

Боголюбов Н.Н.
Ширков Д.В.

Квантовые поля



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 530.145(075.8)

ББК 22.31

Б 74

Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. **Квантовые поля**: Учеб. пособие для вузов — 3-е изд., доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с. — ISBN 978-5-9221-0580-4.

Книга содержит линейное изложение теории квантовых полей вплоть до перенормировок в теории возмущений, а также обзор современного состояния. Материал каждого параграфа примерно соответствует одной лекции, а полное содержание основного текста — годовому курсу. Содержащийся в десяти дополнениях технический материал и наборы упражнений, объединённые в семь тематических заданий, предназначены для семинарских занятий.

2-е изд. — 1993 г.

Для студентов физических специальностей, впервые изучающих предмет. Может оказаться полезной для преподавателей, а также для самообразования. Рецензент:

академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор *Славнов А. А.*

ISBN 978-5-9221-0580-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2005

© Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков,
2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	7
Предисловие ко второму изданию	8
Некоторые обозначения	10
§ 1. Частицы и поля	12
1.1. Частицы и их основные свойства (12). 1.2. Законы сохранения (14). 1.3. Соответствие частица \leftrightarrow поле (16). 1.4. Представления группы Лоренца (18).	
Глава 1. Свободные классические поля.	23
§ 2. Динамические инварианты полей	23
2.1. Лагранжиан (23). 2.2. Динамические инварианты. Энергия-импульс (25). 2.3. Теорема Нётер (27). 2.4. Момент количества движения и спин (28). 2.5. Вектор тока и заряд (30).	
§ 3. Простейшие поля	31
3.1. Скалярное поле (31). 3.2. Импульсное представление (32). 3.3. Векторное поле (35). 3.4. Локальный репер (38).	
§ 4. Электромагнитное поле	40
4.1. Потенциал электромагнитного поля (40). 4.2. Калибровочная инвариантность и условие Лоренца (41). 4.3. Обобщенный лагранжиан (43). 4.4. Диагональная калибровка (45). 4.5. Переход к локальному реперу (46).	
§ 5. Поле Дирака	48
5.1. Уравнение Дирака и матрицы Дирака (48). 5.2. Лагранжев формализм (51). 5.3. Импульсное представление (52). 5.4. Разложения по спиновым состояниям (53). 5.5. Динамические инварианты (54).	
Глава 2. Квантование свободных полей	57
§ 6. Квантование полей	57
6.1. Сущность процедуры квантования полей (57). 6.2. Корпускулярная трактовка представления чисел заполнения (58). 6.3. Каноническое квантование (61). 6.4. Представления Шредингера и Гейзенберга (63). 6.5. <i>Релятивистская схема квантования полей</i> ¹⁾ (65).	
§ 7. Перестановочные соотношения	67
7.1. Физический смысл частотных компонент (67). 7.2. Амплитуда вакуума и фоковское представление (69). 7.3. Типы перестановочных соотношений (71). 7.4. Квантование по Ферми–Дираку и Бозе–	

¹⁾ Курсивом отмечены разделы, которые могут быть опущены при первом чтении — см. по этому поводу Методические указания на с. 383.

Эйнштейну (73). 7.5. Связь спина со статистикой. Теорема Паули (75).	
§ 8. Поля с целым спином	76
8.1. Нормальные произведения, вакуумные средние (76). 8.2. Скалярное поле (79). 8.3. Комплексное векторное поле (81). 8.4. <i>Электромагнитное поле — трудности квантования</i> (83). 8.5. <i>Электромагнитное поле — квантование по Гупта–Блейлеру</i> (84).	
§ 9. Спинорные поля	87
9.1. Квантование поля Дирака (87). 9.2. Спинорное поле с массой нуль (89). 9.3. Зарядовое сопряжение (93). 9.4. <i>CPT-теорема</i> (96).	
Глава 3. Взаимодействующие поля	98
§ 10. Взаимодействие полей	98
10.1. Взаимодействие частиц (98). 10.2. Лагранжианы взаимодействия (103). 10.3. <i>Электромагнитное поле как калибровочное</i> (105).	
§ 11. <i>Неабелевы калибровочные поля</i>	<i>107</i>
11.1. <i>Поле Янга–Миллса</i> (107). 11.2. <i>Калибровочное взаимодействие полей</i> (110). 11.3. <i>Спонтанное нарушение симметрии</i> (111). 11.4. <i>Массивное поле Янга–Миллса</i> (115).	
§ 12. <i>Квантовые системы со взаимодействием</i>	<i>118</i>
12.1. <i>Постановка задачи</i> (118). 12.2. <i>Иллюстрация</i> (120). 12.3. <i>Гамильтонов подход</i> (121). 12.4. <i>Диагонализация модельных гамильтонианов</i> (124). 12.5. <i>Эффекты взаимодействия</i> (127).	
§ 13. <i>Модель тяжелого нуклона</i>	<i>128</i>
13.1. <i>Формулировка модели</i> (128). 13.2. <i>Решение в однонуклонном секторе</i> (129). 13.3. <i>Свойства однонуклонного решения</i> (132). 13.4. <i>Переход к локальному пределу</i> (134).	
Глава 4. Матрица рассеяния	136
§ 14. Матрица рассеяния	136
14.1. Теория возмущений (136). 14.2. Представление взаимодействия (138). 14.3. Матрица рассеяния (140). 14.4. Хронологические произведения (143). 14.5. Хронологическая экспонента (144).	
§ 15. <i>Общие свойства S-матрицы</i>	<i>145</i>
15.1. <i>Матрица рассеяния как функционал</i> (145). 15.2. <i>Релятивистская ковариантность и унитарность</i> (148). 15.3. <i>Условие причинности</i> (149). 15.4. <i>Дифференциальное условие причинности</i> (151).	
§ 16. <i>Аксиоматическая S-матрица</i>	<i>152</i>
16.1. <i>Разложение по степеням взаимодействия</i> (152). 16.2. <i>Условия на S_n</i> (153). 16.3. <i>Определение явного вида S_2 и S_3</i> (155). 16.4. <i>Общий вид $S(g)$</i> (156).	
§ 17. Теоремы Вика	157
17.1. Приведение к нормальной форме (157). 17.2. Первая теорема Вика (158). 17.3. Хронологические спаривания (160). 17.4. Вторая теорема Вика (162). 17.5. <i>Третья теорема Вика</i> (163).	
Глава 5. Диаграммы и правила Фейнмана	165
§ 18. Функция Грина свободных полей	165

18.1. Функция Грина скалярного поля (165). 18.2. Причинная функция Грина (167). 18.3. Особенности на световом конусе (169).	
§ 19. Диаграммы Фейнмана	171
19.1. Коэффициентные функции (171). 19.2. Графическое изображение S_n (172). 19.3. Спинорная электродинамика (174). 19.4. <i>Поле Янга–Миллса</i> (177).	
§ 20. Правила Фейнмана в \mathbf{p} -представлении	181
20.1. Переход к импульсному представлению (181). 20.2. Правила Фейнмана для матричных элементов (183). 20.3. Иллюстрация для модели φ^4 (184). 20.4. Спинорная электродинамика (186).	
§ 21. Вероятности переходов	189
21.1. Общая структура матричных элементов (189). 21.2. Нормировка амплитуды состояния (191). 21.3. Общая формула для вероятности перехода (193). 21.4. Рассеяние двух частиц (195). 21.5. Двухчастичный распад (198).	
Глава 6. Вычисление интегралов и расходимости	199
§ 22. Техника вычисления интегралов	199
22.1. Интегралы по виртуальным импульсам (199). 22.2. Альфа-представление и гауссовы квадратуры (200). 22.3. Фейнмановская параметризация (203). 22.4. Ультрафиолетовые расходимости (205).	
§ 23. Вспомогательные регуляризации	206
23.1. Необходимость регуляризации (206). 23.2. Регуляризация Паули–Вилларса (207). 23.3. Размерная регуляризация (210). 23.4. <i>Регуляризация обрезанием</i> (212). 23.5. <i>Вычитание расходимостей</i> (213).	
§ 24. Однопетлевые диаграммы.	215
24.1. Скалярная «рыба» (215). 24.2. Собственные энергии фотона и электрона (216). 24.3. Треугольные вершины диаграммы (219). 24.4. Ультрафиолетовые расходимости в высших порядках (222).	
§ 25. Выделение расходимостей	224
25.1. Структура однопетлевых расходимостей (224). 25.2. Вклад в S -матрицу (225). 25.3. Контрчлены и перенормировки (229). 25.4. <i>Расходимости и обобщенные функции</i> (231).	
Глава 7. Устранение расходимостей	233
§ 26. Общая структура расходимостей	233
26.1. Расходимости высших порядков (233). 26.2. Связь с контрчленами и перенормировки (236). 26.3. Степень расходимости диаграмм (237). 26.4. Свойство перенормируемости (240).	
§ 27. Полные функции Грина	242
27.1. Пропагаторы физических полей (242). 27.2. Высшие функции Грина (245). 27.3. Сильносвязные многохвостки (вертексы) (247). 27.4. <i>Редукционные формулы</i> (249).	
§ 28. Процедура перенормировок	250
28.1. Перенормировка вкладов в функции Грина (250). 28.2. Теорема о перенормируемости (255). 28.3. Рецепт вычитания на массовой поверхности (256). 28.4. Неоднозначность перенормировки вертекса (258).	
§ 29. <i>Перенормировки в спинорной электродинамике</i>	259

