуры и обосновывается их классификация на *направляемые моды, излучательные моды подложки и излучательные моды структуры* с целью выяснения корреляции их с объемными, поверхностными и комплексными модами закрытого волновода.

Последние параграфы 1.7–1.9 содержат детальный анализ структуры полей в планарном трехслойном диэлектрическом волноводе для направляемых и излучательных мод ТЕ- и ТМ-типов. Полученные здесь результаты в большинстве своем коррелируют с результатами, приведенными (без вывода) Когельником [22], но отчасти и подправляют их.

### **1.1. Общие свойства собственных мод закрытого волновода без потерь**

Специфической особенностью любого закрытого волновода, независимо от формы поперечного сечения и заполняющей его волноведущей среды (в том числе многослойной и бианизотропной), является *дискретный характер* спектра собственных мод. Такая особенность порождена наличием внешней металлической границы, экранирующей внутренность волновода от бесконечно удаленных точек, что исключает необходимость в граничных условиях на бесконечности. Остаются лишь ЭГУ на внешней экранирующей поверхности и границах раздела внутренних сред. Число требуемых граничных условий всегда точно равняется числу искомым констант, характеризующих поперечное распределение полей. Такая ситуация приводит к требованию обращения в нуль детерминанта алгебраических уравнений относительно этих искомым констант. Именно это и дает дисперсионное уравнение (с трансцендентными функциями), корни которого образуют дискретную счетную последовательность в общем случае комплексных чисел. Они соответствуют поперечным

волновым числам (а значит и продольным постоянным распространения  $\gamma_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ) закрытого волновода. При этом в отсутствие потерь чисто мнимые значения  $\gamma_m = i\beta_m$  соответствуют *активным* (распространяющимся) *модам*, а комплексные значения  $\gamma_m = \alpha_m + i\beta_m$  — *реактивным* (нераспространяющимся) *модам* (уточнение терминологии см. в п. 2.4).

Для определенности рассмотрим многослойную среду с произвольными физическими и геометрическими свойствами, которая окружена идеально проводящей поверхностью, как показано на рис. 1.1. Единственным требованием является обязательное наличие однородной изотропной среды с относительными проницаемостями  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  и  $\mu_r = \mu/\mu_0$ , расположенной между внутренней волноведущей средой и внешним металлическим экраном. Такой изотропной среде соответствует характеристическое уравнение,

$$k^2 \equiv \omega^2 \epsilon \mu = k_t^2 + k_z^2, \quad (1.1.1)$$

где  $k_z$  и  $k_t = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$  — продольное и поперечное волновые числа.

Формула (1.1.1) является следствием подстановки волнового множителя  $\exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$  в обычное волновое уравнение, превращающей его в поперечное уравнение Гельмгольца,

$$\nabla_t^2 \hat{f}(\mathbf{r}_t) + k_t^2 \hat{f}(\mathbf{r}_t) = 0. \quad (1.1.2)$$

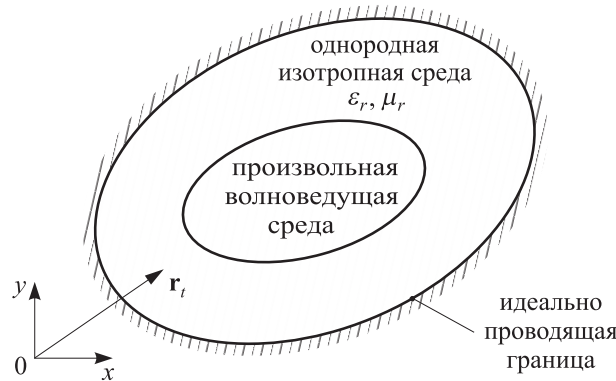


Рис. 1.1. Поперечное сечение закрытого волновода, состоящего из волноведущей среды с произвольными физическими и геометрическими свойствами и внешней однородной среды с изотропными проницаемостями  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$ , ограниченной идеально проводящей поверхностью

Поперечный оператор Лапласа  $\nabla_t^2$  действует на радиус-вектор  $\mathbf{r}_t$  точки, принадлежащей поперечному сечению изотропной среды, ограниченной идеально проводящей внешней границей (рис. 1.1). Функция поперечных координат  $\hat{f}(\mathbf{r}_t)$  (иначе называемая *мембранной функцией* и отмеченная колпачком) соответствует любой компоненте электромагнитного поля и определяет его полную волновую зависимость в виде (ср. уравнение (1))

$$f(\mathbf{r}_t, z, t) = \hat{f}(\mathbf{r}_t) e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (1.1.3)$$

Как следует из (1.1.2), структура электромагнитного поля в изотропной среде определяется поперечным волновым числом  $k_t$ :

- если  $k_t^2$  вещественно и положительно, то структура поля соответствует *объемным модам*,
- если  $k_t^2$  вещественно и отрицательно, то структура поля соответствует *поверхностным модам*,
- если  $k_t^2$  комплекснозначно, то структура поля соответствует *комплексным модам*.

Для обоснования этих утверждений упростим ситуацию, принимая рассматриваемую структуру планарной, когда  $\partial/\partial x = -ik_x = 0$  и  $k_t = k_y$ . Согласно (1.1.1),  $m$ -я мода на частоте  $\omega$  имеет продольное волновое число

$$k_{z,m}(\omega) = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_{y,m}^2(\omega)}. \quad (1.1.4)$$

Частотная зависимость  $k_{y,m}(\omega)$  для внешней изотропной среды определяется дисперсионными свойствами рассматриваемого волновода, которые формируются всеми средами, входящими в его состав. Уравнение Гельмгольца (1.1.2) для  $m$ -й моды планарной структуры принимает вид

$$\frac{d^2 \hat{f}_m(y)}{dy^2} + k_{y,m}^2(\omega) \hat{f}_m(y) = 0, \quad (1.1.5)$$

и его решение определяет мембранную функцию моды в форме

$$\hat{f}_m(y) = A_m e^{-ik_{y,m}y} + B_m e^{ik_{y,m}y}. \quad (1.1.6)$$

**1.1.1. Объемные моды.** Объемные моды, для которых всегда  $k_{y,m}^2(\omega) > 0$ , имеют чисто вещественные значения  $k_{y,m}$ , так что выражения (1.1.3) и (1.1.6) дают при  $z = \text{const}$  поперечное распределение полей в форме двух волн, бегущих в противоположных направлениях вдоль оси  $y$ :

$$f_m(y, z, t) = \left[ A_m e^{i(\omega t - k_{y,m}y)} + B_m e^{i(\omega t + k_{y,m}y)} \right] e^{-ik_{z,m}z}. \quad (1.1.7)$$

Выражение (1.1.7) описывает так называемый «поперечный резонанс» в объеме изотропной среды как результат интерференции прямой и обратной волн, бегущих вдоль  $y$  и отражающихся от двух границ — идеально проводящей границы и внешней границы внутренней волноведущей среды.

Картина поперечного распределения поля  $\hat{f}_m(y)$  для  $m$ -й объемной моды выше планарной волноведущей среды при  $d < y < D$ , описываемая уравнением (1.1.6), качественно показана на рис. 1.2 *a* в форме стоячей волны, типичной для поперечного резонанса.

1. На частотах, для которых  $\omega^2 \epsilon \mu > k_{y,m}^2(\omega)$ , формула (1.1.4) дает чисто вещественные значения фазовой постоянной

$$k_{z,m}(\omega) = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_{y,m}^2(\omega)} \equiv \beta_m(\omega). \quad (1.1.8)$$

В этом случае выражение (1.1.7) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f_m(y, z, t) &\equiv \widehat{f}_m(y) e^{i(\omega t - \beta_m z)} = \\ &= \left[ A_m e^{-ik_{y,m}y} + B_m e^{ik_{y,m}y} \right] e^{i(\omega t - \beta_m z)}. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Волновой множитель  $\exp[i(\omega t - \beta_m z)]$  в (1.1.9) соответствует *объемной моде*, распространяющейся с фазовой скоростью

$$v_{\text{ph},m}(\omega) \equiv \frac{\omega}{\beta_m(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - [k_{y,m}(\omega) c/\omega]^2}}. \quad (1.1.10)$$

Из (1.1.10) следует, что объемные моды всегда *быстрые* в том смысле, что  $v_{\text{ph},m} > c$ , где  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$  — скорость света в среде.

