

Быков В.П.
Силичев О.О.

Лазерные резонаторы



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 535.8
ББК 22.34+32.86-5
Б95

Быков В. П., Силичев О. О. **Лазерные резонаторы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 320 с. — ISBN 5-9221-0297-4.

В книге изложены основные методы анализа лазерных резонаторов — матричный, метод интегрального уравнения, геометро-оптический метод. Большое внимание уделено методам практического построения схем резонаторов, обеспечивающих те или иные специальные свойства лазерного излучения — мощность, малую расходимость, стабильность и проч. с учетом специфики активной среды, режима работы лазера. Рассмотрено большое количество практически важных примеров.

Материал книги основан на курсах лекций, читавшихся и читаемых авторами в МГУ и МФТИ. Он вполне доступен студентам старших курсов технических вузов и предназначен в первую очередь лицам, специализирующимся в области лазерной физики и техники.

Ил. 142.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Глава 1. Оптика гауссовых пучков	9
§ 1.1. Гауссов пучок в свободном пространстве	9
§ 1.2. Лазерный резонатор, образованный сферическими зеркалами	19
§ 1.3. Прохождение гауссова пучка через тонкую линзу и отражение его от сферического зеркала	25
§ 1.4. Потери энергии в лазерных резонаторах	30
§ 1.5. Матричный метод расчета лазерных резонаторов	35
§ 1.6. Астигматичный гауссов пучок, астигматичные оптические элементы, астигматичные резонаторы	45
§ 1.7. Эрмит-гауссов пучок и высшие моды лазерного резонатора, образованного сферическими зеркалами	51
§ 1.8. Лагерр-гауссов пучок и вырождение мод лазерного резонатора	65
§ 1.9. Электрическое и магнитное поля гауссова пучка	70
§ 1.10. Состояние поляризации мод лазерного резонатора. Метод Джонса	73
§ 1.11. Расчет резонаторов матричным методом. Резюме	81
§ 1.12. Гауссовы пучки — решения уравнений Максвелла	87
§ 1.13. Гауссов пучок с двумя системами главных осей	91
§ 1.14. Кольцевые резонаторы	104
Глава 2. Метод интегрального уравнения	117
§ 2.1. Преобразование параксиальных пучков гауссовыми оптическими системами	117
§ 2.2. Метод интегрального уравнения в теории резонаторов	127
§ 2.3. Интегральное уравнение резонатора, содержащего негауссовы оптические элементы	134
§ 2.4. Конфокальный резонатор	140
§ 2.5. Методы решения интегрального уравнения в теории резонаторов	155
Глава 3. Сложные лазерные резонаторы	169
§ 3.1. Связанные лазерные резонаторы	169
§ 3.2. Селекция продольных мод	175
§ 3.3. Согласование связанных резонаторов	179
§ 3.4. Резонаторы с дисперсионными элементами	183

Глава 4. Резонаторы твердотельных лазеров	189
§ 4.1. Термооптические искажения активных элементов твердотельных лазеров	189
§ 4.2. Резонаторы с термооптически возмущенным активным элементом	198
§ 4.3. Резонаторы одномодовых твердотельных лазеров с непрерывной накачкой	211
§ 4.4. Устойчивые резонаторы одномодовых твердотельных лазеров с импульсной накачкой	226
§ 4.5. Резонаторы одномодовых лазеров неустойчивой конфигурации	232
§ 4.6. Резонаторы твердотельных технологических лазеров	247
Глава 5. Геометрическая оптика лазерных резонаторов	256
§ 5.1. Геометрическая оптика лазерных резонаторов в параксиальном приближении	256
§ 5.2. Двумерный эллиптический резонатор	262
§ 5.3. Эллипсоидальный резонатор	267
§ 5.4. Движение короткого (фемтосекундного) волнового пакета в эллипсоидальном резонаторе	279
§ 5.5. Эллипсоидальный резонатор — волновое решение	283
§ 5.6. Лучевые системы в резонаторах более общего типа, чем эллипсоидальный	293
§ 5.7. Построение волнового поля по лучевой картине	296
§ 5.8. Оптические линии задержки	303
Список литературы	310

*Светлой памяти
Александра Михайловича Прохорова
посвящается*

ВВЕДЕНИЕ

Представление о волновом движении электромагнитного поля возникло после того, как Максвелл усовершенствовал существовавшие до него уравнения электромагнетизма и в результате получил уравнения, названные впоследствии его именем. Электромагнитные волны явились прямым следствием введенного Максвеллом в уравнения тока смещения. С пониманием возможности волнового движения пришло и понимание возможности использования резонаторов для наблюдения электромагнитных волн. Действительно, первое наблюдение электромагнитных волн Герцем было связано с использованием резонатора — так называемого вибратора Герца, который в дальнейшем широко использовался в технике и дожил до наших дней — многочисленные телевизионные антенны, расположенные на крышах домов, представляют собой слегка модифицированный вариант вибратора Герца. Отметим, что по современной терминологии вибратор Герца следовало бы назвать открытым резонатором, поскольку часть запасенной в нем энергии могла излучаться в свободное пространство, более того, сама возможность наблюдения электромагнитных волн была обусловлена именно этой особенностью вибратора Герца.

Герц работал с относительно короткими, метровыми волнами, в радиотехнике же на первых этапах использовались длинные, до нескольких километров, волны, для которых вибратор Герца был неудобен. Поэтому в радиотехнике тогда нашел широкое применение колебательный контур, состоящий из соединенных последовательно конденсатора и катушки индуктивности, предложенный и исследованный В. Томсоном. В принципе томсоновский контур также является открытым резонатором, поскольку может излучать в свободное пространство. Однако эта его способность в длинноволновом диапазоне выражена крайне слабо, что обусловлено малостью его размеров по сравнению с длиной волны.

Последующее развитие радиотехники и особенно радиолокации было связано с тенденцией к уменьшению длины волны электромагнитного излучения. При этом открытость колебательного контура, его способность излучать в свободное пространство увеличивалась, но воспринималась исследователями как недостаток, поскольку приводила к увеличению потерь колебательного контура. Вследствие этого существенным усовершенствованием техники генерирования электро-

магнитных волн явился переход к экранированным, закрытым со всех сторон, иначе говоря, объемным резонаторам, не обладавшим таким недостатком, как потери на излучение. Объемные электромагнитные резонаторы не были чем-то абсолютно новым, так как ранее были известны объемные акустические резонаторы.

Появление открытых резонаторов в их современной, лазерной форме тесно связано с зарождением квантовой электроники. Как известно, квантовая электроника стартовала с молекулярного генератора или аммиачного мазера, длина волны которого близка к одному сантиметру, т. е. является довольно короткой. При таких коротких волнах, как сантиметровые, и особенно миллиметровые, выявились недостатки объемных резонаторов. С уменьшением длины волны электромагнитного поля уменьшались и размеры объемных резонаторов. При этом возрастало отношение площади поверхности резонатора к его объему, что, в свою очередь, приводило к возрастанию роли омических потерь резонатора. Сделать высокодобротный резонатор в указанном диапазоне длин волн оказывалось довольно трудно, хотя многочисленные попытки в этом направлении имели место. Делались также попытки изготавливать объемные резонаторы, большие длины волны, однако они приводили к другой трудности, а именно, к многомодовости; с увеличением резонатора быстро возрастало число типов колебаний (мод), способных возбуждаться в нем.

Резонатор аммиачного мазера, хотя и был типичным объемным резонатором, имел довольно большие отверстия для впуска и выпуска пучка молекул аммиака. При этом выяснилось, что удаление части стенок резонатора при некоторых условиях не слишком сильно увеличивает потери резонатора. Это наталкивало на мысль о переходе к открытым резонаторам. Главным достоинством открытого резонатора оказалась возможность сделать его много длинны волны. Как выяснилось, удаление части стенок объемного резонатора слабо влияет на распределение полей и потери лишь некоторых, достаточно симметричных его мод; подавляющая же часть мод оказывается сильно деформированными и низкодобротными.

Открытый резонатор впервые предложен А.М. Прохоровым [1]; первый экспериментально реализованный резонатор [2] был образован двумя параллельными соосными металлическими дисками с серебряным покрытием и возбуждался петлей связи, питаемой обычным высокочастотным клистроном на длине волны ~ 3 см.

Моды объемного резонатора можно рассматривать как стоячие волны, имеющие узлы на стенках резонатора, а также как бегущие волны, отражающиеся от стенок резонатора и переходящие сами в себя при последовательных переотражениях. Рассматривая моды цилиндрического резонатора как бегущие волны, можно выделить среди них группу мод, у которых волновой вектор почти параллелен оси цилиндра, и другую, более обширную группу мод, у которых волновой вектор значительно наклонен по отношению к оси цилиндра. Оказа-

лось, что удаление боковой цилиндрической поверхности резонатора почти не влияет на первую группу мод резонатора и в то же время сильно деформирует и делает низкодобротными вторую группу мод. Спектр резонатора при этом делается редким, хотя его размеры много больше длины волны; благодаря последнему обстоятельству роль стенок оказывается незначительной и оставшиеся моды обладают высокой добротностью. Это и составляет тот полезный эффект, который возникает при переходе от объемного резонатора к открытому. Таким образом, открытые лазерные резонаторы возникли как усовершенствование объемных. В названии их — открытые резонаторы — отразилась некоторая их вторичность по отношению к объемным (закрытым) резонаторам. Мы еще обсудим в дальнейшем вопрос о том, какие резонаторы — открытые или объемные — следует считать первичными, а какие вторичными, этот вопрос не только терминологический, за ним скрыты и некоторые принципиальные обстоятельства. Сейчас же отметим, что происхождение открытых резонаторов от объемных отразилось как на постановке задачи о модах открытого резонатора, так и на методах их исследования, постановка задачи и методы исследования мод открытого резонатора по крайней мере на первых порах были в значительной мере заимствованы из теории объемных резонаторов.