29.1. Условие градиентной инвариантности (259).	
29.2. Градиентное преобразование фотонного пропагатора (260).	
29.3. Пропагатор фотона с радиационными поправками (261).	
29.4. Полный пропагатор электрона (264).	
29.5. Вершинная часть и тождество Уорда (266).	
Глава 8. Описание реальных взаимодействий	270
§ 30. Электромагнитное взаимодействие	270
30.1. Спинорная электродинамика (270).	
30.2. Аномальный магнитный момент электрона (272).	
30.3. Пределы спинорной электродинамики (276).	
§ 31. Электрослабые взаимодействия	278
31.1. Исторические замечания (278).	
31.2. Модель Глэшоу–Салама–Вайнберга (282).	
31.3. Фермионный сектор (285).	
31.4. Лагранжиан и квантование (286).	
31.5. Аксиальная аномалия, кварковое расширение (288).	
31.6. Экспериментальный статус (289).	
§ 32. Квантовая хромодинамика	290
32.1. Физическое основание (290).	
32.2. Лагранжиан КХД (292).	
32.3. Теория возмущений. Схемы перенормировок (294).	
32.4. Метод ренормгруппы. Асимптотическая свобода (296).	
32.5. КХД на решетке (299).	
§ 33. Заключение	301
33.1. Эволюция квантовой теории (301).	
33.2. Стандартная Модель (302).	
33.3. Перспективы и спекуляции (303).	
Дополнение	307
I. Изотопический формализм	307
II. Матрицы Дирака и уравнение Дирака	310
III. Непрерывные группы	319
IV. Операторные преобразования	328
V. Сводка сингулярных функций	332
VI. Формулы импульсного интегрирования	336
VII. Кинематические соотношения для вершин	341
VIII. Правила Фейнмана для полей Янга–Миллса	344
IX. Ренормализационная группа	351
X. Дисперсионные соотношения	360
Задание	367
К главе 1: «Сентябрь»	367
К главе 2: «Октябрь»	371
К главе 3: «Ноябрь»	373
К главе 4: «Декабрь»	376
К главе 5: «Февраль»	377
К главе 6: «Март»	378
К главе 7: «Апрель»	379
Список литературы	381
Методические указания	383

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Логика построения этого учебника в свое время была заимствована из фундаментальной монографии тех же авторов «Введение в теорию квантованных полей». Примерно двукратное уменьшение объема с целью приведения его в соответствие с возможностями годового курса потребовало значительного сокращения материала по наиболее продвинутым и сложным разделам основ современной квантовой теории поля, таким как методы дисперсионных соотношений, ренормализационной группы, функционального интеграла и некоторым другим.

В предыдущем издании была проведена частичная реституция ренормализационной группы, абрис которой составил Дополнение IX. В настоящее издание добавлены — также в виде Дополнения — минимальные сведения по спектральным представлениям и дисперсионным соотношениям.

Не считая небольших технических исправлений, основной текст соответствует предыдущему изданию, подготовленному при жизни Николая Николаевича. Все сколько-нибудь существенные изменения, касающиеся в основном обновления материала последней главы, а также новое Дополнение X находятся целиком на моей ответственности.

Подготовка настоящего издания осуществлена при частичной поддержке гранта НШ-2339.2002.2.

Октябрь 2004 года

Д. В. Ширков

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

За 80-е годы локальная квантовая теория поля еще более укрепилась в качестве теоретического фундамента физики взаимодействия микрочастиц. Сейчас представляется бесспорным, что не только электромагнитное и слабое, но также и широкий круг явлений в области сильного взаимодействия могут быть количественно описаны на этой основе — в значительной мере с помощью перенормированной теории возмущений. Увеличилась роль квантолевой теории и ее фундаментальных представлений в астрофизике и космологии. Заметно расширился круг разделов теоретической физики (теория плазмы, теория полимеров, теория турбулентности), в которых с успехом используется математический аппарат квантовой теории поля, в том числе техника диаграмм Фейнмана и метод ренормгруппы. Таким образом, предмет лекционного курса, изучение которого призвана облегчить эта книга, за прошедшее после выхода 1-го издания десятилетие приобрел еще более важное значение в передовых разделах современной физики.

При подготовке настоящего издания были учтены добавления и усовершенствования, сделанные в процессе подготовки английского (1983) и немецкого (1984) переводов, а также включен новый материал по схемам перенормировки, ренормгруппе и существенно обновлена последняя глава, содержащая описание современного состояния теории реальных взаимодействий.

Мы благодарим многих наших коллег и учеников за замечания и советы, и среди них В. В. Белокурова, Ю. А. Кубышина и Н. А. Свешникова, при участии которых курс «Квантовые поля» читался последние годы на физфаке МГУ.

г. Дубна, март 1989 года

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Основная цель книги состоит в том, чтобы дать студенту физического факультета университета минимальный материал по основам современной квантовой теории поля.

Она может оказаться достаточной как для теоретиков, специализирующихся по физике ядра, квантовой статистике и в дру-

гих областях, использующих квантовополевые методы и опирающихся на квантовые представления, так и для экспериментаторов в области ядерной физики и физики высоких энергий.

Изложение построено таким образом, что оно соответствует годовому курсу. Наш собственный опыт говорит о крайней желательности параллельных семинарских занятий. С этой целью часть технического материала вынесена в конец книги в виде Дополнений. Там же помещены наборы упражнений и задач, собранные в Задания к главам основного текста.

г. Дубна, ноябрь 1979 года

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Все компоненты 4-векторов условимся выбирать действительными. 4-вектор $a = (a^0, \mathbf{a})$, состоящий из нулевой компоненты a^0 и пространственного вектора \mathbf{a} , будем согласно традиции называть контравариантным 4-вектором и обозначать его компоненты верхними индексами

$$a^\nu = (a^0, a^1, a^2, a^3).$$

Произведение двух векторов a и b определим так:

$$ab = a^0b^0 - \mathbf{a}\mathbf{b} = a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3.$$

Его удобно записать в виде

$$ab = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3),$$

где $g_{\mu\nu}$ — диагональный метрический тензор,

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu, \quad g_{00} = 1; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,$$

отличающийся знаком от известного тензора Минковского. Переход от контравариантных a^ν к ковариантным a_μ компонентам (опускание индекса) достигается с помощью свертки с метрическим тензором:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu},$$

т. е.

$$a_0 = a^0, \quad a_k = -a^k \quad (k = 1, 2, 3), \quad a_\nu = (a^0, -\mathbf{a}).$$

Здесь и ниже мы всегда будем подразумевать суммирование по дважды повторяющимся индексам, опуская знак суммы. Индексы суммирования по трем пространственным компонентам обозначаются латинскими буквами, взятыми из середины алфавита:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a_n b_n = a^k b^k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

а по всем четырем компонентам (0, 1, 2, 3) — греческими:

$$ab = a^\nu b_\nu = a_\mu b^\mu = \sum_{\mu, \nu} g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu.$$

Иногда в целях упрощения записи громоздких выражений будем оба греческих индекса помещать внизу или наверху, т. е.

$$A_\nu B_\nu = A^\mu B^\mu \equiv AB = A_\nu B^\nu,$$

$$F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Таким образом, наличие двух одинаковых греческих индексов в различных множителях *всегда* подразумевает ковариантное суммирование независимо от расположения этих индексов.

Индексы, относящиеся к группам внутренних симметрий (например, изотопические индексы), обозначаются, как правило, латинскими буквами, взятыми из начала алфавита (a, b, \dots).

Символом \hat{a} обозначена свертка компонент 4-вектора a^ν с матрицами Дирака

$$\hat{a} = a^\nu \gamma_\nu = a_\nu \gamma^\nu.$$

Для производных по ковариантным и контравариантным компонентам часто используются сокращенные обозначения

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \partial^\nu u = u^\nu, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\nu} = \partial_\nu \varphi_a = \varphi_{a;\nu}.$$

При этом, разумеется,

$$\varphi_a^{;\mu} = g^{\mu\nu} \varphi_{a;\nu}.$$

Оператор д'Аламбера

$$\square = \Delta - \partial_0^2$$

представим как

$$\square = -\partial^\nu \partial_\nu.$$

По всей книге используется так называемая *рациональная система единиц*, в которой скорость света и постоянная Планка равны единице, т. е. $c = \hbar = 1$. В этой системе энергия и импульс имеют размерность массы или обратной длины, а время $x_0 = t$ — размерность длины

$$[E] = [\mathbf{p}] = m = l^{-1}, \quad [x_0] = [x] = l = m^{-1}.$$

Формулы четырехмерного преобразования Фурье, как правило, записываются в виде

$$f(x) \sim \int e^{-ipx} \tilde{f}(p) dp, \quad \tilde{f}(p) \sim \int e^{ipx} f(x) dx.$$

Знак показателя экспоненты выбран из соображений соответствия его первого слагаемого квантовомеханической формуле

$$f(x^0, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) \sim \int e^{-iEt} \tilde{f}(E, \mathbf{x}) dE.$$

Трехмерное преобразование Фурье соответственно имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) \sim \int e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) \sim \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Исключение составляют формулы для положительно-частотных частей функций поля и положительно-частотных частей функций Грина. Нормировочные множители фурье-преобразований (степени 2π) в различных местах книги выбираются по-разному.