Групповая скорость  $m$ -й объемной моды равняется

$$v_{\text{gr},m}(\omega) \equiv \left( \frac{\partial \beta_m(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} = c \frac{\beta_m(\omega)}{\omega/c - k_{y,m}(\omega) c [\partial k_{y,m}(\omega)/\partial \omega]}. \quad (1.1.11)$$

Условие  $v_{\text{gr},m} \leq c$  накладывает следующее требование на частотную зависимость поперечного волнового числа во внешней изотропной среде:

$$\frac{\partial k_{y,m}(\omega)}{\partial \omega} \leq \frac{1}{c} \frac{\omega/c - \beta_m(\omega)}{k_{y,m}(\omega)}. \quad (1.1.12)$$

2. На частотах, для которых  $\omega^2 \epsilon \mu < k_{y,m}^2(\omega)$ , формула (1.1.4) дает чисто мнимые значения  $k_{z,m}(\omega)$ , равные

$$k_{z,m}(\omega) = -i \sqrt{k_{y,m}^2(\omega) - \omega^2 \epsilon \mu} \equiv -i \alpha_m(\omega), \quad (1.1.13)$$

т. е. фазовая постоянная  $\beta_m$  превращается в амплитудную постоянную  $\alpha_m$ . Знак минус в (1.1.13) выбран для того, чтобы обеспечить затухание амплитуды в направлении прежнего распространения фазы:  $\alpha_m > 0$  при  $\beta_m > 0$  в выражении (1.1.8). В этом случае формула (1.1.7) принимает вид

$$f_m(y, z, t) = \left[ A_m e^{i(\omega t - k_{y,m}y)} + B_m e^{i(\omega t + k_{y,m}y)} \right] e^{-\alpha_m z}. \quad (1.1.14)$$

Выражение (1.1.14) с чисто вещественными  $\alpha_m$  описывает так называемые *исчезающие моды* (англ. *evanescent modes*). Из сравнения (1.1.14) с (1.1.7) следует, что любая объемная мода, превращаясь в исчезающую, утрачивает распространение по фазе и начинает затухать в продольном направлении как  $\exp(-\alpha_m z)$ , но сохраняет поперечное распределение полей в форме стоячей волны, показанной на рис. 1.2 а. Другими словами, исчезающие моды являются реактивными *модами отсечки* (англ. *cutoff modes*), частотная область существования которых соответствует полосе непропускания волновода, в отличие от полосы пропускания, где существуют активные (распространяющиеся) моды с вещественными фазовыми постоянными  $\beta_m$ .

Переход между полосами пропускания и непропускания (когда распространяющаяся объемная мода с номером  $m$  превращается в нераспространяющуюся исчезающую моду или наоборот) происходит на *частоте отсечки*  $\omega_m^c$





и исчезающие) открытого волновода, когда отражающая металлическая граница удаляется на бесконечность, т. е. при  $D \rightarrow \infty$ .

**1.1.2. Поверхностные моды.** Поверхностные моды, для которых всегда  $k_{y,m}^2(\omega) = -|k_{y,m}(\omega)|^2 < 0$ , имеют мнимые значения  $k_{y,m}(\omega) = -i|k_{y,m}(\omega)|$ , так что их продольные волновые числа (1.1.4) являются всегда вещественными и равными

$$k_{z,m}(\omega) = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu + |k_{y,m}(\omega)|^2} \equiv \beta_m(\omega). \quad (1.1.18)$$

Формула (1.1.18) дает следующие выражения для фазовой и групповой скорости  $m$ -й *поверхностной моды* (ср. формулы (1.1.10) и (1.1.11)):

$$v_{\text{ph},m}(\omega) \equiv \frac{\omega}{\beta_m(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 + [|k_{y,m}(\omega)|c/\omega]^2}}, \quad (1.1.19)$$

$$v_{\text{gr},m}(\omega) \equiv \left( \frac{\partial \beta_m(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} = c \frac{\beta_m(\omega)}{\omega/c + |k_{y,m}(\omega)|c [\partial |k_{y,m}(\omega)|/\partial \omega]}. \quad (1.1.20)$$

Уравнение (1.1.19) показывает, что поверхностные моды всегда *медленные* в том смысле, что  $v_{\text{ph},m} < c = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$ , в отличие от быстрых объемных мод, распространяющихся с фазовой скоростью  $v_{\text{ph},m} > c$ .

Условие  $v_{\text{gr},m} \leq c$ , наложенное на величину (1.1.20), приводит к следующему требованию для частотной зависимости поперечного волнового числа во внешней изотропной среде (ср. уравнение (1.1.12)):

$$\frac{\partial |k_{y,m}(\omega)|}{\partial \omega} \geq \frac{1}{c} \frac{\beta_m(\omega) - \omega/c}{|k_{y,m}(\omega)|} > 0. \quad (1.1.21)$$

В случае поверхностных мод формулы (1.1.3) и (1.1.6) дают следующее выражение для любой компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} f_m(y, z, t) &\equiv \hat{f}_m(y) e^{i(\omega t - \beta_m z)} = \\ &= \left[ A_m e^{-|k_{y,m}|y} + B_m e^{|k_{y,m}|y} \right] e^{i(\omega t - \beta_m z)}. \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Выражение (1.1.22) описывает экспоненциальное распределение по оси  $y$  полей во внешней изотропной среде, присущее  $m$ -й поверхностной моде, распространяющейся вдоль границы раздела между этой средой и внутренней волноведущей средой с произвольными физическими и геометрическими свойствами. Качественная картина поля  $\hat{f}_m(y)$  для поверхностной моды при  $d < y < D$  показана на рис. 1.2 б сплошной кривой, которая учитывает только первое слагаемое в (1.1.22), т. е. при  $B_m = 0$ . Это верно, когда расстояние  $(D - d)$  между идеально проводящей поверхностью при  $y = D$  и границей раздела сред при  $y = d$ , достаточно большое для того, чтобы обеспечить неравенство  $|k_{y,m}|(D - d) \gg 1$ . Если это выполняется, то первое слагаемое в формуле (1.1.22), будучи равным  $A_m \exp(-|k_{y,m}|d)$  при  $y = d$ , экспоненциально уменьшается при удалении от границы раздела и практически исчезает при  $y = D$ . В противном случае оба слагаемые в (1.1.22) с амплитудами  $A_m \neq 0$  и  $B_m \neq 0$  дают более сложную картину поперечного распределения.

Локализация полей в районе границы волноведущей среды, как показано сплошной кривой на рис. 1.2 б, и дает название *поверхностным модам*.

Поскольку подкоренное выражение в (1.1.18) всегда положительно, то распространяющаяся поверхностная мода никогда (в пределах частотного диапазона своего существования) не превращается в нераспространяющуюся (исчезающую) моду, как это было для объемных мод, имеющих частоту отсечки  $\omega_m^c$ , определяемую равенствами (1.1.15). Эта особенность является фундаментальным свойством, характерным для мод поверхностного типа.

Тем не менее, каждая поверхностная мода имеет свою *критическую частоту*  $\omega_m^{cr}$  (верхний индекс *cr* от англ. *critical*), на которой она превращается в объемную моду. Это имеет место при условии  $k_{y,m}(\omega_m^{cr}) = 0$ , которое разделяет режимы объемных мод (характеризуемых кривой на рис. 1.2 а) и поверхностных мод (характеризуемых сплошной кривой на рис. 1.2 б). Из формулы (1.1.22) следует, что при  $k_{y,m}(\omega_m^{cr}) = 0$  поле  $\hat{f}_m(y)$  во внешней изотропной среде ( $d < y < D$ ) постоянно в поперечном направлении, как показано штриховой линией на рис. 1.2 б.

Следовательно, переход между режимами поверхностных и объемных мод соответствует частоте  $\omega_m^{cr}$ , на которой, согласно равенству (1.1.18), имеет место следующее условие, наложенное на поперечное и продольное волновые числа (ср. уравнение (1.1.15)):

$$k_{y,m}(\omega_m^{cr}) = 0 \quad \text{и} \quad \beta_m(\omega_m^{cr}) = \omega_m^{cr}/c. \quad (1.1.23)$$

Выражения (1.1.19) и (1.1.20) для фазовой и групповой скоростей показывают, что на критической частоте всегда (ср. уравнение (1.1.16))

$$v_{ph,m}^{cr} \equiv v_{ph,m}(\omega_m^{cr}) = c \quad \text{и} \quad v_{gr,m}^{cr} \equiv v_{gr,m}(\omega_m^{cr}) = c, \quad (1.1.24)$$

т. е. обе скорости волны равняются скорости света во внешней диэлектрической среде с изотропными свойствами.