Напомним, что в теории объемных резонаторов постановка задачи заключается в отыскании решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих определенным граничным условиям на стенках резонатора. Дополнив открытый лазерный резонатор стенками так, чтобы он стал объемным, и исследовав моды этого объемного резонатора известными методами, можно затем определить, какие моды останутся неизменными при переходе к открытому резонатору.

Мода объемного резонатора, как уже отмечалось, может рассматриваться в виде волны, являющейся решением уравнений Максвелла, которая после отражений от стенок резонатора переходит сама в себя или совпадает сама с собой. Действительно, условие того, что волна должна отразиться от стенок резонатора, означает, что граничные условия удовлетворяются. Условие же, что волна после отражений должна совпадать сама с собой, есть условие стационарности. Все эти соображения могут быть, таким образом, перенесены в теорию открытых лазерных резонаторов.

В настоящее время имеется несколько способов теоретического описания лазерных резонаторов. Частично эти способы перекрываются, важнее однако то, что каждый из этих способов имеет свою область приложения, в которой он, так сказать, вне конкуренции. Важнейшими такими способами являются: описание мод лазерных резонаторов и лазерного излучения с помощью гауссова пучка, метод интегрального уравнения, геометрическая оптика, метод разделения переменных и некоторые другие.

Гауссов пучок пригоден для описания мод идеализированных оптических систем, а именно, оптических систем с так называемыми

квадратичными или гауссовыми элементами. Огромное число реальных оптических элементов может быть приближенно и с высокой степенью точности отнесено к этой категории. Одним из самых универсальных методов является метод интегрального уравнения, хотя он громоздок и в большинстве случаев требует применения вычислительных машин. Информация, получаемая с его помощью, как правило, не может быть получена другими методами. Геометрическая оптика также является сильным методом. В параксиальном приближении она смыкается с гауссовой оптикой. В непараксиальном же или, как иногда говорят, абберрационном приближении она вне конкуренции. Метод разделения переменных применяется сравнительно редко и обычно перекрывается другими методами.

В настоящее время опубликованы многие сотни работ по теории лазерных резонаторов. Первопроходцами этого направления были Фокс и Ли [3], Бойд и Гордон [4], Сучкин [5], Вайнштейн [6], Когельник [7], Таланов [8], Сигмен [9], Ананьев [10] и др. [11, 12]. Для математического обоснования проблемы лазерных резонаторов важны были работы ленинградской математической школы, нашедшие отражение, в частности, в книге В.М. Бабича и В.С. Булдырева [13].

Настоящая книга содержит пять глав. Гл. 1 посвящена оптике гауссовых пучков. Глава 2 посвящена методу интегрального уравнения. В ней рассматриваются методы исследования лазерных резонаторов, содержащих негауссовы элементы — диафрагмы с резким краем, элементы с абберациями и др. В главе 3 исследуются резонаторы, содержащие несколько оптических элементов (например, вспомогательные зеркала) различного назначения. Вспомогательные зеркала могут влиять на продольный спектр резонатора, в частности, делать его более редким. При этом важную роль играет согласование поперечных мод лазерного резонатора. В лазерах на красителях дополнительные оптические элементы позволяют реализовывать одномодовый режим генерации. Глава 4 посвящена резонаторам твердотельных лазеров. Их основной особенностью является наличие термооптически искаженного под влиянием накачки активного элемента. Отыскание резонаторных конфигураций, наименее восприимчивых к нестабильностям накачки, является довольно трудным делом, читатель почерпнет в четвертой главе много полезного для себя в этом отношении. В главе 5 излагаются геометро-оптические методы исследования резонаторов. Введение и гл. 1, 3, 5 написаны В.П. Быковым; гл. 2, 4 — О.О. Силчевым.

Авторы признательны А.М. Прохорову, Ф.В. Бункину, М.Ф. Стельмаху, П.П. Пашинину, В.И. Конову, В.В. Савранскому, Ю.Д. Голяеву, М.И. Ананяну, А.С. Левину, Ю.И. Швецу и другим за содействие в работе. Авторы признательны также Российскому Фонду Фундаментальных исследований за поддержку издания книги (Грант № 02–02–30055).

ОПТИКА ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

§ 1.1. Гауссов пучок в свободном пространстве

Гауссовы пучки хорошо описывают моды тех резонаторов, которые образованы квадратичными, или гауссовыми элементами. К таким элементам относятся (в параксиальном приближении) линзы, сферические зеркала при нормальном и наклонном падении на них пучка, диафрагмы с плавно (по гауссову закону) меняющимся поглощением, так называемые квадратичные среды и т. п. Подавляющее большинство резонаторов именно такими элементами и образованы. К негауссовым элементам относятся диафрагмы с резкими краями, диэлектрики (в том числе активные элементы), обладающие сильными аберрациями, т. е. неквадратичной зависимостью показателя преломления от радиуса и др.

Следует отметить огромное разнообразие резонаторов, модой которых является гауссов пучок, при том, что все эти пучки являются разновидностями единственного астигматичного эрмит-гауссова пучка, описанного далее в § 1.7. Если учесть еще и простоту расчета мод, по крайней мере для резонаторов, имеющих плоскость симметрии, (правило $ABCD$), то становится ясно, что оптика гауссовых пучков есть незаменимое и весьма мощное средство исследования лазерных резонаторов. Даже если в резонаторе имеются негауссовы элементы, первоначальный расчет в пределах гауссовой оптики дает хорошую ориентировку для дальнейшего исследования.

Для того чтобы яснее оттенить свойства гауссова пучка, будем сравнивать его с плоской волной. Волновое движение в плоской волне описывается несколькими параметрами, такими как частота, амплитуда, направление и скорость распространения, фаза. Считается, что плоская волна занимает все пространство, следовательно, плоская волна является идеализацией, реально такие объекты не существуют. Тем не менее представление о плоской волне оказывается очень полезным. Математически плоская волна описывается простым соотношением

$$u(\mathbf{r}, t) = G \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\varphi), \quad (1.1)$$

где $u(\mathbf{r}, t)$ — величина, характеризующая волновое движение в точке \mathbf{r} в момент времени t , например, смещение частиц среды в поверхностной или звуковой волне, одна из компонент напряженности поля в электромагнитной волне и т. п. Частота ω определяет скорость измене-

ния величины u со временем, волновой вектор \mathbf{k} определяет скорость изменения величины u в пространстве. Направление волнового вектора \mathbf{k} определяет собой направление распространения плоской волны. С частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} связаны такие величины, как период колебаний волны T и длина волны λ :

$$T = 2\pi/\omega, \quad \lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|;$$

отношение

$$v = \omega/|\mathbf{k}|$$

называется фазовой скоростью распространения волны.

По поводу выражения (1.1) для плоской волны необходимо сделать два замечания. В природе существует много типов волнового движения: волны на поверхности жидкости, упругие волны (в частности, звук), электромагнитные волны (в частности, радиоволны, свет), в соответствии с гипотезой де Бройля можно говорить об электронных волнах и вообще о волнах вещества и т. д. Несмотря на специфику каждого типа волн, все они имеют много общих черт. Например, для всех этих волн можно ввести представление о плоских волнах (1.1). Правда, некоторые из этих волн могут быть многокомпонентными, т. е. волна в каждой точке описывается не одной, а несколькими величинами. Электромагнитные волны, интересующие нас в данной книге, как раз являются многокомпонентными. Они описываются в каждой точке пространства электрическим вектором (3 компоненты) и магнитным вектором (3 компоненты), всего 6 компонент. Однако электромагнитные поля, которые рассматриваются ниже, как правило, устроены так, что все их компоненты могут быть выражены через одну выделенную компоненту. Тогда достаточно рассмотреть только волну, соответствующую выделенной компоненте. Обычно в качестве выделенной компоненты используется наибольшая поперечная (по отношению к направлению распространения поля) компонента электрического поля. Более детально этот вопрос будет рассмотрен в § 1.9. Здесь же отметим, что подобное однокомпонентное приближение (сведение к одной компоненте в общем случае может быть сделано лишь приближенно) является очень эффективным и позволяет описать подавляющую часть свойств лазерных резонаторов.