Внутри каждого параграфа употребляется одинарная нумерация формул: (1), (2), (3), ..., которая непосредственно используется для ссылок на формулы внутри данного параграфа. Двойная нумерация (8.21), (ДП.6) и т. д. сигнализирует об отсылке к формуле другого параграфа. При этом первый символ указывает номер параграфа или Дополнения (§ 8, Дополнение II), а второй — порядковый номер формулы в нем.

Признаком библиографической ссылки является год, стоящий после фамилии автора. Например, «Медведев (1977)» обозначает ссылку на книгу Б. В. Медведева, опубликованную в 1977 г., полное библиографическое наименование которой приведено в списке цитированной литературы в конце книги. Исключение из этой системы сделано для четвертого издания нашей книги «Введение в теорию квантованных полей», которое упоминается как «Введение».

§ 1. Частицы и поля

1.1. Частицы и их основные свойства. Квантовая теория поля представляет собой физическую теорию микрочастиц ¹⁾ и их взаимодействий. Она опирается на связи между релятивистскими частицами и квантовыми полями, возникающими при квантовании классических полей. Свойства квантовых полей находятся в тесном соответствии со свойствами частиц. Поэтому прежде всего мы перечислим основные характеристики частиц.

¹⁾ Называемых часто «элементарными» частицами. Однако свойство элементарности иногда оказывается функцией времени.

Важным атрибутом релятивистской частицы является ее масса покоя m . Известное соотношение теории относительности связывает массу m с энергией частицы E и ее импульсом \mathbf{p} :

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = m^2 c^4.$$

В рациональной системе единиц это соотношение принимает вид

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2.$$

В этой системе массу можно измерять в энергетической шкале. Для массы электрона m_e имеем ¹⁾

$$m_e = 9,109534 (47) 10^{-28} \text{ г} = 0,5110034 (14) \text{ МэВ}.$$

Масса протона $m_p = 938,2796 (27) \text{ МэВ} \simeq 0,94 \text{ ГэВ}$ и т. д.

Второй существенной характеристикой частицы является ее спин (т. е. собственный механический момент). В соответствии с общими теоремами квантовой механики спин частиц оказывается квантованным — его абсолютные значения являются целыми кратными половины постоянной Планка

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0545887 (57) 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 6,582173 (17) \cdot 10^{-22} \text{ МэВ}.$$

Поэтому в употребляемой нами рациональной системе единиц спины электрона и протона оказываются равными половине, а спин фотона (γ -кванта) — единице:

$$s_e = s_p = 1/2, \quad s_\gamma = 1.$$

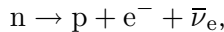
Третье кардинальное свойство частиц — наличие электрического заряда, значения которого также являются квантованными. Заряды всех наблюдаемых ²⁾ частиц кратны так называемому «элементарному заряду» $e = 4,803242 (14) \times 10^{-10}$ ед. СГС = $= 1,6021892 (466) 10^{-19}$ кулона, равному заряду электрона. В отличие от спина, квантовая природа которого ясна, дискретность электрического заряда представляет собой волнующую загадку.

Наконец, важной характеристикой частицы является ее время жизни τ . Дело в том, что лишь немногие из частиц в свободном состоянии живут практически бесконечно долго (т. е.

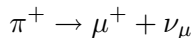
¹⁾ Цифры в скобках показывают неопределенность в одну стандартную погрешность, выраженную в единицах последнего знака основного числа, т. е. $9,109534 (47) = 9,109534 \pm 0,000047$.

²⁾ Электрические заряды кварков (составляющих адрона) считаются равными простым дробям ($\pm 1/3$, $\pm 2/3$) от e . Однако в свободном состоянии кварки не наблюдались.

являются абсолютно стабильными). К ним относятся электрон e^- , протон p , фотон и нейтрино ν ¹⁾, а также их античастицы — позитрон e^+ , антипротон \bar{p} и антинейтрино $\bar{\nu}$. Все остальные частицы нестабильны и по экспоненциальному закону $\exp(-t/\tau)$ самопроизвольно распадаются на другие частицы. Коэффициент τ и называется временем жизни. Например, для нейтрона, распадающегося по схеме (β -распад)



время жизни оказывается равным $\tau_n = 898 (16) \text{ с} \simeq 15 \text{ мин}$. Заряженный пи-мезон π^+ распадается на мюон и нейтрино:



со временем жизни $\tau_{\pi^+} = 2,6030 (23) \cdot 10^{-8} \text{ с}$ и т. д.

Нестабильность частиц представляет собой проявление важнейшего свойства микромира — свойства *взаимопревращаемости* частиц, являющегося следствием их взаимодействий. Взаимодействия частиц распадаются на четыре типа: сильные, электромагнитные, слабые и гравитационные. Мы не будем сейчас останавливаться подробно на свойствах взаимодействий (которые обсуждаются ниже — в § 10). Отметим лишь, что взаимодействия частиц приводят к тому, что частицы и их совокупности, как правило, переходят в другие частицы и их совокупности, если такие переходы не запрещены какими-либо законами сохранения (энергии, импульса, момента количества движения, электрического заряда, барионного заряда, странности и некоторыми другими)²⁾.

Отсутствие каких-либо переходов, разрешенных известными законами сохранения, воспринимается как указание на существование нового, еще не известного закона сохранения.

1.2. Законы сохранения. Вообще говоря, законы сохранения являются следствием тех или иных симметрий, которые отражают свойство ненаблюдаемости некоторых характеристик физических объектов. Хорошо известно, что закон сохранения энергии в консервативных системах представляет собой проявление симметрии относительно непрерывной операции сдвига

¹⁾ Существуют по крайней мере три разновидности нейтрино: электронное нейтрино ν_e , мюонное нейтрино ν_μ и недавно открытое τ -нейтрино ν_τ .

²⁾ Новейшие теоретические построения (модели объединения взаимодействий при сверхвысоких энергиях) дают надежду на объяснение свойств квантованности и сохранения электрического заряда, а также приводят к возможности несохранения барионного заряда.

времени. Инвариантность относительно сдвига времени в свою очередь эквивалентна ненаблюдаемости абсолютного времени. Другую цепочку подобного рода образуют: закон сохранения четности, инвариантность относительно зеркального отражения и условность понятий «правого» и «левого» (т. е. ненаблюдаемость «абсолютно правого» и «абсолютно левого»).

Большая часть законов сохранения связана с непрерывными симметриями и может быть получена из последних с помощью теоремы Нётер (см. ниже § 2.3). Среди них следует выделить законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения, которые являются следствиями симметрии физических объектов в пространстве-времени. Подобная симметрия обусловлена такими глубокими и общими свойствами, как ненаблюдаемость абсолютного времени и абсолютных пространственных координат (симметрия относительно преобразований сдвига), изотропия пространства и эквивалентность систем координат, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями (симметрия относительно пространственных и лоренцевых поворотов). Соответствующие законы сохранения являются весьма общими, характерны для всех частиц и взаимодействий, выполняются во всех переходах. В пределах точности современного эксперимента столь же универсальными являются законы сохранения электрического заряда и барионного числа. Этим законам сохранения также можно сопоставить симметрии относительно фазовых преобразований непрерывного вида (см. § 2.5). Однако последние не имеют под собой наглядной физической основы и не связаны со структурой пространства-времени. Подобного рода симметрии называются *внутренними симметриями*.

К классу внутренних симметрий относятся изотопическая симметрия, а также некоторые другие (например, так называемая симметрия «ароматов»). Большинство внутренних симметрий и связанных с ними сохраняющихся величин носит приближенный характер. За исключением только что упоминавшихся (электрический заряд и барионное число), соответствующие законы сохранения выполняются в одних взаимодействиях и нарушаются в других.

Изотопическая инвариантность (закон сохранения изотопического спина I) выполняется в сильных взаимодействиях и нарушается в электромагнитных и слабых.

Закон сохранения четности (точнее — пространственной четности), связанный с симметрией волновой функции относительно операции отражения пространственных осей, выполняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях и нарушается в

слабых. Аналогично ведут себя законы сохранения семейства дискретных квантовых характеристик — странности, очарования, красоты, ... — известных под общим названием *ароматов*. Эти свойства подытожены в табл. 1.

Таблица 1. Свойства симметрии взаимодействия и сохраняющиеся физические величины

Физические величины	Типы взаимодействий		
	сильные	электромагнитные	слабые
Электрический заряд	+	+	+
Барионное число	+	+	+
Четность	+	+	—
Изоспин	+	—	—
Ароматы	+	+	—

«+» — сохраняется; «—» — не сохраняется.

Мы не обсуждаем здесь свойств гравитационного взаимодействия из-за его чрезвычайно малой интенсивности. Для иллюстрации отметим, что сила гравитационного притяжения двух протонов примерно в 10^{37} раз меньше силы их электростатического отталкивания.

1.3. Соответствие частица ↔ поле. Поле представляет собой физическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Понятие поля естественно возникает при попытке отказа от представления о мгновенном действии частиц друг на друга на расстоянии (ньютоновское *actio in distans*) — представления, противоречащего специальной теории относительности (см. Медведев (1977), ч. II, § 6, а также Вигнер (1971), с. 12). Считая, что пространство между частицами заполнено полем, мы возлагаем на поле функцию передачи возмущения с конечной скоростью от одной частицы к другой. Таким образом, введение в физику классических полей диктуется соображениями релятивистской инвариантности. В теории микрочастиц центральную роль играют релятивистские квантовые поля.