Из равенств (1.1.23) следует, что на частоте  $\omega_m^{cr}$  поля  $m$ -й моды, будучи неизменными вдоль оси  $y$  ( $\partial/\partial y = -ik_{y,m} = 0$ ), распространяются в направлении  $z$  как плоские волны с законом дисперсии  $\beta_m = \omega_m^{cr}/c$ . Именно это обеспечивает фазовую и групповую продольные скорости, равными скорости света в окружающей диэлектрической среде, что вытекает из (1.1.24).

Такая физическая ситуация отличается направлением распространения плоской волны от той, что имела место на частоте отсечки  $\omega_m^c$ , даваемой формулой (1.1.15). В том случае объемная распространяющаяся и нераспространяющаяся (исчезающая) моды превращались друг в друга. При этом электромагнитное поле, будучи неизменным вдоль  $z$  ( $\partial/\partial z = -i\beta_m = 0$ ), распространялось в направлении  $y$ , что обеспечивало поперечный резонанс с фазовой и групповой скоростями в продольном направлении, даваемыми формулой (1.1.16).

На основании вышесказанного утверждения о превращении объемных мод в излучательные моды, когда  $D \rightarrow \infty$  на рис. 1.2, можно предвидеть, что при переходе к открытой структуре критическая частота  $\omega_m^{cr}$ , определяемая формулами (1.1.23), соответствует исчезновению дискретной поверхностной моды и появлению непрерывного спектра излучательных мод.

**1.1.3. Комплексные моды.** Комплексные моды в недиссипативных волноводах со сложными средами возникают, когда  $k_y^2(\omega)$  становится комплекснозначным, в результате чего как поперечное, так и продольное волновые числа принимают комплексные значения:

$$k_y = \text{Re } k_y + i \text{Im } k_y \quad \text{и} \quad k_z = \text{Re } k_z + i \text{Im } k_z. \quad (1.1.25)$$

Комплексность числа  $k_y$  обеспечивает поперечное распределение полей в  $m$ -й моде, описываемое мембранной функцией (1.1.6) поверхностного типа. Это означает, что поля моды локализованы около границы раздела сред, затухая по амплитуде при удалении от границы  $y = d$  как  $\exp(-\text{Im } k_{y,m} y)$ , что иллюстрирует рис. 1.2 в. В этом отношении комплексные моды сходны с поверхностными модами (для которых мембранная функция  $\tilde{f}_m(y)$  изображена сплошной кривой на рис. 1.2 б), но отличаются от них наличием поперечного распространения фазы в форме  $\exp[i(\omega t - \text{Re } k_{y,m} y)]$ .

Волновые числа (1.1.25) не являются независимыми друг от друга, так как связаны характеристическим уравнением (1.1.1). Их подстановка в это уравнение дает следующие соотношения, позволяющие выразить  $\text{Re } k_y$  и  $\text{Im } k_y$  через  $\text{Re } k_z$  и  $\text{Im } k_z$ :

$$(\text{Re } k_y)^2 - (\text{Im } k_y)^2 = K^2, \quad (1.1.26)$$

$$\text{Re } k_y \text{Im } k_y = \alpha \beta. \quad (1.1.27)$$

Здесь введены амплитудная и фазовая постоянные,  $\alpha = -\text{Im } k_z$  и  $\beta = \text{Re } k_z$ , образующие постоянную продольного распространения,

$$\gamma \equiv \alpha + i\beta = -\text{Im } k_z + i\text{Re } k_z \equiv ik_z, \quad (1.1.28)$$

а также введено обозначение

$$K^2 = k^2 + \alpha^2 - \beta^2. \quad (1.1.29)$$

Уравнения (1.1.26) и (1.1.27) описывают гиперболы, чьи графики качественно изображены на рис. 1.3 для двух случаев:

а)  $K^2 > 0$  или  $\beta^2 < k^2 + \alpha^2$ , что дает

$$\left(\frac{v_{\text{ph}}}{c}\right)^2 > \frac{1}{1 + (\alpha/k)^2}, \quad (1.1.30)$$

б)  $K^2 < 0$  или  $\beta^2 > k^2 + \alpha^2$ , что дает

$$\left(\frac{v_{\text{ph}}}{c}\right)^2 < \frac{1}{1 + (\alpha/k)^2}. \quad (1.1.31)$$

В каждом из этих случаев графическое решение системы уравнений (1.1.26) и (1.1.27) находится как четыре точки пересечения шести гипербол, показанных на рис. 1.3 а и б, которые обозначены цифрами 1,  $\tilde{1}$ , 2,  $\tilde{2}$ . В соответствии с неравенствами (1.1.30) и (1.1.31), все четыре точки на рис. 1.3 б соответствуют *медленным* модам с фазовой скоростью  $v_{\text{ph}} < c$ , в то время как комплексные моды на рис. 1.3 а могут быть как *медленными* ( $v_{\text{ph}} < c$ ), так и *быстрыми* ( $v_{\text{ph}} > c$ ). Более того, предельный случай  $\alpha \rightarrow 0$  приводит к парному слиянию точек, в результате чего приходим к следующей ситуации:

а) рис. 1.3 а дает два решения в точках  $K$  и  $-K$ , имеющие

$$k_y \equiv \operatorname{Re} k_y = \pm K(\alpha = 0) = \pm \sqrt{k^2 - \beta^2}, \quad (1.1.32)$$

которые соответствуют *быстрым объемным модам*, поскольку  $\beta^2 < k^2$  (см. п. 1.1.1);

б) рис. 1.3 б дает два решения в точках  $|K|$  и  $-|K|$ , имеющие

$$k_y \equiv i\operatorname{Im} k_y = \pm i|K(\alpha = 0)| = \pm i\sqrt{\beta^2 - k^2}, \quad (1.1.33)$$

которые соответствуют *медленным поверхностным модам*, так как  $\beta^2 > k^2$  (см. п. 1.1.2).

Следовательно, комплексные моды имеют более общую структуру полей, которая приводит к объемным и поверхностным модам в предельных случаях (1.1.32) и (1.1.33).

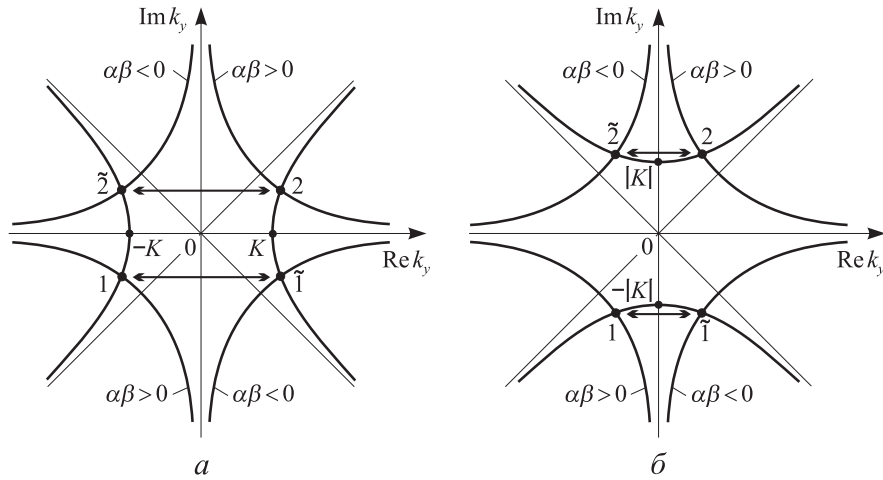


Рис. 1.3. Графическое нахождение поперечного волнового числа  $k_y = \operatorname{Re} k_y + i\operatorname{Im} k_y$  для двух пар,  $1-\tilde{1}$  и  $2-\tilde{2}$ , двойниковых мод, соединенных друг с другом горизонтальной стрелкой: а — при  $K^2 > 0$ , б — при  $K^2 < 0$

Четыре корня уравнений (1.1.26) и (1.1.27) объединяются в пары,  $1-\tilde{1}$  и  $2-\tilde{2}$ , которые выделены на рис. 1.3 а и б двойными горизонтальными стрелками. Каждая пара корней соответствует так называемым *двойниковым модам* (англ. *twin-conjugate modes*), которые обоснованно введены позже в п. 2.4. Там будет показано, что эти парные моды являются реактивными модами с номерами  $m$  и  $\tilde{m}$ , каждая из которых не имеет собственного потока мощности ( $P_m = P_{\tilde{m}} = 0$ ), но в паре друг с другом они переносят взаимную мощность  $P_{m\tilde{m}}^{pair}$ , определенную выражением (2.4.22). Для реализации этой ситуации необходимо обеспечить следующие соотношения между продольными постоянными распространения для двойниковой пары (см. уравнение (2.4.7)):

$$\gamma_{\tilde{m}} = -\gamma_m^* \quad \text{или} \quad k_{z,\tilde{m}} = k_{z,m}^*, \quad (1.1.34)$$