Второе замечание касается комплексного представления волны (1.1). Подобное представление или запись волновых величин широко распространено и очень удобно. Возможность такой записи основана на простом обстоятельстве, а именно, если некоторая комплексная величина удовлетворяет тому или иному линейному дифференциальному уравнению (или даже системе таких уравнений) с вещественными коэффициентами, то тому же уравнению удовлетворяют отдельно вещественная и мнимая части этой комплексной величины. Имеет место и обратное положение: если некоторые две величины удовлетворяют упомянутому выше дифференциальному уравнению, то ему же удо-

влетворяет и комплексная величина, в которой первые две величины являются соответственно вещественной и мнимой частями.

Разумеется, всякая физически наблюдаемая величина является вещественной. Поэтому, выполнив те или иные математические преобразования в удобной комплексной форме, для получения физически наблюдаемых величин следует переходить к вещественным величинам. Так, взяв вещественную часть u , получим

$$u_1(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} u(\mathbf{r}, t) = G \cos(\omega t - \mathbf{kr} - \varphi) \quad (1.2)$$

— вещественное выражение, описывающее физически наблюдаемое явление распространения плоской волны. Мнимая часть u также может быть использована в качестве вещественного выражения для волны

$$u_2(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{Im} u(\mathbf{r}, t) = G \sin(\omega t - \mathbf{kr} - \varphi);$$

это выражение может быть получено и из выражения (1.2), если в последнем фазе φ придать новое значение, равное $\varphi + \pi/2$.

В данной книге мы будем интересоваться почти исключительно монохроматическими волнами, т. е. волнами с фиксированной частотой; описывающие такие волны выражения всегда содержат множитель

$$e^{-i\omega t}.$$

Именно из-за того, что этот множитель всегда один и тот же, он может быть опущен во всех выражениях, за исключением тех, где его роль специально подчеркивается. Так, для плоской волны получается выражение

$$u(\mathbf{r}) = G e^{i\mathbf{kr} + i\varphi}. \quad (1.3)$$

Если вещественную часть волны (1.3) умножить на $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$, то получится

$$u'(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} u \times \begin{cases} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{cases} = G \cos(\mathbf{kr} + \varphi) \times \begin{cases} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{cases}$$

— выражение, описывающее стоячую волну.

Таким образом, вычисляя вещественную часть волны (1.1), получаем вещественное выражение для плоской бегущей волны. Если же вычислить вещественную часть той же волны (1.1), но с опущенным временным множителем, и умножить эту часть на $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$, то получится вещественное выражение для стоячей волны. То же правило остается справедливым и для волн более сложной конфигурации, нежели плоская волна.

Иногда амплитуду волны G посредством соотношения

$$G = e^a, \quad a = \ln G$$

переводят в показатель степени, при этом волна типа (1.1) принимает вид

$$u(\mathbf{r}, t) = e^{a+ib}, \quad (1.4)$$

где a и b — некоторые функции аргументов \mathbf{r} и t . В этом случае следует понимать, что вещественная часть показателя степени описывает амплитудное распределение волны (1.4), а мнимая часть того же показателя описывает зависимость фазы от \mathbf{r} и t . В некоторых случаях показатель степени может представлять собой выражение, в котором вещественная и мнимая части не разделены, тогда для отыскания амплитудного и фазового распределений достаточно произвести такое разделение известными математическими методами.

Вернемся теперь к описанию гауссова пучка. От плоской волны он отличается прежде всего тем, что занимает не все пространство, а некоторую ограниченную его часть, основная часть гауссова пучка сосредоточена внутри фигурной трубки, образованной вращением гиперболы вокруг той ее оси, которую гипербола не пересекает (выберем эту ось в качестве оси z координатной системы) (рис. 1.1). Вдоль оси z гауссов пучок простирается от $-\infty$ до $+\infty$. Поле гауссова пучка отлично от нуля как внутри трубки, так и вне ее, но вне трубки оно быстро убывает при удалении от оси пучка и становится ничтожно малым по сравнению с полем внутри трубки.

Математически гауссов пучок описывается следующими двумя эквивалентными выражениями:

$$u(r, z) = \frac{G}{z - ib} \exp \left[\frac{ikr^2}{2(z - ib)} + ikz + i\varphi \right], \quad (1.5)$$

$$u(r, z) = \frac{iG}{\sqrt{z^2 + b^2}} \exp \left[-\frac{kbr^2}{2(z^2 + b^2)} + i \left(\frac{kr^2 z}{2(z^2 + b^2)} - \arctg \frac{z}{b} + kz + \varphi \right) \right], \quad (1.6)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от точки наблюдения в пучке до оси z и G — амплитудная константа. Этот пучок приближенно и с учетом других компонент поля удовлетворяет уравнениям Максвелла (см. § 1.9 и § 1.12) при зависимости от времени вида $e^{-i\omega t}$ (в выражениях (1.5) и (1.6) эта зависимость, как условлено, опущена). Обратим внимание, что зависимость показателя экспоненты от поперечных координат квадратична. Как мы увидим далее, эта квадратичность является существенным качеством гауссова пучка. Зависимость от продольной координаты z более сложная, кроме того, от z зависит также и предэкспоненциальный множитель. В выражениях для гауссова пучка фигурирует вещественный параметр b , имеющий размерность длины и называемый *параметром* гауссова пучка или чаще *параметром конфокальности* гауссова пучка. Гауссов пучок считается заданным, если известны его параметр b и волновое число

$$k = \omega/c = 2\pi/\lambda.$$

Иногда в качестве основных используют параметры a и k , причем

$$b = ka^2. \quad (1.7)$$

Нетрудно видеть, что второе выражение для гауссова пучка (1.6) отличается от первого (1.5) тем, что в нем в показателе экспоненты разделены вещественная и мнимая части. Это обстоятельство удобно тем, что позволяет исследовать амплитудное и фазовое распределения в гауссовом пучке и другие его характеристики. Преимущества же первой формы выяснятся позднее. Отметим, что гауссов пучок, поскольку он выражается лишь через r^2 , обладает цилиндрической симметрией.

Рассмотрим амплитудное распределение в плоскости $z = 0$. Из (1.6), опуская множитель i , получаем

$$u(r, z = 0) = G \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right). \quad (1.8)$$

Подобная зависимость в математике хорошо известна и носит название гауссовой экспоненты. От этой зависимости произошло и название всего пучка — гауссов пучок. Как видим, параметр a характеризует поперечный размер гауссова пучка в плоскости $z = 0$. В точке $r = a$ зависимость (1.8) имеет перегиб, т. е.

$$\partial^2 u / \partial r^2 = 0$$

при $r = a$. Амплитуда гауссова пучка спадает в e раз на расстоянии $r = a\sqrt{2}$ от оси пучка. Плотность энергии в пучке пропорциональна квадрату модуля u :

$$|u(r, z = 0)|^2 = G^2 \exp(-r^2/a^2)$$

и, следовательно, плотность энергии пучка спадает в e раз при $r = a$.

Величину a обычно называют полушириной гауссова пучка в перетяжке (см. ниже).

Отойдем теперь от плоскости $z = 0$ и рассмотрим распределение плотности энергии при некотором определенном z :

$$|u(r, z)|^2 = \frac{G^2}{z^2 + b^2} \exp\left[-\frac{r^2}{(z^2 + b^2)/kb}\right]. \quad (1.9)$$

Как видим, зависимость плотности энергии от радиуса качественно такая же, как и в плоскости $z = 0$, т. е. остается гауссовой экспонентой, однако характерный поперечный размер гауссова пучка изменился. Он стал равным

$$w(z) = \sqrt{(z^2 + b^2)/kb} = \sqrt{a^2 + z^2/k^2 a^2}, \quad (1.10)$$

т. е. увеличился. Очевидно, он увеличился бы и в том случае, если бы мы положили $z \rightarrow -z$, т. е. пошли бы влево от плоскости $z = 0$ (рис. 1.1). Следовательно, в плоскости $z = 0$ поперечный размер гауссова пучка минимален — это место пучка называется перетяжкой. Отметим, что радиус пучка w и координата z связаны друг с другом,

согласно (1.10), уравнением

$$\frac{w^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1.11)$$

т. е. кривая $w(z)$ представляет собой гиперболу, что и отмечалось выше (рис. 1.1). Поверхность, образуемая при вращении этой гиперболы

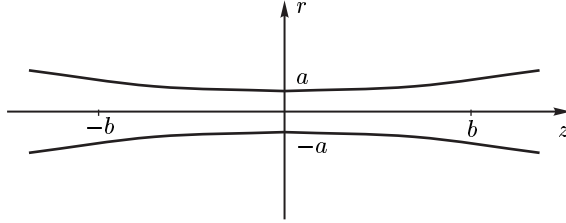


Рис. 1.1. Гиперболические каустики, ограничивающие поле гауссова пучка

лы вокруг оси симметрии (т. е. вокруг оси z) — однополостный гиперболоид вращения — называется *каустической поверхностью* или просто *каустикой* гауссова пучка. Это название пришло из геометрической оптики; связь гауссова пучка с геометрической оптикой будет обсуждаться в § 5.1.

Отметим, что в продольном направлении гауссов пучок можно разбить на три части. В центральной части, при $|z| < b$, поперечные размеры пучка сравнительно мало меняются с изменением z . В двух же периферийных частях, $z > b$ и $z < -b$, поперечные размеры пучка заметно растут с ростом $|z|$ и при больших $|z|$ пропорциональны $|z|$.