Квантовое волновое поле — фундаментальная физическая концепция, в рамках которой формулируется динамика частиц и их взаимодействий. Квантовое поле представляет собой своеобразный синтез понятий классического поля типа электромагнитного поля Фарадея–Максвелла и поля вероятностей квантовой механики. По современным представлениям оно является наиболее фундаментальной и универсальной формой материи,

лежащей в основе всех ее конкретных (как волновых, так и корпускулярных) проявлений.

В традиционном изложении квантовое поле «получают» путем квантования классического, в результате чего полевая функция приобретает операторный характер и выражается через операторы рождения и уничтожения частиц — квантов данного поля. При этом естественно возникает возможность описывать важнейшее свойство мира микрочастиц — процессы их взаимного превращения.

Давно и хорошо известным примером классического поля является электромагнитное поле, отвечающее за взаимодействия электрически заряженных частиц. Классическое описание, базирующееся на уравнениях Максвелла, приводит к чисто волновым представлениям об электромагнетизме. Методически иногда оказывается удобным рассматривать непрерывную систему — поле в виде предела дискретной механической системы с числом степеней свободы N , стремящимся к бесконечности. Каждой степени свободы соответствует осциллятор поля (см. ниже § 6.2).

Описание корпускулярных свойств света достигается в результате процедуры квантования, в ходе которой полю сопоставляются дискретные кванты энергии, соответствующие различным возможным энергетическим состояниям осцилляторов поля. Кванты электромагнитного поля — фотоны — имеют нулевую массу покоя, не имеют электрического заряда и обладают спином, равным единице. Последний факт соответствует поляризационным свойствам классического поля и находит свое отражение в том, что электромагнитное поле является многокомпонентным и описывается набором полевых функций — компонентами напряженностей электрического и магнитного полей или компонентами потенциала A_ν .

Вторым истоком общего понятия квантового поля является квантовомеханическая волновая функция частицы, удовлетворяющая уравнению Шрёдингера, точнее — ее релятивистское обобщение. Напомним, что Ψ -функция не есть, так сказать, непосредственная физическая величина, а представляет собой амплитуду состояния частицы. Вторичное квантование релятивистского волнового поля вероятностей (например, решения уравнения Дирака) также приводит к операторному волновому полю, квантами которого оказываются первоначальные частицы и их античастицы (например, электроны и позитроны).

Таким образом, можно сказать, что в квантовой теории на смену как полям, так и частицам классической физики приходят

единые физические объекты — квантовые поля — по одному для каждого сорта частиц или полей.

Трансформационные свойства квантовых полевых функций в общем случае отражают спиновые, зарядовые и иные дискретные характеристики полей и их квантов, которые отождествляются с их частицами.

Реальному миру взаимодействующих частиц ставится в соответствие система связанных уравнений для различных полей. После квантования выражения, отвечающие за связь этих уравнений (лагранжиан или гамильтониан взаимодействия — см. ниже § 10), описывают элементарные акты взаимодействия различных частиц. Наглядную интерпретацию такие выражения получают в правилах соответствия Фейнмана (см. ниже § 19, 20).

Мы отложим рассмотрение аппарата взаимодействия частиц и полей и займемся вначале изучением свойств свободных полей и их квантованием.

1.4. Представления группы Лоренца. Рассмотрим законы преобразований полевых функций при релятивистских преобразованиях координат. Напомним некоторые определения. (Справочные сведения по теории непрерывных групп и их представлений читатель найдет в Дополнении III.)

Полная (иначе — общая ортохронная) *группа Лоренца* состоит из однородных линейных преобразований четырех координат x^ν , которые оставляют инвариантными квадратичную форму

$$x^2 = x_\nu x^\nu = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2$$

и не меняют направления времени x^0 . Эта группа включает обычные пространственные повороты, лоренцевы «повороты» в плоскостях x^0x^1 , x^0x^2 , x^0x^3 (т. е. преобразования к системе координат, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью), отражения пространственных осей и все произведения таких преобразований. Если добавить еще отражение оси времени, то получим общую группу Лоренца.

В физике большую роль играет группа, составленная из преобразований полной группы Лоренца и преобразований трансляции по всей четверем осям. Она называется неоднородной группой Лоренца (или полной *группой Пуанкаре*). Инвариантность относительно этой группы мы будем называть релятивистской инвариантностью, в отличие от лоренц-инвариантности, соответствующей группе Лоренца.

В дальнейшем нас будут интересовать законы преобразования полевых функций при преобразованиях координат из полной

группы Пуанкаре

$$x \rightarrow x' = P(\omega; x), \quad (1)$$

где $\omega = (L, a)$ обозначает совокупность параметров, описывающих трансляции (a) и повороты (L), причем

$$x'_\nu = L_{\nu\mu}x^\mu + a_\nu, \quad L_{\nu\sigma}g^{\sigma\rho}L_{\mu\rho} = g^{\nu\mu}. \quad (2)$$

Полевая функция $u(x)$ представляет собой одну (однокомпонентная функция) или несколько (многокомпонентная функция) функций четырех координат x^ν , заданных в *каждой* системе отсчета. При этом переходе от системы отсчета x к системе x' , связанной с x преобразованием (2), сопоставляется однородное линейное преобразование компонент полевых функций

$$u(x) \rightarrow u'(x') = \Lambda(\omega)u(x), \quad (3)$$

где Λ — матрица преобразования, целиком определяемая матрицей L лоренцева преобразования (2), т. е. зависящая от тех же параметров, что и L .

Подчеркнем, что преобразование (3) не сводится к замене аргументов x на x' , так как описывает преобразование системы координат, а не операцию перемещения из одной точки пространства в другую.

Каждому лоренцеву преобразованию L соответствует матрица Λ , причем единичному элементу группы L соответствует единичная матрица $\Lambda = 1$, а произведению двух элементов L_1 и L_2 группы Лоренца соответствует произведение

$$\Lambda_{L_1L_2} = \Lambda_{L_1}\Lambda_{L_2}.$$

Система матриц с такими свойствами в теории групп называется линейным представлением группы. Матрицы конечного ранга Λ образуют конечномерное представление группы Лоренца. Ранг представления определяется размерностью матриц, т. е. числом компонент u .

Поэтому возможные типы волновых функций и законы их преобразования могут быть получены исследованием конечномерных (неприводимых) представлений группы Лоренца. Подобное исследование составляет особый раздел теории представлений групп, результат которого сводится к следующему. Конечномерные представления группы Лоренца могут быть однозначными или двузначными, т. е. соответствие $L \rightarrow \Lambda_L$ может быть однозначным или двузначным. Важность для физики двузначных представлений обусловлена тем, что полевые функции, вообще говоря, не являются непосредственно наблюдаемыми

(в частности, поля, преобразующиеся по двузначным представлениям, всегда входят в наблюдаемые величины в билинейных комбинациях). Неоднозначность оператора Λ_L должна быть все же такова, чтобы наблюдаемые величины трансформировались вполне однозначно при любом лоренцевом преобразовании L . Кроме того, необходимо, чтобы операторы Λ_L были непрерывными функциями параметров преобразования L , т. е. чтобы бесконечно малому преобразованию системы отсчета соответствовало бесконечно малое преобразование функций поля. Совокупность указанных требований приводит к тому, что представления группы Лоренца распадаются на две категории. Первая категория характеризуется однозначностью соответствия $L \rightarrow \Lambda_L$ и содержит однозначные так называемые *тензорные* и *псевдотензорные*¹⁾ представления. Функции поля, преобразующиеся по тензорным представлениям, называются *тензорами* (псевдотензорами) и в некоторых случаях могут быть наблюдаемы непосредственно (электромагнитное поле). Во втором случае это соответствие оказывается двузначным: $L \rightarrow \pm \Lambda_L$.

Закон преобразования (псевдо)тензора N -го ранга $T^{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N}$ при непрерывных преобразованиях координат имеет вид

$$T'_{\nu_1, \dots, \nu_N}(x') = \frac{\partial x'_{\nu_1}}{\partial x_{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'_{\nu_N}}{\partial x_{\mu_N}} T_{\mu_1, \dots, \mu_N}(x), \quad (4)$$

или, в обозначениях (2),

$$T'^{\nu_1, \dots, \nu_N}(x') = L^{\nu_1}_{\mu_1} \dots L^{\nu_N}_{\mu_N} T^{\mu_1, \dots, \mu_N}(x).$$

Двузначные представления называются спинорными, а соответствующие величины — спинорами. Закон преобразования спинорных величин имеет более сложную структуру и для простейших спиноров приведен в Дополнении II. Отметим лишь, что вытекающий из (4) закон преобразования тензорных величин

$$u(x) \rightarrow u'(x') = u(x) \quad (5)$$

при преобразовании трансляции

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + a^{\nu}$$

является справедливым также и для спиноров.

Приведем теперь простейшие тензорные представления и соответствующие им величины. Тензор нулевого ранга, при любых непрерывных преобразованиях трансформирующийся по зако-

¹⁾ Различие между тензорами и псевдотензорами связано с преобразованиями отражения пространственных осей и рассматривается в конце параграфа.

ну (5), является инвариантом и называется *скаляром* (псевдоскаляром).