что означает

$$\begin{aligned}\alpha_{\tilde{m}} &\equiv -\operatorname{Im} k_{z,\tilde{m}} = \operatorname{Im} k_{z,m} \equiv -\alpha_m, \\ \beta_{\tilde{m}} &\equiv \operatorname{Re} k_{z,\tilde{m}} = \operatorname{Re} k_{z,m} \equiv \beta_m.\end{aligned}\tag{1.1.35}$$

Если точку 1 или 2 (для которых  $\alpha\beta > 0$ ) отождествить с модой  $m$ , тогда точка  $\tilde{1}$  или  $\tilde{2}$  (для которых  $\alpha\beta < 0$ ) соответствует ее двойнику  $\tilde{m}$ , для которого

$$\operatorname{Re} k_{y,\tilde{m}} = -\operatorname{Re} k_{y,m} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} k_{y,\tilde{m}} = \operatorname{Im} k_{y,m},\tag{1.1.36}$$

что означает

$$k_{y,\tilde{m}} = -k_{y,m}^*.\tag{1.1.37}$$

Для последующего рассмотрения *открытых* волноведущих структур (при  $D \rightarrow \infty$ ) следует отметить, что обе моды, образующие двойниковую пару, всегда имеют одинаковые значения  $\operatorname{Im} k_y$ , как видно из (1.1.36). Это гарантирует их принадлежность одному и тому же листу римановой поверхности для функции  $k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  (см. приложение А.2). Тогда точки 1 и  $\tilde{1}$  с  $\operatorname{Im} k_y < 0$ , расположенные на *физическом листе* римановой поверхности, являются *реактивными модами* поверхностного типа, в то время как точки 2 и  $\tilde{2}$  с  $\operatorname{Im} k_y > 0$  принадлежат *нефизическому листу* и интерпретируются как *вытекающие моды* (англ. *leaky modes*), поля которых нарастают в поперечном направлении при удалении на бесконечность (см. п. 1.5.2).

Таким образом, каждая пара *двойниковых мод* удовлетворяет условиям (1.1.34)–(1.1.37), наложенным на их продольные и поперечные волновые числа. Как видно из (1.1.35), такие двойники имеют одинаковую фазовую скорость ( $\beta_m = \beta_{\tilde{m}}$ ), но их амплитудные постоянные отличаются знаком ( $\alpha_m = -\alpha_{\tilde{m}}$ ). Последнее также свойственно исчезающим модам как частный случай, поскольку у них отсутствует распространение фазы ( $\beta_m = 0$ ).

Знак амплитудной постоянной  $\alpha_m$  может быть использован для классификации нераспространяющихся (реактивных) мод на *прямые* и *обратные* моды путем присвоения первым положительного индекса ( $+m > 0$ ), а вторым отрицательного ( $-m < 0$ ), где  $m$  означает модуль номера моды при наличии знаков  $\pm m$ . Такая классификация подобна той, что используется для распространяющихся мод, разделяемых на прямые и обратные по знаку групповой скорости  $v_{\text{gr},m} = [\partial\beta_m(\omega)/\partial\omega]^{-1}$ . Так как такая скорость у нераспространяющихся мод отсутствует, то ее роль выполняет амплитудная постоянная  $\alpha_m$ .

Таким образом, активные (распространяющиеся) и реактивные (нераспространяющиеся) моды классифицируются на два типа:

- **прямые моды** (отмеченные индексом  $+m > 0$ ) характеризуются либо положительной групповой скоростью ( $v_{\text{gr},+m} > 0$ ) для активных мод, либо положительной амплитудной постоянной ( $\alpha_{+m} > 0$ ) для реактивных мод;

- **обратные моды** (отмеченные индексом  $-m < 0$ ) характеризуются либо отрицательной групповой скоростью ( $v_{\text{gr},-m} < 0$ ) для активных мод, либо отрицательной амплитудной постоянной ( $\alpha_{-m} < 0$ ) для реактивных мод.

Спектральное обоснование вышеприведенной классификации будет выполнено в п. 1.3.

Рассмотрим поведение прямых и обратных мод при прохождении через область источников (область межмодовой связи), расположенную вдоль оси волновода между плоскостями  $z = -z_0$  и  $z = z_0$  (см. ниже рис. 1.4).

*Прямые моды* (активные и реактивные) с номером  $+m$  возбуждаются, начиная со входа при  $z = -z_0$ , где они имеют амплитуду  $A_{+m}(-z_0)$ , равную или не равную нулю. Пройдя через область источников, они выходят на противоположном конце при  $z = z_0$  с амплитудой  $A_{+m}(z_0) \neq 0$ . Справа от области источников (при  $z > z_0$ ) активные моды (объемные и поверхностные) распространяются без затухания с неизменной амплитудой ( $A_{+m}(z_0) = \text{const}$ ), а реактивные моды (комплексные и исчезающие) затухают в виде  $A_{+m}(z_0) \exp[-\alpha_{+m}(z - z_0)]$ .

*Обратные моды* (активные и реактивные) с номером  $-m$  возбуждаются, начиная со своего входа при  $z = z_0$ , где они имеют амплитуду  $A_{-m}(z_0)$ , равную или не равную нулю. Пройдя через область источников, они выходят на противоположном конце при  $z = -z_0$  с амплитудой  $A_{-m}(-z_0) \neq 0$ . Слева от области источников (при  $z < -z_0$ ) активные моды распространяются без затухания с постоянной амплитудой ( $A_{-m}(-z_0) = \text{const}$ ), в то время как реактивные моды затухают в виде  $A_{-m}(-z_0) \exp[|\alpha_{-m}|(z + z_0)]$ .

Внутри области источников (области межмодовой связи), расположенной при  $-z_0 < z < z_0$ , в общем случае существует полная система собственных мод (активных и реактивных) с амплитудами  $A_{\pm m}(z)$ , изменяющимися в продольном направлении в результате действия возбуждающих источников или связи между модами.

Входные амплитуды  $A_{+m}(0)$  для прямых мод (с индексом  $+m > 0$ ) и  $A_{-m}(L)$  для обратных мод (с индексом  $-m < 0$ ) играют роль краевых условий в задачах возбуждения или связи мод и задаются в следующей форме:

- на *левом* краю при  $z = -z_0$  для *прямой* моды (активной с  $v_{\text{gr},+m} > 0$  и реактивной с  $\alpha_{+m} > 0$ )

$$A_{+m}(-z_0) \neq 0 \quad \text{или} \quad A_{+m}(-z_0) = 0; \quad (1.1.38)$$

- на *правом* краю при  $z = z_0$  для *обратной* моды (активной с  $v_{\text{gr},-m} < 0$  и реактивной с  $\alpha_{-m} < 0$ )

$$A_{-m}(z_0) \neq 0 \quad \text{или} \quad A_{-m}(z_0) = 0. \quad (1.1.39)$$

Нулевые входные условия, приведенные в формулах (1.1.38) и (1.1.39), соответствуют той моде, которая не вводится в область взаимодействия, а возникает в результате возбуждения заданными источниками или благодаря связи с другими модами.

Возвращаясь к паре *двойниковых мод* с номерами  $t$  и  $\tilde{t}$ , можно объяснить, на основании вышесказанного, противоположные знаки их амплитудных постоянных  $\alpha_t$  и  $\alpha_{\tilde{t}}$  тем, что вне области возбуждения (связи мод) каждая из двойниковых мод существует по разные стороны этой области. Если, например,  $t$ -я мода — прямая (с номером  $t = +m$ ), а  $\tilde{t}$ -я мода — обратная (с номером  $\tilde{t} = -m$ ), то первая существует при  $z > z_0$ , а вторая при  $z < -z_0$ , и обе реактивно затухают при удалении от своих выходных концов  $z = z_0$  и  $z = -z_0$  в силу того, что  $\alpha_t = \alpha_{+m} > 0$  и  $\alpha_{\tilde{t}} = \alpha_{-m} < 0$ .

Внутри области возбуждения (связи мод) обе двойниковые моды существуют одновременно, обеспечивая, как будет показано в п. 2.4.2, ненулевую парную кросс-мощность  $P_{m\bar{m}}^{pair}$  в форме (2.4.22).

## 1.2. Определение направляемых и излучательных мод открытого волновода

Рассмотрим свойства собственных мод открытой волноведущей структуры, руководствуясь основными результатами, полученными в предыдущем параграфе для закрытых волноводов.