Зависимость плотности энергии на оси пучка от продольной координаты z определяется предэкспоненциальным множителем в (1.9). Легко видеть, что эта плотность в центральной части пучка ($|z| < b$) примерно постоянна, в периферийных же частях при $|z| \gg b$ она обратно пропорциональна z^2 .

Рассмотрим теперь фазовое распределение в гауссовом пучке, т. е. найдем фазу в различных точках, занимаемых полем гауссова пучка. Фаза как функция r и z определяется частью показателя экспоненты в (1.6), заключенной в круглые скобки, перед которыми стоит мнимая единица i . Из этого выражения видно, что фаза квадратичным образом зависит от расстояния r до оси z и довольно сложным образом от z . Однако эти сведения не слишком наглядны. Более интересен другой подход, при котором отыскиваются условия постоянства фазы. Приравняв константе выражение в круглых скобках в (1.6), приходим к уравнению, связывающему z и r , т. е. определяющему некоторую поверхность в области, занимаемой пучком. Такая поверхность называется поверхностью постоянной фазы или волновым фронтом.

Представление о волновом фронте играет важную роль как в теории волн вообще, так и в теории лазерных резонаторов — в этом мы убедимся позднее.

Представим уравнение волнового фронта в виде

$$-\frac{kr^2z}{2(z^2 + b^2)} = k(z - z_0) - \left(\operatorname{arctg} \frac{z}{b} - \operatorname{arctg} \frac{z_0}{b} \right), \quad (1.12)$$

где z_0 — то значение z , при котором $r = 0$, т. е. координаты $(0, z_0)$ являются координатами точки пересечения волнового фронта с осью z . Придавая z_0 те или иные значения, будем получать различные волновые фронты данного гауссова пучка. Правую часть в (1.12) можно представить в виде

$$(z_0 - z) - \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{z_0 - z}{b + zz_0/b}.$$

Так как угол всегда меньше своего тангенса, то вычитаемое в этом выражении меньше, чем

$$\frac{\lambda}{2\pi} \frac{z_0 - z}{b + zz_0/b} \leq \frac{\lambda}{2\pi} \frac{z_0 - z}{b}.$$

Но это последнее выражение значительно меньше, чем $z_0 - z$, так как $\lambda/2\pi b = 1/kb \ll 1$ (при $\lambda \simeq 10^{-4}$ см, $b \simeq 10$ см — $kb \simeq 10^4 \gg 1$). Следовательно, вторым слагаемым в (1.12) всегда можно пренебречь.

Теперь из уравнения (1.12) видно, что разность $z_0 - z$ по модулю всегда меньше $|z|$ или $|z_0|$. Действительно, так как множитель

$$r^2/(z^2 + b^2)$$

в левой части (1.12) всегда меньше или порядка $1/kb \ll 1$, что следует, например, из уравнения гиперболы (1.11), то в целом из (1.12) следует, что $z - z_0 \ll z$. Полагая, вследствие этого в левой части (1.12) $z \cong z_0$, получим для волнового фронта уравнение параболы

$$z = z_0 - \frac{r^2}{2(z_0 + b^2/z_0)}. \quad (1.13)$$

Таким образом, волновой фронт гауссова пучка имеет форму параболоида вращения. С хорошей точностью можно утверждать также, что этот фронт является сферическим, поскольку сфера радиуса

$$R = z_0 + b^2/z_0 \quad (1.14)$$

и параболоид (1.13) практически совпадают при тех значениях r , где амплитуда пучка еще заметно отлична от нуля.

Следовательно, зависимость радиуса кривизны волнового фронта гауссова пучка от продольной координаты z_0 описывается соотношением (1.14) и показана на рис. 1.2, а. Кривизна волнового фронта — величина обратная радиусу кривизны $\varkappa = 1/R$ — равна

$$\varkappa = \frac{z_0}{b^2 + z_0^2}$$

и как функция z_0 показана на рис. 1.2, б.

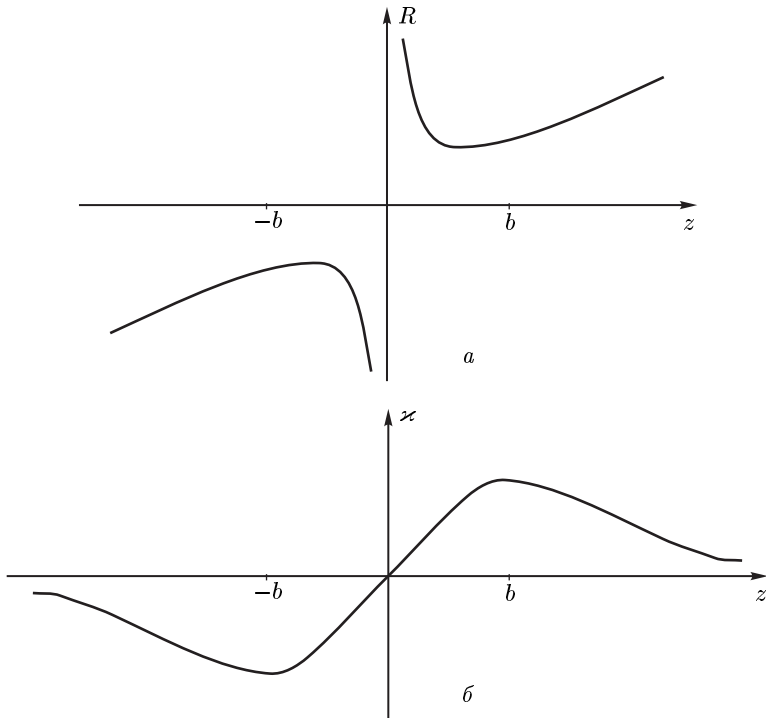


Рис. 1.2. Зависимость радиуса кривизны R (а) и кривизны κ (б) от продольной координаты z

Таким образом, исследование фазового распределения позволяет описать изменение волнового фронта гауссова пучка по мере его распространения вдоль оси z от $-\infty$ до $+\infty$. Сначала, по мере продвижения по оси z от $-\infty$ волновой фронт все более искривляется вогнутой стороной в направлении распространения волны. Искривленность волнового фронта достигает максимума при $z_0 = -b$ после чего фронт начинает выпрямляться и становится плоским при $z_0 = 0$. Далее волновой фронт снова искривляется, теперь уже выпуклостью в направлении распространения волны. Наибольшая искривленность достигается при $z_0 = b$, затем кривизна постепенно уменьшается (рис. 1.2, б).

Отметим также расположение центра кривизны волнового фронта гауссова пучка. При $z_0 = -\infty$ он находится в центре перетяжки гауссова пучка $r = 0$, $z = 0$. Затем при приближении волнового фронта к перетяжке центр кривизны смещается в положительном направлении. Когда волновой фронт находится в точке $z_0 = -b$, центр кривизны находится в симметричной точке $z = b$. При дальнейшем смещении волнового фронта в сторону перетяжки центр кривизны далее смещается в положительном направлении и при $z_0 = 0$ он уходит в $+\infty$.

Далее, при удалении волнового фронта в положительную сторону от перетяжки центр кривизны приходит из $-\infty$ и при $z_0 = b$ находится в симметричной точке $z = -b$. При $z_0 \rightarrow +\infty$ центр кривизны приближается к центру перетяжки. Таким образом, при $z_0 = \pm\infty$ гауссов пучок представляет собой сферическую волну с центром при $r = 0$ и $z = 0$.

Отметим, что как величина, так и направление фазовой скорости зависят от поперечной координаты r поля пучка. В частности, на каустике фазовая скорость поля направлена вдоль каустики и по величине равна скорости света в вакууме.

Зависимость фазы гауссова пучка от продольной координаты также представляет интерес. Напомним, что в плоской волне фаза в направлении распространения волны линейно нарастает:

$$\varphi_{\text{плоск. волны}} = kz;$$

в гауссовом пучке зависимость фазы от z более сложна. Полагая в выражении (1.6) $r = 0$, получим

$$\varphi_{\text{гаусс. пучка}} = kz - \arctg \frac{z}{b}.$$

Таким образом, если в плоской волне фазовая скорость постоянная и равна скорости света в вакууме, то в гауссовом пучке фазовая скорость равна

$$v_{\text{фаз}} = \frac{c}{1 - \frac{b}{k(b^2 + z^2)}}.$$

Легко видеть, что в периферических частях гауссова пучка ($|z| > b$) фазовая скорость примерно равна скорости света в вакууме, в центральной же части пучка ($|z| < b$)

$$v_{\text{фаз}} \cong \frac{c}{1 - \frac{1}{kb}},$$

фазовая скорость несколько больше c (рис. 1.3). Соответственно, в центральной части гауссова пучка, на его оси расстояние между горбами волн несколько больше λ .