Тензор первого ранга, преобразующийся при поворотах координат по закону

$$u^{\nu}(x') = L_{\mu}^{\nu} u^{\mu}(x) = L^{\nu\mu} u_{\mu}(x), \quad (6)$$

называется *контравариантным вектором* (псевдовектором). Связанный с ним ковариантный вектор

$$u_{\nu}(x) = g_{\nu\mu} u^{\mu}(x)$$

преобразуется по закону

$$u'_{\nu}(x') = L_{\nu}^{\mu} u_{\mu}(x). \quad (7)$$

Могут быть выписаны без труда соответствующие формулы для тензоров различной вариантности второго и более высоких рангов.

Рассмотрим теперь преобразование пространственной инверсии P , т. е. отражения всех трех пространственных осей:

$$x \rightarrow x' = Px, \quad x'_0 = x_0, \quad \mathbf{x}' = -\mathbf{x}. \quad (8)$$

Законы P -преобразования полевых функций формулами (4) не определяются и должны быть сформулированы отдельно. В силу тождественности двукратного преобразования ($P^2 = 1$), вытекающей из однозначности тензорных представлений, эти законы для компонент тензоров $T(x)$ могут иметь лишь две формы:

$$PT(x) = T'(x') = T'(Px) = \pm T(x).$$

Тензор нулевого ранга, не меняющий знака при инверсии,

$$Pu(x) = +u(x) \quad (9)$$

называется скаляром. Во втором случае соответствующая величина, удовлетворяющая соотношению

$$Pu(x) = -u(x), \quad (10)$$

именуется псевдоскаляром.

Если тензор первого ранга при преобразовании P меняет знак своих пространственных компонент и не меняет знак временной:

$$PV^{\mu}(x) = V_{\mu}(x),$$

т. е.

$$PV^0(x) = V^0(x), \quad P\mathbf{V}(x) = -\mathbf{V}(x), \quad (11)$$

то он называется вектором. Если же пространственные компоненты не меняют знак, а меняет лишь временная:

$$PV^\mu(x) = -V_\mu(x),$$

т. е.

$$PV^0(x) = -V^0(x), \quad P\mathbf{V}(x) = \mathbf{V}(x), \quad (12)$$

то он является псевдовектором (аксиальным вектором). Вообще можно описать закон преобразования псевдотензоров формулой (4), умноженной на детерминант преобразования координат. Соотношения (9), (10) и им подобные определяют также важное свойство *четности* полевых функций и соответствующих им частиц. Это свойство играет существенную роль (см. ниже § 10.2) при установлении возможных форм взаимодействия различных полей.

Глава 1

СВОБОДНЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

§ 2. Динамические инварианты полей

2.1. Лагранжиан. В этом параграфе мы изложим формализм, позволяющий получать на общей основе как уравнения движения, так и сохраняющиеся во времени величины, соответствующие свойствам инвариантности относительно тех или иных непрерывных преобразований. Такой формализм в механике систем с конечным числом степеней свободы основывается на функции Лагранжа и называется лагранжевым формализмом.

Функция Лагранжа L является функцией времени, зависит от динамических переменных системы и в механике записывается в виде суммы по всем материальным точкам системы. В случае непрерывной системы типа волнового поля эта сумма заменяется пространственным интегралом от плотности функции Лагранжа \mathcal{L} :

$$L(x^0) = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(x^0, \mathbf{x}).$$

Эта последняя

$$\mathcal{L}(x^0, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(x)$$

и называется *лагранжианом*.

Исходным пунктом лагранжева формализма является действие системы \mathcal{A} , представляющее интеграл по времени от L :

$$\mathcal{A} = \int dt L(t) = \int dx^0 d\mathbf{x} \mathcal{L}(x^0, \mathbf{x}) = \int dx \mathcal{L}(x). \quad (1)$$

Отсюда видно, что функция Лагранжа $L(t)$ в теории полей оказывается промежуточной и основную роль играет лагранжиан $\mathcal{L}(x)$.

Уравнения движения могут быть получены с помощью принципа наименьшего действия, который гласит, что реальное движение происходит таким образом, что действие \mathcal{A} оказывается

экстремальным, т. е. его вариация обращается в нуль. Из условия

$$\delta \mathcal{A} = 0,$$

полагая, что вариации функций поля δu_i исчезают на границе объема интегрирования, с помощью интеграции по частям получаем уравнения Лагранжа–Эйлера

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta u_a(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a(x)} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,\nu}} = 0. \quad (2)$$

Перечислим кратко основные требования, налагаемые на лагранжиан в квантовой теории поля.

Лагранжиан, во-первых, является функцией только динамических переменных, т. е. компонент полевых функций $u_a(x)$ и их производных. Явной зависимости от координат x он не содержит, поскольку такая зависимость нарушает релятивистскую инвариантность. При этом локальность теории обеспечивается тем, что значение лагранжиана \mathcal{L} в точке x определяется значениями $u_a(x)$ и конечного числа частных производных, взятых в той же самой точке x . Такой лагранжиан называется *локальным*. Наличие, например, интегральных зависимостей приводит к нелокальному случаю.

Для того чтобы получить дифференциальные уравнения порядка не выше второго, лагранжиан считают функцией компонент поля u и их *первых* производных

$$\mathcal{L}(x) = \Phi(u_a(x), u_{a,\nu}(x)). \quad (3)$$

Отметим еще, что поскольку физические свойства системы определяются действием \mathcal{A} , в выражение для которого лагранжиан входит под знаком интеграла, то соответствие $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}$ не является взаимно однозначным. Лагранжианы, отличающиеся друг от друга полной 4-дивергенцией (от некоторого 4-вектора)

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \partial_\nu F^\nu(x), \quad (4)$$

могут оказаться физически эквивалентными.

В самом деле, интеграл (1) от $F^\nu_{;\nu}$ с помощью теоремы Гаусса–Остроградского сводится к поверхностным интегралам от компонент F^ν по трехмерным границам четырехмерного объема интегрирования. Предполагая еще, что функции поля и их производные исчезают на этих границах, получаем, что член $F^\nu_{;\nu}$ не дает вклада в физические величины.

Важными требованиями, предъявляемыми к лагранжиану, являются условия вещественности (в квантовом случае — эрмитовости) и релятивистской инвариантности.

Вещественность лагранжиана приводит к вещественности (эрмитовости) динамических инвариантов: энергии, импульса, тока и т. п. и в конечном счете к унитарности S -матрицы.

Релятивистская инвариантность лагранжиана

$$\mathcal{L}'(x') = \Phi(u'_a(x'), u'_{a;\nu}(x')) = \Phi(u_a(x), u_{a;\nu}(x)) = \mathcal{L}(x) \quad (5)$$

означает, что \mathcal{L} ведет себя как (псевдо)скаляр при преобразованиях Пуанкаре. Поскольку бесконечно малый элемент объема 4-интегрирования в (1) $dx = dx^0 d\mathbf{x}$ также является инвариантом, то мы получаем, что значение действия не меняется при преобразованиях из группы Пуанкаре. Поэтому скалярность лагранжиана обеспечивает инвариантность действия.

2.2. Динамические инварианты. Энергия-импульс. Это последнее свойство оказывается важным для получения так называемых динамических инвариантов, т. е. величин, сохраняющихся во времени. К динамическим инвариантам относятся энергия, импульс, момент количества движения, а также некоторые другие величины, сохраняющиеся в силу соответствующей инвариантности действия (или лагранжиана), как, например, электрический заряд.

В качестве примера рассмотрим 4-вектор энергии-импульса P^ν . Он может быть представлен в виде пространственного интеграла

$$P^\nu = \int d\mathbf{x} T^{\nu 0}(x^0, \mathbf{x}) \quad (6)$$

от соответствующих компонент тензора энергии-импульса, который выражается через лагранжиан соотношением

$$T^{\nu\mu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} u_{a;\nu}(x) - g^{\nu\mu} \mathcal{L}(x). \quad (7)$$

Независимость интегралов (6) от времени x^0 является следствием того, что тензор $T^{\nu\mu}$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (8)$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим интеграл

$$\int dx \frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu}.$$

Преобразуя его к поверхностному интегралу по теореме Гаусса–Остроградского,

$$\int dx \frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} T^{\nu\mu}(x), \quad (9)$$

где σ — поверхность, ограничивающая объем интегрирования, а $d\sigma_{\mu}$ — элемент поверхности, нормальный к оси x^{μ} , допустим, что объем интегрирования неограниченно расширяется в пространственноподобных направлениях и ограничен по времени двумя трехмерными плоскостями $\sigma_1(x^0 = t_1)$ и $\sigma_2(x^0 = t_2)$. Предполагая еще, что на бесконечно удаленных в пространственноподобных направлениях точках поля u_a , их производные и компоненты тензора энергии-импульса равны нулю, получим из (8) и (9)

$$\int_{\sigma_1} d\mathbf{x} T^{\nu 0}(x) - \int_{\sigma_2} d\mathbf{x} T^{\nu 0}(x) = \int d\mathbf{x} T^{\nu 0}(t_1, \mathbf{x}) - \int d\mathbf{x} T^{\nu 0}(t_2, \mathbf{x}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что уравнение непрерывности (8) является следствием уравнений движения. Рассмотрим дивергенцию от правой части (7):

$$\partial_{\mu} T^{\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} \right) u_a^{;\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} \partial_{\mu} (u_a^{;\nu}) - \partial^{\nu} \mathcal{L}.$$

Используя уравнения движения (2) и меняя порядок дифференцирований у второй производной, получим

$$\partial_{\mu} T^{\nu\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} \frac{\partial u_a}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} \frac{\partial u_{a;\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\nu}} = 0.$$

Подведем теперь некоторые итоги. Мы установили, что каждая из четырех величин P^{ν} ($\nu = 0, 1, 2, 3$) сохраняется во времени благодаря тому, что соответствующая пространственная плотность $T^{\nu 0}$ является нулевой компонентой «4-вектора» $\theta^{\mu}(\nu) \equiv T^{\nu\mu}$, удовлетворяющего уравнению непрерывности (8). Последнее вытекает из уравнений Лагранжа–Эйлера, а также того факта, что лагранжиан \mathcal{L} зависит от координат x только через функции поля u_a и их первые производные $u_{;\nu}$, вследствие чего

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} u_a^{;\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x^{\mu}} \right).$$

Как можно показать, сохранение проекции «4-вектора» P^{ν} на ν -ю ось является следствием ковариантности лагранжиана

(и равенства нулю соответствующей вариации действия) относительно трансляции вдоль оси x^ν .