Отличительной особенностью любого открытого волновода (в том числе с многослойными средами) является неограниченность области существования электромагнитных полей в поперечном направлении. Если поля моды, бегущей вдоль оси  $z$ , локализованы в районе границы волноведущей среды (например, границы  $y = d$  на рис. 1.2) и экспоненциально затухают при удалении вовнутрь внешней изотропной среды (как изображено сплошной кривой на рис. 1.2 б), то эта картина соответствует модам *поверхностного типа*. Такая структура полей в принципе не отличается от той, которая характерна для поверхностных мод закрытого волновода, рассмотренных в п. 1.1.2. Действительно, поля этих мод практически не чувствуют металлической отражающей стенки, если она достаточно удалена от внешней границы волноведущей среды (в предельном случае  $D \rightarrow \infty$  на рис. 1.2, что обеспечивает переход к открытой структуре). В применении к *открытым диэлектрическим волноводам* такие поверхностные моды называются *направляемыми модами* дискретного спектра [11–19].

Как установлено выше, фундаментальное свойство, присущее распространяющимся модам поверхностного типа, состоит в невозможности их превращения в нераспространяющиеся (исчезающие) моды, в отличие от мод объемного типа, рассмотренных в п. 1.1.1. Однако  $m$ -я поверхностная мода может превратиться в объемную моду на частоте  $\omega_m^{cr}$ , определяемой соотношениями (1.1.23). На этой частоте структура поля соответствует плоской волне ( $\partial/\partial y = -ik_{y,m} = 0$ , как показано штриховой линией на рис. 1.2 б), которая распространяется вдоль оси  $z$  с одинаковыми фазовой и групповой скоростями, равными, согласно формуле (1.1.24), скорости света в окружающей изотропной среде.

Только что упомянутое свойство поверхностных мод в закрытых волноводах может быть обобщено на направляемые моды поверхностного типа в открытых волноводах, поскольку структура полей не меняется при удалении на бесконечность металлической отражающей границы. Следовательно, любая направляемая мода, например с номером  $m$ , всегда остается распространяющейся в пределах частотного диапазона своего существования. На границе этого диапазона, соответствующей критической частоте  $\omega_m^{cr}$ , мода должна превратиться в плоскую волну (с поперечным распределением полей в форме штриховой линии на рис. 1.2 б), распространяющуюся со скоростью света во внешней диэлектрической среде. Именно такая плоская электромагнитная волна порождает *излучательные моды* непрерывного спектра в открытых

волноводах. Они возникают как предельный случай объемных мод закрытого волновода, когда спектральное расстояние между соседними модами, т. е.  $\Delta k_y \sim 1/D$ , уменьшается с ростом  $D$ . Это уплотняет дискретный спектр мод, делая его непрерывным в пределе  $D \rightarrow \infty$ .

В общем случае дискретный спектр волноводов со сложными волноведущими средами может содержать, кроме поверхностных мод (распространяющихся вдоль  $z$ , но исчезающих в поперечном направлении), и комплексные моды (см. п. 1.1.3). Они также относятся к модам поверхностного типа, поскольку их поля затухают при удалении от границы раздела, но с фазовой задержкой в поперечном направлении, как показано на рис. 1.2 в. Поверхностный характер этих мод сохраняется и при удалении металлической стенки на бесконечность ( $D \rightarrow \infty$ ). В отличие от распространяющихся мод поверхностного типа, комплексные моды являются нераспространяющимися (точнее, реактивно распространяющимися, так как имеет место распространение по фазе в отсутствие групповой скорости).

В этом параграфе рассматривается общий случай открытых волноведущих структур со сложными материальными средами, поддерживающими существование как распространяющихся поверхностных мод, так и нераспространяющихся комплексных мод, которые собирательно будем называть *направляемыми модами*.

Собственное поле, принадлежащее любой направляемой моде, описывается функцией  $f_{guid}(x, y, z)$  (индекс *guid* от англ. *guided modes*), квадратично интегрируемой на бесконечном поперечном сечении открытого волновода ( $S \rightarrow \infty$ ). Это требование связано с поверхностным характером полей и гарантирует конечную величину энергии, запасаемой полями каждой дискретной моды. Свойство квадратичной интегрируемости записывается как

$$\int_{S \rightarrow \infty} |f_{guid}(x, y, z)|^2 dx dy \leq C < \infty, \quad (1.2.1)$$

где  $f_{guid}(x, y, z)$  — физическая величина, определяющая запасенную электромагнитную энергию. Требование (1.2.1) с неизбежностью дает следующее условие, обеспечивающее поверхностный характер полей:

$$|f_{guid}(y, z)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (1.2.2)$$

Оно записано для *планарной* открытой структуры с отсутствием зависимости от  $x$  и осью  $y$ , направленной по нормали к границам раздела многослойной среды. Соотношение (1.2.2) удовлетворяет общему *принципу излучения*, требующему исчезновения полей на (поперечной) бесконечности [4, 6, 27].

Дискретный спектр направляемых мод (поверхностных и комплексных), затухающих в поперечном направлении, не может быть полным для электромагнитного поля во всем безграничном пространстве, поскольку с помощью только этих мод невозможно учесть поля в точках, удаленных на достаточно большое (в пределе бесконечное) расстояние.

Именно эти удаленные поля и составляют *поле излучения*  $f_{rad}(y, z)$  (индекс *rad* от англ. *radiation*) открытой волноведущей структуры. Это поле



может быть представлено в форме интеграла Фурье по поперечным координатам ( $k_y$ -представление):

$$f_{rad}(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_F} \tilde{f}_y(k_y, z) e^{-ik_y y} dk_y \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y, z; k_y) dk_y, \quad (1.2.3)$$

где фурье-контур  $C_F$  проходит вдоль вещественной оси  $\text{Re } k_y$  от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Спектральное фурье-представление (1.2.3) устанавливает соответствие между *полем излучения*  $f_{rad}(y, z)$  и его *фурье-образом*  $\tilde{f}_y(k_y, z)$  по координате  $y$ . Последний, кроме нижнего индекса  $y$ , отмечен знаком тильды и рассматривается как функция непрерывно меняющейся переменной  $k_y$ . Бесконечный континуум значений поперечного волнового числа  $k_y$  вместе с соответствующими значениями  $\tilde{f}_y(k_y, z)$  и составляет *непрерывный спектр* поля излучения.

Отдельную спектральную составляющую, обозначенную в  $k_y$ -представлении (1.2.3) в виде (без знака тильды)

$$f_y(y, z; k_y) \equiv \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_y(k_y, z) e^{-ik_y y}, \quad (1.2.4)$$

принято называть *излучательной модой*.

Поскольку все значения  $k_y$  в спектральном преобразовании (1.2.3) чисто вещественные, то каждая излучательная мода  $f_y(y, z; k_y)$  имеет осциллирующую зависимость от  $y$  в виде функции  $\exp(-ik_y y)$ . Следовательно, вместо требования исчезновения полей на поперечной бесконечности, выражаемого формулой (1.2.2), для (1.2.4) работает более слабое ограничение, наложенное на излучательные моды в форме

$$|f_y(y, z; k_y)| \leq C < \infty \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty. \quad (1.2.5)$$

Формула (1.2.5) выражает конечность поля отдельной излучательной моды (1.2.4) в поперечном направлении. На первый взгляд, это может быть интерпретировано как нарушение принципа излучения. Однако полное поле излучения в виде интеграла (1.2.3) обязательно должно удовлетворять этому принципу, а именно

$$|f_{rad}(y, z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty. \quad (1.2.6)$$

Таким образом, условия (1.2.2) для дискретного спектра направляемых мод (поверхностных и комплексных) и (1.2.6) для непрерывного спектра излучательных мод дают общий *принцип излучения* для полного электромагнитного поля:

$$|f(y, z)| \equiv |f_{guid}(y, z) + f_{rad}(y, z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty. \quad (1.2.7)$$

Требование (1.2.7), наложенное на полное поле, позволяет отбирать физически реализуемые решения граничной задачи, как удовлетворяющие принципу излучения. Ниже продемонстрируем, как это делается на практике.