Дадим еще одну важную характеристику пучка — угол расходимости излучения при $z \rightarrow \infty$. Его определяют как угол между асимптотами гиперболы (1.11)

$$\alpha = 2 \arctg \frac{w}{z} \Big|_{z \rightarrow \infty} \cong \frac{2w}{z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{2a}{b} = \frac{2}{ka}.$$

Обратимся теперь к рассмотрению первой формы гауссова пучка (1.5). В ней из-за неразделенности мнимой и вещественной частей показателя экспоненты характеристики как амплитудного, так и фазового распределений сосредоточены в одном параметре

$$q = z - ib, \tag{1.15}$$

который обычно называют комплексным параметром гауссова пучка. Хотя мы также будем пользоваться этим общепринятым термином,

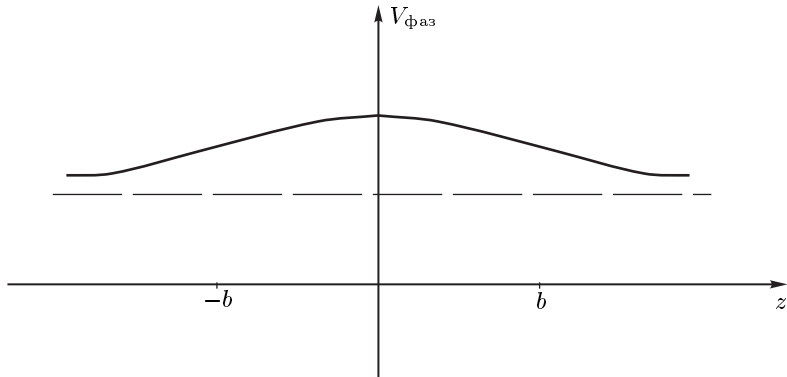


Рис. 1.3. Фазовая скорость поля гауссова пучка в разных точках оси z

отметим, что он не очень удачен, так как параметр q зависит от z и характеризует не пучок в целом, а лишь некоторое его сечение, правильнее было бы говорить о комплексном параметре того или иного сечения гауссова пучка. Радиус кривизны волнового фронта R и параметр $kw^2 = b + z^2/b$, связанный с радиусом поперечного распределения амплитуды поля гауссова пучка, можно, согласно (1.10) и (1.14), выразить через параметр q

$$R = [\operatorname{Re}(1/q)]^{-1} = \frac{z^2 + b^2}{z}, \quad kw^2 = [\operatorname{Im}(1/q)]^{-1} = \frac{z^2 + b^2}{b} \quad (1.16)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + \frac{i}{kw^2}, \quad (1.17)$$

где величины R , kw^2 являются функциями z , т.е. характеризуют определенное поперечное сечение гауссова пучка с заданным z . Таким образом, один параметр q (правда, комплексный) заменяет собой как характеристика того или иного сечения гауссова пучка два вещественных параметра, R и kw^2 .

При переходе от одного сечения к другому параметр q изменяется, как это следует из (1.15), по правилу

$$q_2 = q_1 + l,$$

где l — расстояние, разделяющее сечения 2 и 1. Можно указать также другое, несколько более сложное, но гораздо более общее правило преобразования q при переходе от одного сечения к другому, а именно:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad (1.18)$$

где коэффициенты A , B , C и D образуют так называемую *лучевую матрицу*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Соотношение (1.18) выражает собой широко используемое при расчете резонаторов правило (или закон) $ABCD$.

При распространении гауссова пучка в свободном пространстве переход от одного сечения к другому описывается лучевой матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

которая является частным случаем матрицы M и называется матрицей (или оператором) трансляции и которая в соответствии с (1.18) приводит к правилу $q_2 = q_1 + l$.

Простота преобразования параметра q при различных трансформациях гауссова пучка оптическими системами является основной причиной его введения в теорию. Как мы увидим далее, на простых правилах преобразования гауссова пучка основан метод расчета лазерных резонаторов — так называемый матричный метод.

В данном случае матрица (1.20) появилась непосредственно из выражения для гауссова пучка (1.5). В дальнейшем будут найдены и другие лучевые матрицы, описывающие прохождение гауссова пучка через различные оптические элементы. Наиболее простой вывод лучевых матриц дает геометрическая оптика (см. § 5.1); тесная связь лучевых матриц с геометрической оптикой и породила их название.

§ 1.2. Лазерный резонатор, образованный сферическими зеркалами

Рассмотрим лазерный резонатор, образованный двумя сферическими зеркалами различной кривизны, изображенный на рис. 1.4. Такой резонатор сравнительно редко используется на практике, так как

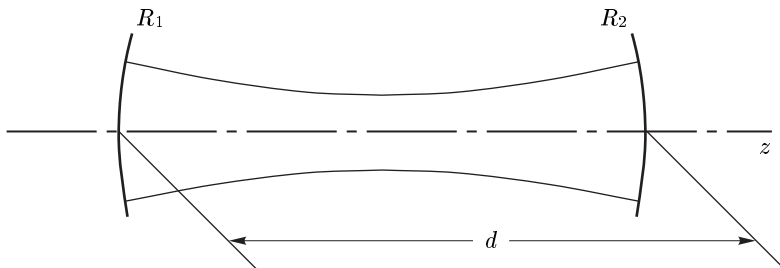


Рис. 1.4. Гауссов пучок — мода лазерного резонатора

внутри реальных резонаторов обычно располагаются те или иные дополнительные оптические элементы, например окна Брюстера. Однако для теории и вообще понимания роли резонатора этот резонатор

очень важен, в теории резонаторов этот резонатор играет такую же роль, как атом водорода в спектроскопии.

Обращаясь к резонаторам, мы сталкиваемся с новым обстоятельством, а именно с граничными условиями, которым должна удовлетворять волна, являющаяся модой резонатора. В лазерных резонаторах конкретный вид граничных условий гораздо менее существен, нежели в резонаторах объемных, высокочастотных. Подробное обсуждение их роли отложим до более подходящего случая, а пока примем самое простое граничное условие. Будем считать, что волна u на зеркалах должна обращаться в нуль. Напомним, что в качестве величины u обычно используется одна из поперечных (по отношению к оси пучка) компонент электрического поля. Поэтому условие $u = 0$ на поверхности зеркала соответствует обычному в высокочастотной области требованию обращения в нуль касательной к поверхности металла компоненты электрического поля.

Итак, попытаемся удовлетворить граничным условиям на зеркалах резонатора, используя гауссов пучок. Раз поле должно обращаться в нуль, то гауссов пучок нужно использовать в форме стоячей волны, поскольку в стоячей волне имеются узловые поверхности — поверхности, на которых волна обращается в нуль. Идея состоит в том, чтобы одну из таких узловых поверхностей гауссова пучка совместить, скажем, с первым зеркалом резонатора, при этом некоторую другую узловую поверхность совместить со вторым зеркалом резонатора. Эта идея тем более привлекательна, что волновые фронты или эквифазные поверхности гауссова пучка — а узловая поверхность стоячей волны есть частный случай такой поверхности — имеют как раз сферическую форму. Стоячая волна, образуемая гауссовым пучком, имеет вид

$$u = \frac{G}{\sqrt{z^2 + b^2}} \exp\left[-\frac{kbr^2}{2(z^2 + b^2)}\right] \cos\left[\frac{kzr^2}{2(z^2 + b^2)} - \arctg \frac{z}{b} + kz + \varphi\right]. \quad (1.21)$$

Для того чтобы амплитуда этой стоячей волны обратилась в нуль, необходимо, чтобы аргумент косинуса стал равным $m\pi + \pi/2$, а аргумент синуса — $m'\pi$, где m и m' — целые числа. Узловые поверхности гауссова пучка совместим с поверхностью зеркала в два приема. Во-первых, потребуем, чтобы волна (1.21) на оси z в точках ее пересечения с зеркалами обратилась в нуль, т. е. чтобы аргументы косинуса и синуса приняли соответствующие значения. Очевидно, в этом случае имеем соотношения

$$\begin{aligned} kz_1 - \arctg(z_1/b) + \varphi &= \begin{cases} m_1\pi + \pi/2, \\ m'_1\pi, \end{cases} \\ kz_2 - \arctg(z_2/b) + \varphi &= \begin{cases} m_2\pi + \pi/2, \\ m'_2\pi, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.22)$$

где индексы 1 и 2 указывают на отношение соответствующих величин

к первому и второму зеркалам. Во-вторых, потребуем, чтобы радиусы кривизны волновых фронтов в точках z_1 и z_2 совпадали с радиусами кривизны зеркал, т. е. согласно (1.14) положим

$$R_1 = \frac{b^2}{z_1} + z_1; \quad -R_2 = \frac{b^2}{z_2} + z_2; \quad (1.23)$$

при этом волна (1.21) обратится в нуль на всем зеркале, так как она обратилась в нуль в точке пересечения зеркала с осью z . Обратим внимание, что волновой фронт, прогиб которого направлен в сторону возрастания z , имеет положительный радиус кривизны, фронт же с прогибом в сторону убывания z имеет отрицательный радиус кривизны. Радиусы R_1 и R_2 считаются оба положительными. Отсюда и разница в знаках при R_1 и R_2 в соотношениях (1.23).

Разность $z_1 - z_2$ должна равняться расстоянию d между зеркалами

$$z_1 - z_2 = d. \quad (1.24)$$

Таким образом, получилась система из пяти уравнений с пятью неизвестными: z_1 , z_2 , b^2 , φ и k . Отметим, что z_1 и z_2 суть расстояния до перетяжки пучка соответственно от первого и второго зеркал, эти параметры практически важны, поскольку обычно бывает необходимо знать положение перетяжки относительно зеркал резонатора. Разрешая указанную систему относительно неизвестных, можно найти тот гауссов пучок, который является модой исследуемого резонатора.