2.3. Теорема Нётер. Последнее утверждение является частным случаем так называемой теоремы Нётер, которую можно сформулировать следующим образом.

Пусть имеет место некоторое непрерывное преобразование координат и одновременно функций поля, зависящее от s параметров ω_k ($k = 1, 2, \dots, s$):

$$x_\nu \rightarrow x'_\nu = f_\nu(x; \omega), \quad (10)$$

$$u_a(x) \rightarrow u'_a(x') = U_a(u_b(x); \omega) \quad (11)$$

— и обращающее в нуль вариацию действия $\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) dx$:

$$\delta_* \mathcal{A} = 0.$$

Тогда существует s динамических инвариантов C_k (т. е. сохраняющихся во времени функций от полевых функций и их производных), которые представимы в виде пространственных интегралов

$$C_k = \int dx \theta_{(k)}^0(x) \quad (12)$$

от нулевых компонент некоторых «4-векторов»

$$\theta_{(k)}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\nu}} (u_{a;\mu} X_k^\mu - \Psi_{a;k}) - X_k^\nu \mathcal{L}(x), \quad (13)$$

причем

$$X_k^\mu = \left. \frac{\partial f^\mu(x; \omega)}{\partial \omega_k} \right|_{\omega=0}, \quad \Psi_{a;k} = \left. \frac{\partial U_a}{\partial \omega_k} \right|_{\omega=0}. \quad (14)$$

Мы не будем приводить здесь доказательства этой теоремы, отослав интересующегося читателя к § 2.1. Введения.

Отметим прежде всего, что приведенные выше выражения (6), (7) являются частными случаями общих выражений (12), (13), соответствующих

$$X_k^\nu = \delta_k^\nu, \quad \Psi_{a;k} = 0. \quad (15)$$

Значения (15) соответствуют преобразованиям

$$\begin{aligned} x'_\nu &= x_\nu + \omega_\nu, \\ u'_a(x') &= u_a(x), \end{aligned}$$

т. е. преобразованиям трансляции всех четырех координат.

Последняя формула является законом преобразования функций поля при преобразованиях трансляции. Как видно, он одинаков для функций поля различной тензорной размерности. Подставляя значения (15) в общую формулу (13), получаем выражение (7) для тензора энергии-импульса. С помощью (12) приходим к формуле (6) для сохраняющегося во времени 4-вектора энергии-импульса P^ν .

2.4. Момент количества движения и спин. Получим теперь динамические инварианты, соответствующие 4-мерным лоренцевым вращениям системы координат. Как следует из (14), достаточно рассматривать только их инфинитезимальную форму, которая имеет вид

$$x'_\nu = x_\nu + x^\mu \delta L_{\nu\mu}, \quad (16)$$

где $\delta L_{\nu\mu}$ — бесконечно малые параметры поворотов. Благодаря антисимметричности величин $\delta L_{\nu\mu}$ в качестве независимых параметров могут быть выбраны шесть из них:

$$\delta\omega_{(\mu\nu)} = \delta L_{\mu\nu} \text{ при } \mu < \nu, \quad (17)$$

представляющих собой бесконечно малые углы вращения в плоскости $x_\mu x_\nu$. Таким образом, индекс k из формул (12)–(15) представляется двойным индексом $(\mu\nu)$.

Записав вариацию δx в виде

$$\delta x_\nu = X_\nu^k \delta\omega_k = \sum_{\rho < \sigma} X_\nu^{(\rho\sigma)} \delta\omega_{(\rho\sigma)}, \quad (18)$$

получим с помощью (16), (17)

$$\delta x_\nu = x^\mu \delta L_{\nu\mu} = \sum_{\rho < \sigma} (x^\sigma \delta_\nu^\rho - x^\rho \delta_\nu^\sigma) \delta\omega_{(\rho\sigma)},$$

т. е.

$$X_\nu^{(\rho\sigma)} = x^\sigma \delta_\nu^\rho - x^\rho \delta_\nu^\sigma. \quad (19)$$

Бесконечно малую вариацию функций поля $u'_a(x') = u_a(x) + \delta u_a(x)$, представим в виде

$$\delta u_a(x) = \sum_{b, \rho < \sigma} A_a^{b(\rho\sigma)} u_b(x) \delta\omega_{(\rho\sigma)}. \quad (20)$$

В соответствии с (1.5) и (1.6) для скалярного поля

$$A_{\dots} = 0$$

и для векторного поля

$$A_\mu^{\nu(\rho\sigma)} = \delta_\mu^\rho g^{\nu\sigma} - \delta_\mu^\sigma g^{\nu\rho}, \quad \rho < \sigma.$$

Поэтому для векторного поля

$$\Psi_{\nu}^{(\rho\sigma)} = A_{\nu}^{\mu(\rho\sigma)} u_{\mu}(x) = u^{\sigma}(x) \delta_{\nu}^{\rho} - u^{\rho}(x) \delta_{\nu}^{\sigma}. \quad (21)$$

Подставляя (21) и (19) в (13), получаем тензор момента количества движения

$$M^{\tau(\rho\sigma)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\nu;\tau}} (u_{\nu}^{;\rho} x^{\sigma} - u_{\nu}^{;\sigma} x^{\rho}) + \mathcal{L}(x^{\rho} g^{\sigma\tau} - x^{\sigma} g^{\rho\tau}) - \\ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\nu;\tau}} A_{\nu}^{\mu(\rho\sigma)} u_{\mu}(x). \quad (22)$$

Сравнивая первые два члена в правой части с (7), видим, что их можно представить в виде

$$x^{\sigma} T^{\rho\tau} - x^{\rho} T^{\sigma\tau} = M_0^{\tau(\rho\sigma)}. \quad (23)$$

Это выражение соответствует связи между тензорами момента и энергии-импульса в механике точки. Поэтому величину (23) следует отождествить с орбитальным моментом волнового поля. В случае однокомпонентного (скалярного, псевдоскалярного) поля весь момент сводится к орбитальному.

Для многокомпонентных полей последнее слагаемое в правой части (22) отлично от поля. Оно характеризует поляризационные свойства поля и соответствует спиновому моменту поля. Итак,

$$M^{\tau(\rho\sigma)} = M_0^{\tau(\rho\sigma)} + S^{\tau(\rho\sigma)},$$

где

$$S^{\tau(\rho\sigma)} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\tau}} A_a^{b(\rho\sigma)} u_b(x). \quad (24)$$

Для векторного поля с помощью (21) получаем

$$S^{(\rho\sigma)} = \int d\mathbf{x} S^{0(\rho\sigma)} = \int d\mathbf{x} \left\{ u^{\rho}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{\sigma}} - u^{\sigma}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{\rho}} \right\}. \quad (25)$$

Здесь символом \dot{u} обозначена частная производная по времени от u . Тройка величин $S^{(23)}$, $S^{(31)}$, $S^{(12)}$ представляет собой компоненты пространственного псевдовектора — вектора спина

$$S^n = \varepsilon^{nmp} S^{(mp)} \quad (n, m, p = 1, 2, 3).$$

Заметим еще, что из уравнений непрерывности для тензоров $M^{\tau(\rho\sigma)}$, $T^{\sigma\tau}$ и соотношения (23) следует

$$\partial_{\tau} S^{\tau(\rho\sigma)} = -\partial_{\tau} M^{\tau(\rho\sigma)} = T^{\sigma\rho} - T^{\rho\sigma}. \quad (26)$$

Таким образом вектор спина сохраняется лишь при симметрии тензора энергии-импульса.

2.5. Вектор тока и заряд. Наконец, в случае комплексных полей, которые соответствуют частицам с зарядом (в простейших случаях этот заряд — электрический), лагранжиан оказывается инвариантным по отношению к фазовому преобразованию полевых функций (градиентному преобразованию первого рода), не затрагивающему координат.

Поясним суть дела на примере системы, описываемой одним комплексным полем. Пусть вещественный лагранжиан зависит от комплексных полей лишь через билинейные формы вида $u_a^* u_a$, где u_a и u_a^* — взаимно комплексно-сопряженные функции или их производные. Тогда функции u_a и u_b^* могут быть умножены на взаимно сопряженные фазовые множители, что не приведет к изменению форм $u u^*$, а тем самым и к изменению лагранжиана.