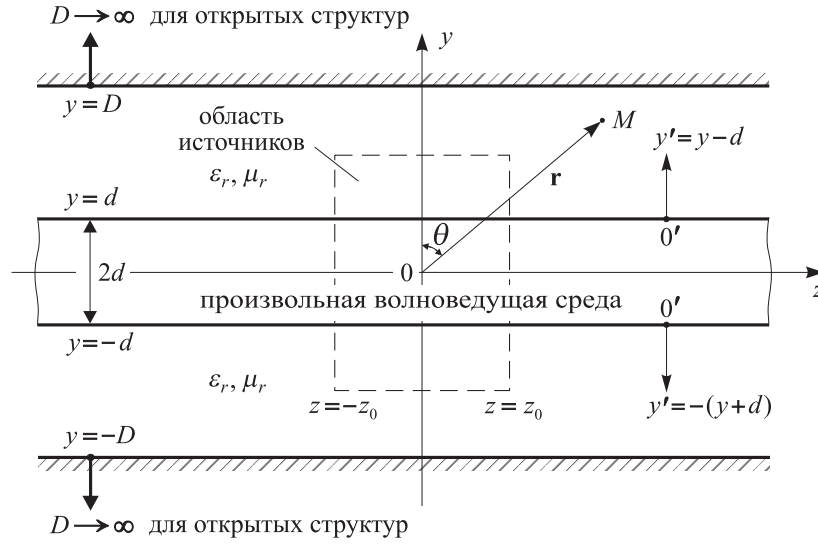


Рис. 1.4. Планарный волновод с идеально проводящей внешней границей и изотропной средой с проницаемостями  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$ : возбуждающие источники расположены в области  $-z_0 < z < z_0$ ,  $M$  — точка наблюдения. Координатные оси  $y'$  используются в приложении А.1

### 1.3. Спектральное представление полей в открытых волноведущих структурах

Рассмотрим открытую волноведущую структуру с возбуждающими источниками, локализованными вдоль оси  $z$  в области  $-z_0 < z < z_0$ , что качественно показано на рис. 1.4. Нас интересует поле вне области источников в точке  $M$  изотропной диэлектрической среды выше ( $y > d$ ) или ниже ( $y < -d$ ) крайних границ  $y = \pm d$  волноведущей среды (состоящей в общем случае из различных слоев, расположенных в пределах  $-d < y < d$ ).

Трансляционная инвариантность структуры, связанная с ее продольной однородностью *вне* области источников, делает более удобной запись искомого решения неоднородной задачи (с возбуждающими источниками) в форме преобразования Фурье по продольной координате ( $k_z$ -представление) (ср. уравнение (1.2.3)):

$$f(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_F} \tilde{f}_z(y, k_z) e^{-ik_z z} dk_z \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_z(y, z; k_z) dk_z, \quad (1.3.1)$$

где фурье-контур  $C_F$  проходит вдоль вещественной оси  $\text{Re } k_z$  от  $-\infty$  до  $\infty$  (см. рис. 1.5).

По аналогии с (1.2.4), *фурье-образ*  $\tilde{f}_z(y, k_z)$  по координате  $z$  отмечен нижним индексом и знаком тильды, в то время как *излучательная мода* в  $k_z$ -представлении определена в виде

$$f_z(y, z; k_z) \equiv \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_z(y, k_z) e^{-ik_z z}. \quad (1.3.2)$$

Как следует из приложения А.1, полное поле (1.3.1) *вне* области источников может быть записано в форме спектрального представления (А.1.26) для комплексной амплитуды  $f_\omega(y, z)$  на частоте  $\omega$ . Для определенности рассмотрим поле (опуская индекс  $\omega$ ) в точке  $M$  на рис. 1.4, где  $y > d$  и  $z > z_0$ , тогда нижнее выражение (А.1.26) дает

$$f(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_F} \frac{s(\omega, k_z) \exp(-ik_z z_0)}{\mathcal{D}(\omega, k_z)} e^{-ik_y y} e^{-ik_z(z-z_0)} dk_z. \quad (1.3.3)$$

Из сравнения выражений (1.3.1) и (1.3.3) видно, что в  $k_z$ -представлении фурье-образ  $\tilde{f}_z(y, k_z)$  и излучательная мода  $f_z(y, z; k_z)$ , определенные в форме (1.3.2), имеют следующий вид:

$$\tilde{f}_z(y, k_z) = \frac{s(\omega, k_z)}{\mathcal{D}(\omega, k_z)} e^{-ik_y y}, \quad (1.3.4)$$

$$f_z(y, z; k_z) = \frac{1}{2\pi} \frac{s(\omega, k_z)}{\mathcal{D}(\omega, k_z)} e^{-i(k_y y + k_z z)}. \quad (1.3.5)$$

В приложении А.1 показано, что функция  $\mathcal{D}(\omega, k_z)$ , стоящая в знаменателе выражений (1.3.3)–(1.3.5), является *дисперсионной функцией* однородной граничной задачи (без возбуждающих источников). Нули этой функции, будучи корнями дисперсионного уравнения,

$$\mathcal{D}(\omega, k_z) = 0, \quad (1.3.6)$$

образуют *дискретный спектр* направляемых мод — *активных* (распространяющиеся поверхностные моды) и *реактивных* (нераспространяющиеся комплексные моды) для общего случая волновода со сложными средами.

Поперечное волновое число  $k_y$ , входящее в выражения (1.3.3)–(1.3.5), характеризует внешнюю диэлектрическую среду с изотропными параметрами  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  и  $\mu = \mu_r \mu_0$  (рис. 1.4) и равняется величине

$$k_y(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - k_z^2}, \quad (1.3.7)$$

рассматриваемой как двузначная функция продольного волнового числа  $k_z$ .

Функция источника  $s(\omega, z)$ , заданная в виде (А.1.22), т. е. локализованная внутри области  $-z_0 < z < z_0$ , имеет такой фурье-образ  $s(\omega, k_z)$ , что стоящая в числителе подынтегрального выражения (1.3.3) функция  $s^-(\omega, k_z) \equiv s(\omega, k_z) \exp(-ik_z z_0)$  является аналитической в нижней полуплоскости  $k_z$ , где  $\text{Im } k_z < 0$  (обоснование этого см. в приложении А.1.2).

Обычно вычисление несобственного интеграла (1.3.3) основывается на технике контурного интегрирования с использованием теоремы Коши [25, 26]. Подынтегральное выражение  $f_z(y, z; k_z)$  преобразования Фурье (1.3.3) определено на вещественной оси  $\text{Re } k_z$  от  $-\infty$  до  $\infty$  (фурье-контур  $C_F$ ). Эта область определения может быть аналитически продолжена в нижнюю полуплоскость  $k_z$ , где экспоненциальная функция  $\exp[-ik_z(z - z_0)]$  затухает при  $|k_z| \rightarrow \infty$  для точек  $z > z_0$ , поскольку  $\text{Im } k_z < 0$ . Подобная ситуация для точек  $z < -z_0$  имеет место в верхней полуплоскости, где  $\text{Im } k_z > 0$  (см. уравнения (А.1.22)–(А.1.26)). Замыкание фурье-контур  $C_F$  контуром

Жордана  $C_J$  (в форме полуокружности бесконечно большого радиуса  $J \rightarrow \infty$ , на котором выполняются требования леммы Жордана) позволяет применить теорему о вычетах [25, 26], как описано в приложении А.1.2. Тогда результат контурного интегрирования при вычислении (1.3.3) содержит два вклада:

- от точки ветвления  $k_z = k$  двузначной функции  $k_y(k_z)$  в виде (1.3.7);
- от полюсов, соответствующих корням дисперсионного уравнения (1.3.6), лежащим в нижней полуплоскости  $k_z$ .

Комплексные значения  $k_z$ , полученные как результат аналитического продолжения функции  $f_z(y, z; k_z)$ , приводят по формуле (1.3.7) к комплексным значениям  $k_y$ . В этом случае требование исчезновения полного поля  $f(y, z)$  на поперечной бесконечности при  $|y| \rightarrow \infty$  (см. уравнение (1.2.7)) удовлетворяется, если

$$\operatorname{Im} k_y < 0. \quad (1.3.8)$$

Неравенство (1.3.8) одновременно справедливо для точек выше ( $y > d$ ) и ниже ( $y < -d$ ) волноведущей среды, так как общее выражение (А.1.26) содержит экспоненциальную функцию  $\exp[-ik_y(|y| - d)]$ , которая обеспечивает затухающий характер полей для обоих случаев. Следует подчеркнуть, что спектральное представление (1.2.3) поля излучения  $f_{rad}(y, z)$  имеет в качестве переменной интегрирования поперечное волновое число  $k_y$ , которое в отличие от (1.3.8) всегда вещественное.

Решения, удовлетворяющие требованию (1.3.8), принято называть *физическими решениями*, так как для них выполняется *принцип излучения* (1.2.7), в отличие от *нефизических решений*, для которых  $\operatorname{Im} k_y > 0$ . Именно условие (1.3.8) определяет правило проведения разрезов на комплексной плоскости  $k_z$  (как показано на рис. 1.5) для того, чтобы выбрать физическую ветвь двузначной функции (1.3.7). Математическое обоснование надлежащего выбора физического решения дано в приложении А.2.