Число уравнений и неизвестных можно уменьшить. Так, вычитая почленно друг из друга уравнения (1.22), придем к одному уравнению

$$kd - \arctg \frac{db}{b^2 + z_1 z_2} = n\pi, \quad (1.25)$$

где n — целое число, равное разности m_1 и m_2 или m'_1 и m'_2 . Так как целое число n достаточно произвольно, то проводимые вычисления определяют не одну моду, а целый набор мод, зависящих от n ; в связи с этим число n называют обычно продольным индексом или номером моды. При переходе к уравнению (1.25) выпала неизвестная фаза φ . Эта фаза практически несущественная величина, в частности, она определяет, имеется ли в перетяжке гауссова пучка узел, пучность волны или какое-либо ее промежуточное состояние. Но состояние волны в перетяжке трудно установить экспериментально, поскольку радиус пучка в области перетяжки почти не зависит от координаты z и положение перетяжки тем самым очень плохо определено, по крайней мере, в масштабе длины волны. Разумеется, при необходимости после определения параметров пучка фаза φ может быть определена из одного из уравнений (1.22).

Из уравнений (1.23) легко исключить b^2 , а привлекая (1.24), — и величину z_2 . В результате получим уравнение, позволяющее выра-

зять z_1 через параметры резонатора:

$$z_1 = \frac{d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d}. \quad (1.26)$$

Тем самым положение перетяжки гауссова пучка оказывается определенным. Аналогично можно получить значение

$$z_2 = \frac{d(d - R_1)}{R_1 + R_2 - 2d}. \quad (1.27)$$

Зная z_1 и используя первое из равенств (1.23), находим параметр конфокальности гауссова пучка

$$b^2 = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2}; \quad (1.28)$$

в соответствии с (1.7) радиус гауссова пучка в перетяжке оказывается равным

$$a = \sqrt[4]{\frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{k^2(R_1 + R_2 - 2d)}}. \quad (1.29)$$

Дадим также поперечные радиусы моды на зеркалах резонатора. Используя (1.10), а также (1.26), (1.27) и (1.28), получаем

$$w_{1,2} = \sqrt{\frac{R_{1,2}}{k}} \sqrt{\frac{d(d - R_{2,1})}{(d - R_{2,1})(R_1 + R_2 - d)}}, \quad (1.30)$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к первому и второму зеркалам.

Так как параметр гауссова пучка b положителен, то величина b^2 также должна быть положительной; условия, при которых $b^2 > 0$, рассмотрим несколько позже. Сейчас же обратимся к условию (1.25), определяющему резонансные частоты резонатора. Вычисляя произведение $z_1 z_2$ и подставляя его в (1.25), получим

$$k_n d = n\pi + \arctg \sqrt{\frac{d(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 - d)(R_2 - d)}}. \quad (1.31)$$

Наиболее часто это условие используют в несколько иной форме, к которой легко прийти, вычисляя косинус арктангенса в (1.31),

$$k_n d = n\pi + \arccos \sqrt{g_1 g_2}, \quad (1.32)$$

где

$$g_1 = 1 - \frac{d}{R_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{d}{R_2} \quad (1.33)$$

— часто используемые параметры для описания того или иного резонатора типа, изображенного на рис. 1.4. Запишем соотношение (1.32) дополнительно в форме, позволяющей непосредственно определять резонансные частоты рассматриваемого лазерного резонатора

$$\nu_n = \frac{nc}{2d} + \frac{c}{2\pi d} \arccos \sqrt{g_1 g_2}. \quad (1.34)$$

Детальное обсуждение спектра и других свойств резонатора отложим до того момента, как познакомимся с высшими поперечными модами. Теперь же укажем на важную частотную характеристику резонатора:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d} \quad (1.35)$$

— частотное расстояние между соседними продольными модами (или частота биений соседних продольных мод), не зависящее от номера моды. Следовательно, продольные моды образуют эквидистатный спектр.

Таким образом, при выполнении условий (1.28) и (1.31) (или (1.32), (1.34)) поле (1.21) описывает собственные колебания, или моды рассматриваемого лазерного резонатора. Правда, это выражение описывает лишь продольные моды резонатора, кроме которых существуют, как мы увидим, поперечные моды. Соответственно соотношения (1.31), (1.32) и (1.34) определяют лишь частоты продольных мод.

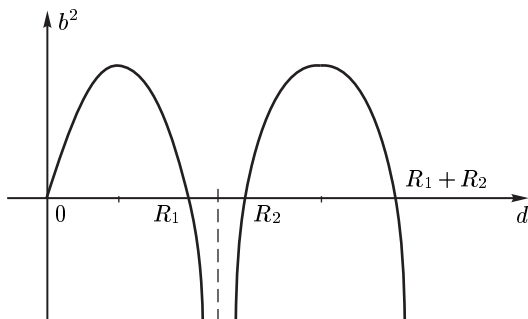


Рис. 1.5. Зависимость параметра b^2 гауссова пучка от расстояния между зеркалами

Как уже указывалось, положительность параметра конфокальности b приводит к требованию, чтобы величина b^2 , определяемая соотношением (1.28), была положительной. Как видно из соотношения (1.28) (см. также рис. 1.5), величина b^2 положительна не при всех значениях параметров d , R_1 и R_2 . Таким образом, возникает важное для лазерной техники представление об устойчивых и неустойчивых резонаторах: лазерный резонатор называется устойчивым, если величина b^2 , определяемая соотношением (1.28), положительна, лазерный резонатор называется неустойчивым, если эта величина отрицательна. Следует отметить, что название «неустойчивый резонатор» не слишком удачно, поскольку в ряде случаев неустойчивые резонаторы работают лучше устойчивых. Однако это название укоренилось, и это положение вряд ли можно поправить. Может быть более удачным было бы название «дефокусирующие резонаторы».

Как видно из рис. 1.5, имеются две области устойчивости резонатора. В первой области расстояние между зеркалами резонатора меньше меньшего радиуса кривизны, во второй области расстояние между зеркалами резонатора больше большего радиуса кривизны, но меньше суммы этих радиусов. Если один из радиусов кривизны отрицателен (это означает, что соответствующее зеркало обращено к другому зеркалу выпуклостью), то имеется лишь одна область устойчивости, а именно, когда расстояние между зеркалами меньше положительно-го радиуса кривизны, но больше чем $R_2 + R_1 = R_2 - |R_1|$ ($R_2 > 0$; $R_1 < 0$). Если оба радиуса кривизны отрицательны, т. е. зеркала обращены друг к другу выпуклыми сторонами, то область устойчивости вообще отсутствует, резонатор в этом случае определенно неустойчив.

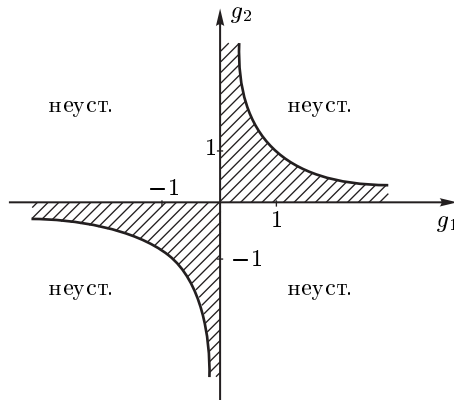


Рис. 1.6. Диаграмма устойчивости двухзеркального резонатора; штриховкой отмечена область устойчивости резонаторов

Различные типы резонаторов, а также области устойчивости и неустойчивости можно изобразить на двумерной диаграмме (рис. 1.6) в зависимости от параметров g_1 и g_2 . Некоторые резонаторы получили специальные названия (они указаны на диаграмме рис. 1.6):

- а) плоский резонатор ($g_1 = g_2 = 1$);
- б) конфокальный резонатор ($g_1 = g_2 = 0$);
- в) концентрический резонатор ($g_1 = g_2 = -1$);
- г) симметричный резонатор ($g_1 = g_2$);
- д) полуконфокальный резонатор ($g_1 = 1, g_2 = 1/2$ или $g_1 = 1/2, g_2 = 1$);
- е) симметричный неустойчивый;
- ж) телескопический неустойчивый ($g_1 = 1 - d/R_1, g_2 = 1 - d/(2d - R_1)$).

Сферическое зеркало, как известно, имеет фокусное расстояние, равное половине его радиуса кривизны, таким образом, в конфокальном резонаторе фокусы зеркал совпадают — этим и объясняется его

название. Концентрический резонатор назван так потому, что в нем совпадают центры кривизны образующих его зеркал. Полукофокальный резонатор является как бы половиной кофокального — если посередине между зеркалами кофокального резонатора поместить плоское зеркало, то образуются два полукофокальных резонатора. Название симметричного резонатора понятно; название «телескопический резонатор» станет ясно после обсуждения свойств неустойчивых резонаторов.

Таким образом, использование простого гауссова пучка (1.21) в качестве моды резонатора позволило нам получить обширную информацию о продольных модах рассматриваемого лазерного резонатора и о его свойствах в целом. Как мы увидим далее, еще большая информация может быть получена, если обратиться к некоторым обобщениям гауссова пучка.