Рассматривая u и u^* как линейно независимые функции, можем записать подобное фазовое преобразование в виде

$$u_a \rightarrow u'_a = e^{i\alpha} u_a, \quad u_b^* \rightarrow u'^*_b = e^{-i\alpha} u_b^*. \quad (27)$$

Полагая α бесконечно малой величиной, находим

$$u \rightarrow u + i\alpha u, \quad u^* \rightarrow u^* - i\alpha u^*.$$

Согласно (14) отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \Psi_a &= i u_a \text{ для всех } u_a, \\ \Psi_b &= -i u_b^* \text{ для всех } u_b^*, \end{aligned}$$

а также, что $X = 0$. Подставляя эти соотношения в (13), приходим к выражению, имеющему тензорную размерность вектора:

$$J^\nu(x) = i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;\nu}^*} u_a^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{b;\nu}} u_b \right). \quad (28)$$

Этот 4-вектор подчиняется уравнению непрерывности

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \quad (29)$$

и потому обычно отождествляется с 4-вектором *тока*. Пространственный интеграл от его нулевой компоненты

$$Q = \int J^0(x) dx = i \int dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a;0}^*} u_a^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{b;0}} u_b \right) \quad (30)$$

не зависит от времени и представляет собой сохраняющуюся характеристику поля. Она отождествляется с *зарядом*. При этом интеграл движения Q может описывать как электрический заряд, так и другие сохраняющиеся характеристики, такие, как барионный заряд, странность, очарование и т. п.

Как видно, системы с подобными интегралами движения описываются комплексными (в общем случае — многокомпонентными) полями. Отметим еще, что преобразования только что рассмотренного типа ($\Psi \neq 0$, $X = 0$), не затрагивающие координат, называются преобразованиями *внутренних симметрий*. Важными для физики примерами внутренних симметрий являются изотопическая симметрия и симметрия ароматов. Соответствующие им преобразования также могут быть изучены с помощью теоремы Нётер, что приводит к понятию сохраняющихся векторов изотопического и прочих спинов.

§ 3. Простейшие поля

3.1. Скалярное поле. Наиболее простым является вещественное скалярное поле $\varphi(x)$, описывающее бесспиновые частицы одного сорта. Свободный лагранжиан этого поля выбирается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varphi_{;\nu}(x) \varphi^{;\nu}(x) - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x), \quad (1)$$

с тем, чтобы полученное из него уравнение движения (2.2) оказалось уравнением Клейна–Гордона

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{;\nu}} = -m^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\nu \partial x_\nu} = (\square - m^2) \varphi(x) = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\square = -\partial_\nu \partial^\nu = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

— оператор д'Аламбера.

С помощью (2.7) получаем из (1) тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu}(x) = \varphi^{;\nu}(x) \varphi^{;\mu}(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3)$$

Тензор момента количества движения можно получить теперь отсюда, используя соотношение (2.23). Спиновый момент равен нулю.

Подставляя в (3) явный вид лагранжиана (1), получаем плотность энергии

$$T^{00} = (1/2)[\dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2] \quad (4)$$

и плотность вектора импульса

$$T^{0k} = -\varphi^{;0}\varphi^{;k} \quad (k = 1, 2, 3).$$

3.2. Импульсное представление. В теории частиц весьма употребительным является импульсное представление. Оно, во-первых, более адекватно обычной физической постановке задачи, когда частицы характеризуются своими энергиями и импульсами (а не пространственно-временными координатами). Во-вторых, динамические переменные в этом представлении принимают более компактную и наглядную структуру.

Итак, представим функцию поля $\varphi(x)$ в виде четырехмерного интеграла Фурье:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-2} \int dk e^{ikx} \tilde{\varphi}(k), \quad dk = dk_0 d\mathbf{k}.$$

Условие вещественности $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ дает

$$\tilde{\varphi}^*(k) = \tilde{\varphi}(-k).$$

Согласно (2) фурье-амплитуда φ удовлетворяет уравнению

$$(k^2 - m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0$$

и потому представима в виде

$$\tilde{\varphi}(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k^2 - m^2)\varphi(k).$$

Дельта-функция устанавливает связь

$$(k_0)^2 - \mathbf{k}^2 = m^2 \quad (5)$$

между частотой k_0 , волновым вектором \mathbf{k} и параметром m . Как будет показано ниже, частоту k_0 следует отождествить с энергией, а волновой вектор — с вектором импульса, вследствие чего связь (5) оказывается известным соотношением из релятивистской механики частицы, в котором m представляет массу.

Разложение Фурье принимает вид

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \tilde{\varphi}(k).$$

Из-за наличия под знаком интеграла δ -функции интеграция происходит не по всему 4-мерному k -пространству, а лишь по двум полам трехмерного гиперboloида

$$k^2 = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2},$$

одна из которых целиком лежит внутри верхнего светового конуса, а другая — внутри нижнего. Замечая еще, что указанные

по́лы гиперболоидов по отдельности являются лоренц-инвариантными, мы приходим к следующему релятивистски инвариантному разбиению полевой функции на два слагаемых:

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \quad (6)$$

где

$$\varphi^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dk e^{\pm ikx} \delta(k^2 - m^2) \varphi^\pm(k). \quad (7)$$

Здесь

$$\varphi^\pm(k) = \theta(k_0) \tilde{\varphi}(\pm k),$$

а θ — известная разрывная функция:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функции φ^+ и φ^- мы будем в дальнейшем именовать соответственно положительно-частотной и отрицательно-частотной частями функции $\varphi(x)$. Как видно, при этом знак частотности связывается со знаком произведения kx (точнее, со знаком «временного» члена $k^0 x^0 = x^0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ в подынтегральной экспоненте). В связи с этим заметим, что в современной литературе иногда принимают обратный порядок обозначений, связывая «частотность» со знаком формы $k_\mu x_\mu = \mathbf{kx} + k_4 x_4 = -kx$. Подобные обозначения ассоциируются с привычной записью квантовомеханической волновой функции, которая пропорциональна $\exp(-iEx_0)$, где E — энергия.

Наш выбор обозначений связан с тем, что выражения типа φ^+ в квантовой теории соответствуют рождению частиц поля, а выражения типа φ^- — их уничтожению. Поэтому в принятой нами системе обозначений знаки (+) и (−) символизируют физический смысл соответствующих квантовых операторов.

Как будет показано ниже, произведенное разбиение оказывается также весьма удобным при записи динамических величин в импульсном представлении, поскольку последние выражаются в виде билинейных форм по $\varphi^+(k)$ и $\varphi^-(k)$.

Заметим, кроме того, что в соответствии с (7) правила комплексного сопряжения для $\varphi^\pm(k)$ имеют вид

$$(\varphi^\pm(k))^* = \varphi^\mp(k).$$

Выполняя в (7) интеграцию по k_0 , получаем

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ikx} \varphi^\pm(\mathbf{k}). \quad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi^\pm(\mathbf{k}) = \frac{\varphi^\pm(k_0, \mathbf{k})}{\sqrt{2k_0}}, \quad k_0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.$$

Подставляя (6) и (8) в (4), получим

$$\begin{aligned} P^0 &= \int T^{00} d\mathbf{x} = (1/2) \int [(\partial_\nu \varphi(x))^2 + m^2 \varphi^2(x)] d\mathbf{x} = \\ &= (1/2) \int d\mathbf{x} \{ \partial_\nu \varphi^+ \partial_\nu \varphi^+ + 2\partial_\nu \varphi^+ \partial_\nu \varphi^- + \partial_\nu \varphi^- \partial_\nu \varphi^- + \\ &\quad + m^2 [\varphi^+(x)\varphi^+(x) + 2\varphi^+(x)\varphi^-(x) + \varphi^-(x)\varphi^-(x)] \}. \end{aligned}$$

Отметим, что *все суммирования по ν в этом выражении нековариантные*. Нетрудно показать, что слагаемые, содержащие произведения функций φ^\pm одинаковой частотности, не дают вклада в динамический инвариант P^0 . Так, например,

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{x} [(\partial_\nu \varphi^+(x))^2 + m^2 (\varphi^+(x))^2] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{2\sqrt{k_0 k'_0}} \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^+(\mathbf{k}') e^{i(k_0 + k'_0)x_0} (m^2 - k_\nu k'_\nu) \times \\ &\quad \times \int d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}' + \mathbf{k})\mathbf{x}} = \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^+(-\mathbf{k}) e^{2ik_0 x_0} (m^2 - k_0^2 + \mathbf{k}^2), \end{aligned}$$

а так как $m^2 - k_0^2 + \mathbf{k}^2 = 0$, получаем

$$\int d\mathbf{x} [(\partial_\nu \varphi^+(x))^2 + m^2 (\varphi^+(x))^2] = 0.$$

Подобное соотношение имеет место и для квадратичной формы по φ^- . Поэтому

$$P^0 = \int d\mathbf{x} [\partial_\nu \varphi^+(x) \partial_\nu \varphi^-(x) + m^2 \varphi^+(x) \varphi^-(x)].$$

Подставляя в это выражение формулу (8), с помощью аналогичных выкладок находим теперь

$$P^0 = \int d\mathbf{k} k^0 \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}).$$

Соответствующее выражение для вектора импульса имеет вид

$$P^n = \int T^{0n} dx = \int d\mathbf{k} k^n \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}), \quad n = 1, 2, 3.$$

Объединяя эти выражения, запишем их в форме, справедливой также и в том случае, если бы в процессе всех выкладок функции φ^+ и φ^- считать взаимно некоммутируемыми (т. е. не менять их порядка):

$$P^\nu = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} k^\nu [\varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{k})]. \quad (9)$$

Теперь виден смысл нормировочных множителей, введенных в (8). Произведения

$$n(\mathbf{k}) = \varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) = |\varphi^+(\mathbf{k})|^2$$

выступают как плотности среднего числа незаряженных, бесспиновых частиц массы m , обладающих импульсом \mathbf{k} и энергией $\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$. После квантования эти произведения превращаются в операторы, имеющие целочисленные собственные значения.