С учетом малых потерь во внешней диэлектрической среде, когда ее волновые числа комплекснозначные (т. е.  $k = k' - ik''$ , см. уравнение (А.2.1)), разрезы имеют форму части гиперболы, описываемой формулой  $\operatorname{Im} k_y(k_z) = 0$ , и изображены сплошными кривыми на рис. А.2 а. В пределе нулевых потерь ( $k'' \rightarrow 0$ ) гиперболы превращаются в кусочно-ломанные линии, показанные на рис. А.2 б. Эти линии выходят из точек ветвления  $k_z = \pm k$  (лежащих теперь на вещественной оси  $\operatorname{Re} k_z$ ) и идут сначала горизонтально к началу координат  $k = 0$ , а затем вертикально вниз (для точки ветвления  $+k$ ) или вверх (для точки ветвления  $-k$ ).

В отличие от рис. А.2 б, разрезы на рис. 1.5 слегка смещены от осей  $\operatorname{Re} k_z$  и  $\operatorname{Im} k_z$ , чтобы показать их принадлежность к соответствующей полуплоскости  $k_z$ . Наше рассмотрение имеет дело с нижней полуплоскостью, которой соответствуют точки пространства  $z > z_0$ , расположенные справа от области источников (см. точку наблюдения  $M$  на рис. 1.4). Как видно из рис. 1.5, нижне-правый ( $C_1 = C'_1 + C''_1$ ) и верхне-левый ( $C_2 = C'_2 + C''_2$ ) берега разреза принадлежат, соответственно,  $\operatorname{Re} k_y < 0$  и  $\operatorname{Re} k_y > 0$ . Кроме того, имеется малая окружность  $C_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon \rightarrow 0$  с центром в точке ветвления  $k_z = k$ .

Для вычисления несобственного интеграла (1.3.3) в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$  вдоль вещественной оси  $\operatorname{Re} k_z$  надо замкнуть фурье-контур  $C_F$  составным

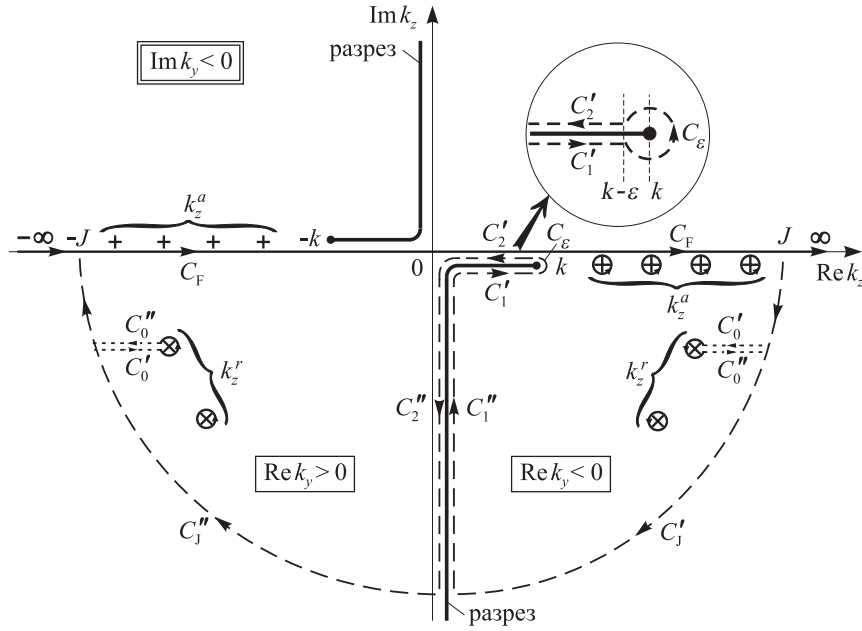


Рис. 1.5. Замыкание фурье-контура  $C_F$  на физическом листе римановой поверхности с  $\text{Im } k_y < 0$  составным контуром,  $C_\Sigma = C_J' + C_1'' + C_1' + C_\varepsilon + C_2' + C_2'' + C_J''$ , включающим ниже-правый,  $C_1 = C_1' + C_1''$ , и выше-левый,  $C_2 = C_2' + C_2''$ , берега разреза, контур Жордана,  $C_J = C_J' + C_J''$  (при  $J \rightarrow \infty$ ), и малую окружность  $C_\varepsilon$  (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Результирующий замкнутый контур  $C_F + C_\Sigma$  охватывает полюсы, соответствующие *активным модам* (с чисто вещественными значениями  $k_z^a$ ) и *реактивным модам* (с комплексными значениями  $k_z^r$ ), которые обозначены как  $\oplus$  и  $\otimes$  с положительным обходом (против часовой стрелки)

контуром,  $C_\Sigma = C_J' + C_1'' + C_1' + C_\varepsilon + C_2' + C_2'' + C_J''$ , показанным пунктиром на рис. 1.5, который включает:

- контур Жордана в виде полуокружности,  $C_J = C_J' + C_J''$ , бесконечно большого радиуса  $J \rightarrow \infty$ ,
- нижний и правый берега разреза,  $C_1 = C_1' + C_1''$ ,
- верхний и левый берега разреза,  $C_2 = C_2' + C_2''$ ,
- окружность  $C_\varepsilon$  бесконечно малого радиуса,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с центром в точке ветвления  $k_z = k$ .

На основании интегральной теоремы Коши [25, 26] можем записать

$$\begin{aligned} \int_{C_F} \dots dk_z + \int_{C_J} \dots dk_z + \oint_{C_\varepsilon} \dots dk_z + \\ + \int_{C_1} \dots dk_z + \int_{C_2} \dots dk_z + \sum_{\oplus \otimes} \oint_{C_k} \dots dk_z = 0. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Здесь сумма включает интегралы по малым окружностям  $C_k$ , охватывающим сингулярные точки  $k_z^a$  и  $k_z^r$  (обозначенные  $\oplus$  и  $\otimes$  на рис. 1.5), с положительным направлением обхода (против часовой стрелки). Интегрирование вдоль

каждой пары дополнительных отрезков  $C'_0$  и  $C''_0$  (показанных точками на рис. 1.5) дает нулевой вклад из-за противоположных направлений.

В соответствии с требованиями леммы Жордана [25], можно записать следующие равенства для подынтегрального выражения в формуле (1.3.3) (см. приложение А.1.2):

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \int_{C_J} f_z(y, z; k_z) dk_z = 0, \quad (1.3.10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\varepsilon} f_z(y, z; k_z) dk_z = 0, \quad (1.3.11)$$

где поле  $f_z(y, z; k_z)$  излучательной моды (1.3.2) имеет вид равенства (1.3.5). Следовательно, искомый интеграл в (1.3.9) вида  $\int_{C_F} \dots dk_z$  содержит:

- вклады от интегрирования вдоль берегов разреза  $C_1$  и  $C_2$ ,
- вклады от вычетов  $\text{Res } f_z(k_z^\circ)$  подынтегральной функции  $f_z(k_z)$  в сингулярных точках  $k_z = k_z^\circ$  (полюсах или существенно особых точках), лежащих в нижней полуплоскости  $\text{Im } k_z < 0$ , где функция источника,  $s^-(\omega, k_z) \equiv s(\omega, k_z) \exp(-ik_z z_0)$ , аналитична (см. приложение А.1.2).

Такие сингулярности возникают в точках, соответствующих корням дисперсионного уравнения (1.3.6), которые образуют дискретный спектр волноведущей структуры, включающий следующие направляемые моды:

а) *активные* (распространяющиеся) моды с чисто вещественными продольными волновыми числами  $k_z^a = \text{Re } k_z^a$ , обозначенными  $\oplus$  на рис. 1.5;

б) *реактивные* (нераспространяющиеся) моды с комплексными продольными волновыми числами  $k_z^r = \text{Re } k_z^r + i \text{Im } k_z^r$ , обозначенными  $\otimes$  на рис. 1.5.