§ 1.3. Прохождение гауссова пучка через тонкую линзу и отражение его от сферического зеркала

Прежде чем рассматривать прохождение гауссова пучка через тонкую линзу, познакомимся с важным понятием квадратичного фазового корректора. Это понятие является обобщением и идеализацией понятия тонкой линзы, оно позволяет с единой точки зрения рассматривать линзы, сферические зеркала и некоторые другие оптические элементы.

Вспомним, что падающая на линзу волна проходит в диэлектрике, образующем линзу, вблизи оси больший оптический путь, нежели на краю, и, следовательно, волна в центре линзы имеет больший набег фазы, чем на ее краю. Принимая во внимание симметрию линзы, нетрудно понять, что зависимость набега фазы от расстояния до оси линзы должна быть квадратичной. Это свойство линзы и лежит в основе определения квадратичного фазового корректора. Квадратичным фазовым корректором называется идеальный оптический элемент, который, будучи расположен на пути бегущей волны, вносит в нее дополнительный фазовый набег, квадратично зависящий от поперечных координат. Если волна бежит в положительном направлении оси z , то, проходя через квадратичный фазовый корректор, она приобретает дополнительный набег фазы, равный

$$\Delta\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}kPr^2 = -\frac{1}{2}kP(x^2 + y^2), \quad (1.36)$$

где P — оптическая сила фазового корректора — величина, обратная

его фокусному расстоянию

$$P = \frac{1}{F}; \quad (1.37)$$

как можно видеть, набег фазы в центре корректора ($x = 0, y = 0$) больше (он равен нулю), чем на периферии (набег фазы — отрицательная величина). Квадратичный корректор по сравнению с линзой идеален в том отношении, что в нем не учитывается толщина линзы — фазовый корректор бесконечно тонок, а также поперечные размеры линзы — фазовый корректор в поперечном направлении не имеет границ. Существенно также, что пренебрегается отражением света от поверхностей линзы; в результате этого фазовый корректор не обладает потерями. В реальных линзах паразитное отражение света от ее поверхностей может быть уменьшено посредством нанесения на них специальных покрытий — просветлением.

Покажем теперь, что плоская волна, проходя через квадратичный корректор, превращается в сферическую волну, собирающуюся в фокусе корректора, т. е. на расстоянии F от корректора. В плоской волне, падающей слева на фазовый корректор, расположенный при $z = 0$, фаза не зависит от поперечных координат:

$$u_1 = A e^{ikz + i\varphi_1}.$$

Сферическая волна, сходящаяся после фазового корректора в точке $z = z_0$, имеет вид

$$u_2 = B R^{-1} e^{-ikR + i\varphi_2},$$

где

$$R = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2}.$$

В параксиальном приближении, т. е. при малых r , при $z = 0$ (т. е. за фазовым корректором) эту волну можно представить в виде

$$u_2 = B z_0^{-1} \exp \left[-ik \left(z_0 + \frac{r^2}{2z_0} \right) + i\varphi_2 \right].$$

В соответствии с определением квадратичного корректора сумма фазы волны, падающей слева на корректор, и фазы, вносимой корректором (1.36), должна быть равна фазе волны, уходящей справа от корректора, т. е.

$$\varphi_1 - \frac{1}{2} k P r^2 = -k z_0 - \frac{1}{2} k z_0^{-1} r^2 + \varphi_2.$$

Ясно, что это соотношение может быть выполнено при

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k z_0 \quad \text{и} \quad F = z_0.$$

Но последнее равенство как раз и означает, что сферическая волна соберется в фокусе фазового корректора. Таким образом, квадратичный фазовый корректор действительно ведет себя как линза.

Покажем теперь, что гауссов пучок, проходя через квадратичный фазовый корректор, остается гауссовым пучком, хотя его параметры изменяются. Пусть слева на фазовый корректор, расположенный в сечении $z = \text{const}$, падает гауссов пучок

$$u(r, z) = \frac{G}{z - \bar{z} - ib} \exp \left[\frac{ikr^2}{2(z - \bar{z} - ib)} + ikz + i\varphi \right].$$

где \bar{z} — координата перетяжки пучка.

Справа же от корректора пусть отходит гауссов пучок

$$u'(r, z) = \frac{G'}{z - \bar{z}' - ib'} \exp \left[\frac{ikr^2}{2(z - \bar{z}' - ib')} + ikz + i\varphi' \right].$$

Вспоминая определение комплексного параметра гауссова пучка (1.15) и соотношение (1.16), показатели экспонент гауссовых пучков можно представить в виде

$$\frac{ikr^2}{2} \left(\text{Re} \frac{1}{q} + i \text{Im} \frac{1}{q} \right), \quad \frac{ikr^2}{2} \left(\text{Re} \frac{1}{q'} + i \text{Im} \frac{1}{q'} \right).$$

В соответствии с определением фазового корректора следует потребовать

$$\text{Re} \frac{1}{q} - P = \text{Re} \frac{1}{q'}, \quad \text{Im} \frac{1}{q} = \text{Im} \frac{1}{q'}. \quad (1.38)$$

Первое из этих равенств имеет простой физический смысл; согласно (1.16), его можно представить в виде

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{F} = \frac{1}{R'}, \quad (1.39)$$

где R и R' — радиусы кривизны волновых фронтов гауссовых пучков в месте расположения фазового корректора. Это соотношение напоминает известную формулу линзы. Правда, в формуле линзы несколько иные знаки, однако это следствие того, что в ней положительные расстояния до предмета и изображения отсчитываются в разные стороны от линзы. Если эту непоследовательность в формуле линзы исправить, то она точно совпадает с соотношением (1.39).

Второе из равенств (1.38) также имеет простой смысл — размер перетяжки при прохождении фазового корректора не изменяется, что впрочем ясно и из физических соображений, поскольку толщина линзы пренебрежимо мала по сравнению с ее фокусным расстоянием.

Умножим второе из равенств (1.38) на i и сложим полученное соотношение с первым из равенств (1.38), получим соотношение

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{F},$$

или

$$q' = \frac{qF}{F - q}.$$

Это и есть искомый закон преобразования комплексного параметра гауссова пучка при его прохождении через фазовый корректор (линзу). Этот закон можно представить в виде правила $ABCD$ (1.18), если фазовому корректору (линзе) сопоставить лучевую матрицу

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

которую называют оператором или матрицей прохождения гауссова пучка через линзу, и P определено согласно (1.37).

Кроме равенств (1.38) имеет место также равенство амплитуд

$$G/|q| = G'/|q'| \quad (1.41)$$

и фаз

$$\varphi + \operatorname{arctg} \frac{b}{z - z_1} = \varphi' + \operatorname{arctg} \frac{b'}{z - z'_1}, \quad (1.42)$$

где z — координата квадратичного корректора. Для того чтобы понять роль равенства (1.41), введем вместо амплитудного множителя G величину $\tilde{G} = G/\sqrt{b}$, которая так же, как и G , является константой. Тогда равенство (1.41) примет вид

$$\frac{\tilde{G}\sqrt{b}}{\sqrt{(z - z_1)^2 + b^2}} = \frac{\tilde{G}'\sqrt{b'}}{\sqrt{(z - z'_1)^2 + b'^2}}. \quad (1.43)$$

Как нетрудно видеть (см. (1.10)), множители при \tilde{G} и \tilde{G}' в этом равенстве обратно пропорциональны поперечному радиусу пучка $w(z)$, который согласно второму из равенств (1.38) не меняется при прохождении пучка через линзу. Поэтому из (1.43) следует

$$\tilde{G} = \tilde{G}';$$

это равенство является математическим выражением отсутствия потерь в фазовом корректоре (линзе). В §1.4 показывается, что при отсутствии потерь и на других элементах резонатора его собственные частоты вещественны и затухания колебаний нет.

Равенство (1.42) говорит о том, что фаза гауссова пучка на оси пучка не изменяется при прохождении через фазовый корректор. Если бы было необходимо учесть независимый от поперечных координат фазовый добавок, вносимый линзой, учесть, скажем, толщину линзы таким образом, то это можно было бы сделать как раз в равенстве (1.42). В этом случае в его правой части появится дополнительное слагаемое $\Delta\varphi$. Равенство (1.42) важно для определения спектра лазерного резонатора (§1.5).

Рассмотрим теперь отражение гауссова пучка от вогнутого сферического зеркала. Удобно падающий и отраженный гауссовы пучки рассматривать каждый в своей системе координат так, чтобы оба

гауссова пучка в этих системах координат распространялись в положительном направлении оси z . Таким образом, для падающего пучка ось z следует направить в сторону зеркала, а для отраженного пучка ось z должна быть направлена от зеркала. Так как нами всегда используется правая система координат, то изменение направления оси z на обратное требует, чтобы и оси x и y изменили на обратное свое направление; однако поле гауссова пучка квадратично зависит от поперечных координат и изменение их знака не играет роли. При таком выборе координат действие сферического зеркала эквивалентно действию тонкой линзы, т. е. набег фазы в центре больше, чем на краю зеркала. Таким образом, сферическое зеркало является квадратичным фазовым корректором и вносит в гауссов пучок дополнительный набег фазы $\Delta\Phi$ (1.36), где P — оптическая сила зеркала, равная

$$P = 2/R, \quad (1.44)$$

где R — радиус кривизны зеркала.