Практически важным является поле, соответствующее пи-мезонам (пионам). Это поле является псевдоскалярным. Тройка пионов π^+ , π^0 , π^- , отличающихся друг от друга лишь электрическим зарядом, равным $0, \pm 1$, образует изотопический триплет. Этому отвечает трехкомпонентная полевая функция $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, составляющие которой образуют вектор в трехмерном изотопическом пространстве.

Свободный лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\varphi_{,\nu}\varphi^{,\nu}) - \frac{m^2}{2} (\varphi\varphi) \quad (10)$$

и представляет собой сумму выражений лагранжианов для каждой из компонент изотопического вектора. Поэтому динамические величины, отвечающие преобразованиям группы Пуанкаре, представляются суммами выражений, полученных в § 3.1 и 3.2 для каждой из изотопических компонент.

Новая сохраняющаяся величина соответствует преобразованию вращения в изотопическом пространстве и называется *вектором изотопического спина*.

3.3. Векторное поле. В качестве следующего примера рассмотрим векторное поле, используемое для описания частиц со спином 1. Это поле U_ν состоит из четырех ($\nu = 0, 1, 2, 3$) компонент, которые образуют ковариантный 4-вектор, т. е. при лоренцевых поворотах (2.16) преобразуются по закону

$$U_\mu(x) \rightarrow U'_\mu(x') = U_\mu(x) + \delta U_\mu(x); \quad \delta U_\mu = \delta\Omega_{\mu\nu}U^\nu(x).$$

Лагранжиан векторного поля может быть сконструирован различными способами. Дело в том, что простейшее обобщение лагранжиана (1) в виде ковариантной суммы по компонентам

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} U_{\mu;\nu} U^{\mu;\nu} + \frac{m^2}{2} U_\mu U^\mu \quad (11)$$

не является единственно возможным лоренц-инвариантным выражением. К нему может быть прибавлен член, пропорциональный

$$U_{\mu;\nu} U^{\nu;\mu}, \quad (12)$$

который в силу (2.4) эквивалентен выражению

$$U_{\mu}^{;\mu} U_{\nu}^{;\nu} = (\partial U / \partial x)^2.$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно установить, что разность выписанных выражений представима в виде 4-дивергенции $\partial_\nu F^\nu$.

Лагранжиан (11) «хорош» тем, что все динамические величины для него являются ковариантными суммами (по μ) соответствующих выражений из (1) для однокомпонентного поля. Однако поскольку член, связанный с компонентой U_0 , входит в такие суммы со знаком минус, его вклад в энергию оказывается отрицательным. Для разрешения этой трудности на компоненты U_μ налагают инвариантное дополнительное условие

$$\partial^\mu U_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} U_\mu(x) \equiv (\partial U) = 0. \quad (13)$$

Это условие уменьшает количество линейно независимых компонент с четырех до трех и, как будет показано ниже, обеспечивает положительную определенность энергии векторного поля. Оставшиеся три независимые компоненты соответствуют трем возможным значениям проекции спина на заданную ось (1, 0, -1), т. е. описывают частицы со спином единица. Наложение дополнительного условия эквивалентно исключению частицы со спином нуль, приводящей в этой формулировке к отрицательной энергии.

Условие (13) совместно с уравнениями движения. Более того, путем надлежащей модификации лагранжиана (11) (добавлением члена вида (12))

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} U_\nu U^\nu,$$

где

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu, \quad (14)$$

оно может быть получено как следствие уравнений движения

$$\partial_\nu H^{\mu\nu} - m^2 U^\mu = (\square - m^2)U^\mu + \partial^\mu \partial_\nu U^\nu = 0. \quad (15)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Прока*. Дифференцируя их по x^μ , после элементарных преобразований получаем дополнительное условие (13). Таким образом, уравнения Прока эквивалентны совокупности уравнений Клейна–Гордона и условию (13).

Динамические величины, соответствующие аналогичному лагранжиану комплексного векторного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \overset{*}{H}_{\mu\nu} H^{\mu\nu} + m^2 \overset{*}{U}_\nu U^\nu, \quad (16)$$

имеют вид:

тензор энергии-импульса —

$$T_{\mu\nu} = \overset{*}{H}_{\mu\sigma} \overset{*}{U}_{;\nu}^\sigma + \overset{*}{U}_{;\nu}^\sigma \overset{*}{H}_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (17a)$$

вектор тока —

$$J_\nu = i(\overset{*}{U}^\sigma \overset{*}{H}_{\sigma\nu} - \overset{*}{H}_{\sigma\nu} \overset{*}{U}^\sigma), \quad (17б)$$

тензор спинового момента —

$$S^{\nu(\mu\sigma)} = \overset{*}{U}^\mu \overset{*}{H}^{\sigma\nu} - \overset{*}{H}^{\mu\nu} \overset{*}{U}^\sigma + \overset{*}{H}^{\sigma\nu} \overset{*}{U}^\mu - \overset{*}{U}^\sigma \overset{*}{H}^{\mu\nu}. \quad (17в)$$

Для дальнейших вычислений следует разложить потенциалы на положительно- и отрицательно-частотные части и перейти к 3-мерному импульсному представлению:

$$U_\nu^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm i\mathbf{k}x} U_\nu^\pm(\mathbf{k}) \quad (18)$$

(и аналогично для $\overset{*}{U}^\pm$).

Подставляя разложения (18) в нулевые ($\nu = 0$) компоненты выражений (17) и выполняя интегрирование по $d\mathbf{x}$, получаем динамические величины:

$$P_\nu = - \int d\mathbf{k} k_\nu [\overset{*}{U}_\mu^-(\mathbf{k}) U^{+\mu}(\mathbf{k}) + \overset{*}{U}_\mu^+(\mathbf{k}) U^{-\mu}(\mathbf{k})], \quad (19)$$

$$Q = \int d\mathbf{k} [\overset{*}{U}_\mu^-(\mathbf{k}) U^{+\mu}(\mathbf{k}) - \overset{*}{U}_\mu^+(\mathbf{k}) U^{-\mu}(\mathbf{k})], \quad (20)$$

$$\mathbf{S} = i \int d\mathbf{k} \{ [\overset{*}{\mathbf{U}}^+(\mathbf{k}) \times \mathbf{U}^-(\mathbf{k})] - [\overset{*}{\mathbf{U}}^-(\mathbf{k}) \times \mathbf{U}^+(\mathbf{k})] \}. \quad (21)$$

Принимая во внимание следующие из определений (18) условия комплексного сопряжения

$$(U_\nu^\pm(\mathbf{k}))^* = U_\nu^\mp(\mathbf{k}),$$

видим, что вклад в правую часть (19), отвечающий $\mu = 0$, оказывается отрицательным, а энергия P_0 — знаконеопределенной.

Как упоминалось выше, указанная трудность снимается при наложении дополнительных условий, которые в импульсном представлении (18) принимают вид

$$k^\nu U_\nu^\pm(\mathbf{k}) = 0, \quad k^\nu U_\nu^{*\pm}(\mathbf{k}) = 0. \quad (22)$$

В силу этих условий компоненты U_ν не являются более независимыми. Выражая с их помощью компоненты U_0^\pm через остальные:

$$U_0^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{k_0} k_n U_n^\pm(\mathbf{k}), \quad U_0^{*\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k_0} k_n U_n^{*\pm}(\mathbf{k}) \quad (n = 1, 2, 3),$$

получаем для квадратичной формы, входящей под знак интеграла в (19), следующее выражение, зависящее лишь от «пространственных» компонент потенциала:

$$-U_\nu^\pm U^{\mp,\nu} = \mathbf{U}(\mathbf{k}) \mathbf{U}^\mp(\mathbf{k}) - \frac{1}{k_0^2} (\mathbf{k} \mathbf{U}^\pm(\mathbf{k})) (\mathbf{k} \mathbf{U}^\mp(\mathbf{k})). \quad (23)$$

3.4. Локальный репер. Это выражение диагонализуется линейной подстановкой:

$$\mathbf{U}(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_1 a_1(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2 a_2(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \frac{k_0}{m} a_3(\mathbf{k}). \quad (24)$$

Здесь \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 суть единичные векторы, ортогональные волновому вектору \mathbf{k} и друг другу:

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

т. е. орты поперечной поляризации. Подстановка (24) представляет собой разложение векторного потенциала на продольную и поперечную составляющие по отношению к импульсу, т. е. переход к локальному реперу в импульсном пространстве. С помощью (24) получаем

$$-U_\nu^\pm(\mathbf{k}) U^{\mp,\nu}(\mathbf{k}) = \tilde{a}_n^\pm(\mathbf{k}) \tilde{a}_n^\mp(\mathbf{k}). \quad (25)$$

Внося это выражение в (19) и (20), приходим к диагональным выражениям для энергии-импульса и заряда, причем в новых