Комплексные значения  $k_z^r$  для реактивных мод приводят к комплексным поперечным волновым числам  $k_y^r$ , получаемым из уравнений (1.1.26) и (1.1.27), графическое решение которых показано на рис. 1.3. Среди корней дисперсионного уравнения (1.3.6) необходимо выбрать такие, для которых  $\text{Im } k_y^r < 0$ . Они характеризуют *физически реализуемые поля* поверхностного типа во внешней диэлектрической среде. Соответствующие значения  $k_z^r$  располагаются на *физическом листе* римановой поверхности для функции (1.3.7) (см. приложение А.2). Такие точки на  $k_z$ -плоскости обычно называют *спектральными* (или *собственными*) [10, 24], в отличие от *неспектральных* (или *несобственных*) точек на *нефизическом листе* с  $\text{Im } k_y^r > 0$ . Последние соответствуют *физически нереализуемым полям* с бесконечно нарастающей амплитудой в поперечном направлении (когда  $|y| \rightarrow \infty$ ). Их принято интерпретировать как *вытекающие моды* [10, 13, 19, 24], не удовлетворяющие принципу излучения (1.2.2), но физически проявляющиеся в ближней зоне излучения. Они будут детально исследованы в п. 1.5.2.

Для каждой комплексной точки (спектральной или неспектральной) на рис. 1.3 имеется парная ей точка, удовлетворяющая условиям (1.1.34) и (1.1.37), наложенным на продольные и поперечные волновые числа. Как показано в п. 2.4.2, такая пара комплексных точек соответствует модам, названным *двойниковыми* (англ. *twin-conjugate modes*) [24]. Они неортогональны друг к другу в энергетическом смысле (обеспечивая ненулевую парную кросс-

мощность), но ортогональны ко всем другим модам, включая дискретные активные моды и излучательные моды непрерывного спектра. На рис. 1.3 такие парные точки соединены друг с другом горизонтальной двойной стрелкой: спектральные (собственные) точки  $1$  и  $\bar{1}$  с  $\text{Im } k_y^r < 0$  соответствуют *реактивным модам*, а неспектральные (несобственные) точки  $2$  и  $\bar{2}$  с  $\text{Im } k_y^r > 0$  — *вытекающим модам*.

Возвращаясь к (1.3.3), на основе вышесказанного можно записать следующие вклады в полное поле справа от области источников (при  $z > z_0$ ):

$$\begin{aligned} f(y, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_F} \frac{s^-(\omega, k_z)}{\mathcal{D}(\omega, k_z)} e^{-ik_y y} e^{-ik_z(z-z_0)} dk_z \equiv \int_{C_F} f_z(y, z, ; k_z) dk_z = \\ &= -2\pi i \sum_{k_z^a} \text{Res } f_z(y, z, ; k_z^a) - 2\pi i \sum_{k_z^r} \text{Res } f_z(y, z, ; k_z^r) - \\ &\quad - \int_{C_1} f_z(y, z, ; k_z) dk_z - \int_{C_2} f_z(y, z, ; k_z) dk_z. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Согласно теореме о вычетах [25, 26], суммы по  $k_z^a$  и  $k_z^r$  учитывают вклады от вычетов подынтегральной функции  $f_z(y, z, ; k_z)$ , вычисленные в полюсах, охваченных результирующим контуром  $C_F + C_\Sigma$ . Эти полюсы являются нулями дисперсионной функции  $\mathcal{D}(\omega, k_z)$ , которые соответствуют активным и реактивным дискретным модам, обозначенным  $\oplus$  и  $\otimes$  на рис. 1.5. Знак минус перед суммами в формуле (1.3.12) появляется как результат обхода контура в направлении, указанном стрелками на рис. 1.5.

Так как имеем  $k_z = k$  в точке ветвления и  $\text{Im } k_y = 0$  на линии разреза (см. приложение А.2), то интегрирование по  $k_z$  вдоль нижне-правого берега,  $C_1 = C_1' + C_1''$ , где  $\text{Re } k_y < 0$  (рис. 1.5), равняется интегралу на плоскости  $k_y$  вдоль вещественной оси  $\text{Re } k_y$  от  $-\infty$  до  $0$ . Аналогично, интегрирование по  $k_z$  вдоль верхне-левого берега,  $C_2 = C_2' + C_2''$ , где  $\text{Re } k_y > 0$ , дает интеграл на плоскости  $k_y$  вдоль вещественной оси  $\text{Re } k_y$  от  $0$  до  $\infty$ .

Следовательно, с учетом соотношения  $dk_z = -(k_y/k_z) dk_y$ , вытекающего из  $k_y^2 + k_z^2 = k^2$ , для контурных интегралов в (1.3.12) можно записать

$$- \int_{C_1} f_z(y, z, ; k_z) dk_z = \int_{-\infty}^0 f_z(y, z, ; k_z) \frac{k_y}{k_z} dk_y \equiv \int_{-\infty}^0 f_y(y, z, ; k_y) dk_y, \quad (1.3.13)$$

$$- \int_{C_2} f_z(y, z, ; k_z) dk_z = \int_0^{\infty} f_z(y, z, ; k_z) \frac{k_y}{k_z} dk_y \equiv \int_0^{\infty} f_y(y, z, ; k_y) dk_y, \quad (1.3.14)$$

где вместо  $f_z(y, z, ; k_z)$  введена новая функция

$$f_y(y, z, ; k_y) = f_z(y, z, ; k_z) \frac{k_y}{k_z}. \quad (1.3.15)$$

Соотношение (1.3.15) устанавливает для излучательной моды связь между  $k_y$ -представлением (формула (1.2.4)) и  $k_z$ -представлением (формула (1.3.2)).

Из уравнений (1.3.12)–(1.3.14) следует, что искомое полное поле в общем случае включает три вклада,

$$f(y, z) = f_{guid}^a(y, z) + f_{guid}^r(y, z) + f_{rad}(y, z), \quad (1.3.16)$$

которые вносят моды дискретного и непрерывного спектров:

- дискретные *активные направляемые моды* (распространяющиеся),

$$f_{guid}^a(y, z) = -2\pi i \sum_{k_z^a} \text{Res } f_z(y, z; k_z^a), \quad (1.3.17)$$

- дискретные *реактивные направляемые моды* (нераспространяющиеся),

$$f_{guid}^r(y, z) = -2\pi i \sum_{k_z^r} \text{Res } f_z(y, z; k_z^r), \quad (1.3.18)$$

- *излучательные моды* непрерывного спектра,

$$f_{rad}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y, z; k_y) dk_y \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_y(k_y, z) e^{-ik_y y} dk_y. \quad (1.3.19)$$

Выведенное выражение (1.3.19) для поля излучения  $f_{rad}(y, z)$  совпадает с интегралом Фурье (1.2.3), который был записан из общих соображений.

Как следует из формул (1.2.4), (1.3.2) и (1.3.15), преобразования Фурье в  $k_y$ -представлении  $f_y(k_y, z)$  и в  $k_z$ -представлении  $f_z(y, k_z)$  связаны друг с другом следующим соотношением:

$$\tilde{f}_y(k_y, z) e^{-ik_y y} = \tilde{f}_z(y, k_z) \frac{k_y}{k_z} e^{-ik_z z}. \quad (1.3.20)$$

Согласно рис. 1.5, реактивные поля справа от области источников (при  $z > z_0$ ) создаются комплексными модами, для которых  $\text{Im } k_z^r < 0$  при любом знаке  $\text{Re } k_z^r$ . Поэтому для каждой из них постоянная распространения, равная  $\gamma^r \equiv ik_z^r = -\text{Im } k_z^r + i\text{Re } k_z^r$ , имеет положительную амплитудную постоянную,  $\alpha^r = -\text{Im } k_z^r > 0$ . В противоположность этому, комплексные моды слева от области источников (где  $z < -z_0$ , так что соответствующие корни дисперсионного уравнения находятся в верхней полуплоскости на рис. 1.5) имеют отрицательную амплитудную постоянную,  $\alpha^r = -\text{Im } k_z^r < 0$ .

Волновой множитель  $\exp(i\omega t - \gamma^r z) = \exp(-\alpha^r z) \exp[i(\omega t - \beta^r z)]$  показывает, что поля комплексных (реактивных) мод всегда затухают при удалении от области источников в обоих направлениях. Кроме того, эти поля имеют поверхностный характер, т. е. они исчезают в поперечном направлении из-за  $\text{Im } k_y < 0$  (на физическом листе римановой поверхности).

Полученный результат служит математическим обоснованием ранее введенной терминологии по отношению к реактивным (комплексным) модам, которые были, по аналогии с активными модами, классифицированы на *прямые моды* с  $\alpha_{+m} > 0$  (характеризуемые индексом  $+m > 0$ ) и *обратные моды* с  $\alpha_{-m} < 0$  (характеризуемые индексом  $-m < 0$ ) (см. с. 29 и п. 2.4). Итак, прямые и обратные моды (активные и реактивные) вносят вклад в поле, соответственно, справа и слева от области источников. Внутри этой области (при  $-z_0 < z < z_0$ ) существуют как те, так и другие моды, будучи возбужден-