Следовательно, действие сферического зеркала на гауссов пучок может быть описано правилом $ABCD$, если сферическому зеркалу сопоставить матрицу (или оператор отражения)

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

где P — определяется соотношением (1.44).

Параметр P в выражении (1.36) может принимать и комплексные значения. Рассмотрим сначала, какой смысл имеют чисто мнимые значения $P = -i/F'$. Легко понять, что теперь вместо равенств (1.38) имеют место равенства

$$\operatorname{Re} \frac{1}{q} = \operatorname{Re} \frac{1}{q'}, \quad \operatorname{Im} \frac{1}{q} + iP = \operatorname{Im} \frac{1}{q'}.$$

Они означают, что пучок, проходя через такой корректор, не изменяет кривизны своего волнового фронта, но поперечные размеры его меняются. Поэтому устройство с такими характеристиками естественно назвать амплитудным квадратичным корректором; его называют также гауссовой диафрагмой. Величина F' представляет собой характерный параметр гауссовой диафрагмы с размерностью длины или ее мнимое фокусное расстояние.

Если параметр P — комплексный, то это означает, что на пути пучка последовательно и рядом расположены линза и гауссова диафрагма. Такое устройство можно назвать комплексным квадратичным корректором. Он описывается матрицей (1.40) с комплексным параметром

$$P = \frac{1}{F} - \frac{i'}{F}. \quad (1.46)$$

Гауссовы диафрагмы довольно трудно реализовать практически, хотя они представляют значительный интерес. Их преимущество перед обычными диафрагмами состоит в том, что при выделении основ-

ной моды они не искажают ее — основная мода сохраняет гауссов характер поперечного распределения поля.

В некоторых случаях при расчете лазерных резонаторов необходимо знать, как гауссов пучок распространяется в прозрачном диэлектрике. Так как в данной книге рассматриваются лишь монохроматические пучки, то поля в свободном пространстве и в диэлектрике различаются лишь тем, что в последнем длина волны в n раз меньше, чем в свободном пространстве (n — показатель преломления диэлектрика)

$$\lambda_{\text{диэл}} = \frac{\lambda}{n}.$$

Другими словами, поле гауссова пучка в диэлектрике получится, если в выражении (1.5) волновое число k заменить на kn :

$$u_{\text{диэл}} = \frac{G}{z - ib} \exp \left[\frac{iknr^2}{2(z - ib)} + iknz + i\varphi \right].$$

Если комплексный параметр гауссова пучка в диэлектрике определить обычным образом

$$q_{\text{диэл}} = z - ib,$$

то с радиусом кривизны волнового фронта пучка в диэлектрике $R_{\text{диэл}}$ и его поперечной полушириной $w_{\text{диэл}}$ этот параметр будет связан, как и прежде, соотношениями (1.16), однако во втором из этих соотношений вместо k следует использовать kn .

§ 1.4. Потери энергии в лазерных резонаторах

Проблема потерь энергии в лазерных резонаторах весьма обширна и трудна. В первую очередь, это касается так называемых дифракционных потерь, которые будут обсуждаться в гл. 2. Здесь мы коснемся проблемы потерь лишь в рамках гауссовой оптики.

В этом плане важнейшими источниками потерь в лазерных резонаторах являются: неполное отражение излучения от зеркал, поглощение в активной среде лазера и других диэлектриках, являющихся составными частями резонатора, паразитное отражение от торцов диэлектриков и др. В частности, для процессов, происходящих в генераторе, энергию, выводимую из лазера, также следует рассматривать как потери, хотя термин «потери» в этом случае не вполне адекватен сути дела.

Потери лазерных резонаторов определяют две важных, связанных между собой характеристики резонатора. Из-за потерь энергии собственные колебания в резонаторах затухают по экспоненциальному закону, эти потери, следовательно, определяют амплитудный параметр затухания, или *декремент* δ . Характерное время затухания $\tau = 1/\delta$ есть время, за которое амплитуда уменьшается в e раз. (Декремент по мощности вдвое больше, а время затухания вдвое меньше, чем

по амплитуде.) Кроме того, благодаря потерям энергии, спектральная ширина резонансной кривой лазерного резонатора имеет конечную (ненулевую) ширину, равную

$$\Delta\nu = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (1.47)$$

В лазерах резонаторные потери определяют такую важную величину, как пороговое значение накачки, при котором начинается генерация, а также оказывают влияние на уровень мощности в стационарном режиме.

Если пренебречь дифракционными потерями, т. е. потерями на краях зеркал, а в большинстве случаев это вполне возможно, то вычисление декремента δ и связанных с ним величин τ и $\Delta\nu$ несложно. Как уже упоминалось, при наличии потерь колебания в резонаторах экспоненциально затухают, это затухание математически можно описать как наличие у частоты колебаний небольшой мнимой добавки (отрицательной при зависимости от времени вида $e^{-i\omega t}$), т. е. можно считать, что резонансная частота комплексна

$$\omega = \omega' - i\omega''.$$

Соответственно, волновое число также комплексно:

$$k = k' - ik'' \quad (k' = \omega'/c, \quad k'' = \omega''/c). \quad (1.48)$$

Очевидно, декремент δ просто равен модулю мнимой части частоты:

$$\delta = \omega''.$$

Пренебрежем для простоты поперечной структурой поля и будем рассматривать это поле как плоскую волну

$$u(x, y, z) = Ae^{ikz - i\omega t},$$

бегущую вдоль оси z . Тогда ясно, что в промежутках, где поглощение отсутствует, амплитуда волны возрастает как $e^{k''z}$, на элементах же, где имеются потери, амплитуда уменьшается в определенное число раз, скажем в N_i раз. Парадоксальное на первый взгляд нарастание амплитуды волны в направлении ее распространения не связано, конечно, ни с каким усилением — во времени волна все время уменьшается, так как в резонаторе есть лишь потери. Таким образом при обходе резонатора амплитуда возрастает в $e^{k''L}$ раз, где L — оптическая длина резонатора, и уменьшается на поглощающих элементах в целом в N раз, где N — произведение всех коэффициентов ослабления N_i . Следовательно, после обхода резонатора должно выполняться равенство

$$Ne^{k''L} = 1$$

или $k'' = -(\ln N)/L$, и декремент равен

$$\delta = -c \ln N/L \quad (1.49)$$

(это положительная величина, поскольку $N < 1$ и $\ln N < 0$). Величина N практически всегда мало отличается от единицы:

$$\varkappa = 1 - N \ll 1,$$

где \varkappa — коэффициент потерь; в этих случаях

$$\delta \simeq c\varkappa/L. \quad (1.50)$$

Приведем некоторые характерные параметры. При длине резонатора $L = 15$ см и коэффициентах отражения зеркал 99 и 100% время затухания составляет $\tau \simeq 5 \cdot 10^{-8}$ с. Спектральная ширина резонансной кривой при этом примерно в 100–1000 раз меньше, чем межмодовое расстояние (1.35), т. е. резонансы продольных мод не перекрываются и четко выражены (рис. 1.7).

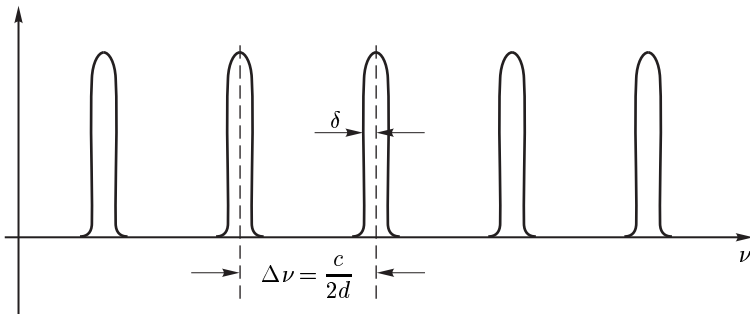


Рис. 1.7. Резонансные кривые продольных мод двухзеркального резонатора

Соотношений (1.49) и (1.50) достаточно для определения декремента и спектральной ширины резонанса во всех практически важных случаях. В большинстве случаев влияние потерь на поперечную структуру пучка ничтожно мало, тем более, что в стационарном режиме генерации эти потери компенсируются усилением в активной среде лазера. Однако мы рассмотрим простой пример резонатора с потерями, на котором можно познакомиться с несколькими модифицированными гауссовым пучком с комплексным значением k .

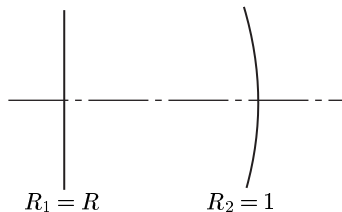


Рис. 1.8. Лазерный резонатор, в котором плоское зеркало имеет коэффициент, меньший единицы

зеркалом с коэффициентом отражения R (рис. 1.8). Гауссов пучок, составляющий моду такого резонатора и бегущий вправо, описывается

Пусть резонатор образован сферическим зеркалом со стопроцентным коэффициентом отражения и плоским