П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров группы экономических наук и экономическим специальностям подготовки дипломированных специалистов

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 330.105(075.8)
ББК 65.053
Б 86

Бочаров П. П., Касимов Ю. Ф. **Финансовая математика:** Учебник. — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 576 с. — ISBN 978-5-9221-0597-2.

Рассмотрены вопросы классической финансовой математики. Описаны математические методы финансирования операций, схемы этих моделей. Приведены две основные, чаще всего используемые на практике схемы простых и сложных процентов и связанные с ними основные проблемы: оценка доходности финансовых операций, ренты, преобразование и эквивалентность денежных потоков и т. д. Включены вопросы для самопроверки, упражнения и задачи.

Допущено Министерством образования РФ в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров группы экономических наук и экономическим специальностям подготовки дипломированных специалистов.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *М.С. Красс*,
доктор экономических наук, профессор *Ю.Н. Черемных*

ISBN 978-5-9221-0597-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Введение 11

Глава 1. **Базовые элементы финансовых моделей** 16

1.1. Временна́я и денежная шкалы 17

1.2. Финансовые события и денежные потоки 24

1.3. Финансовые операции. 43

1.4. Финансовые процессы и финансовые законы. 48

1.5. Финансовые схемы 66

1.6. Практическая реализация временно́й шкалы. Элементы финансовой хронологии 72

Вопросы и упражнения 85

Задачи 85

Глава 2. **Финансовый анализ кредитной сделки** 87

2.1. Описание и определяющие параметры кредитной сделки 87

2.2. Процент, процентная ставка, простые классы кредитных сделок . . 90

2.3. Дисконт, учетная ставка, простые дисконтные классы кредитных сделок 101

2.4. Краткосрочные долговые обязательства 107

Вопросы и упражнения 122

Задачи 123

Глава 3. **Простые проценты** 124

3.1. Формула простых процентов 124

3.2. Накопительные счета в схеме простых процентов: динамическая модель роста 125

3.3. Приведение денежных сумм в схеме простых процентов. 132

3.4. Стандартная схема простых процентов 137

Вопросы и упражнения 149

Задачи 150

Глава 4. **Модели с переменным капиталом в схеме простых процентов** . . . 151
4.1. Модель мультисчета в схеме простых процентов . . . 151
4.2. Бинарные модели . . . 157
Вопросы и упражнения . . . 177
Задачи . . . 178

Глава 5. **Обобщенные кредитные сделки и схемы погашения для простых процентов** . . . 179
5.1. Обобщенные кредитные сделки . . . 180
5.2. Регулярные схемы погашения долга для простых процентов . . . 184
5.3. Потребительский кредит . . . 190
5.4. Нормированные простые ставки обобщенных кредитных сделок. . . 195
Вопросы и упражнения . . . 200
Задачи . . . 200

Глава 6. **Потоки платежей в схеме простых процентов** . . . 202
6.1. Будущая стоимость потоков платежей . . . 203
6.2. Текущая стоимость потоков платежей . . . 209
6.3. Относительная приводимость и эквивалентность потоков платежей в схеме простых процентов . . . 217
6.4. Реструктуризация кредитных контрактов в схеме простых процентов . . . 225
Вопросы и упражнения . . . 230
Задачи . . . 230

Глава 7. **Модели с переменной ставкой и общая схема простых процентов** . . . 232
7.1. Изменчивость процентных ставок. Кривые доходности и временна́я структура процентных ставок. . . . 232
7.2. Дискретная модель в схеме простых процентов с переменной ставкой . . . 238
7.3. Общая схема простых процентов . . . 246
7.4. Непрерывные модели с переменным капиталом в схеме простых процентов . . . 251
7.5. Реинвестирование в схеме простых процентов . . . 255
Вопросы и упражнения . . . 256
Задачи . . . 257

Глава 8. **Сложные проценты** . . . 259
8.1. Формула сложных процентов для модели последовательных простых кредитных сделок . . . 259

8.2. Накопительная модель в схеме сложных процентов . . . 261
8.3. Расширение модели накопительного счета . . . 267
8.4. Номинальная и эффективная нормированные ставки . . . 269
8.5. Учетные ставки в схеме сложных процентов . . . 284
8.6. Эквивалентность ставок в схеме сложных процентов . . . 290
8.7. Эффективные ставки кредитных сделок и общее понятие ставки в схеме сложных процентов . . . 295
8.8. Будущая и текущая стоимости денежных сумм в схеме сложных процентов . . . 305
8.9. Стандартная схема сложных процентов . . . 309
8.10. Переменные процентные ставки . . . 317
Вопросы и упражнения . . . 320
Задачи . . . 321

Глава 9. **Обобщение модели роста** . . . 322
9.1. Интенсивность роста финансового процесса . . . 322
9.2. Функции роста . . . 329
Вопросы и упражнения . . . 338
Задачи . . . 338

Глава 10. **Модели с переменным капиталом и потоки платежей в схеме сложных процентов** . . . 339
10.1. Дискретная накопительная модель в схеме сложных процентов . . . 339
10.2. Временнáя стоимость потока на промежутке . . . 348
10.3. Уравнение динамики фонда с дискретным потоком . . . 352
10.4. Непрерывные потоки платежей и общее уравнение динамики фонда 355
Вопросы и упражнения . . . 367
Задачи . . . 367

Глава 11. **Преобразование и эквивалентность денежных потоков. Общая схема сложных процентов** . . . 369
11.1. Алгебра денежных потоков . . . 369
11.2. Эквивалентность потоков платежей . . . 376
11.3. Общая схема сложных процентов . . . 380
Вопросы и упражнения . . . 393
Задачи . . . 393

Глава 12. **Специальные классы потоков. Ренты** . . . 395
12.1. Стандартные ренты . . . 396
12.2. Нестандартные (p-кратные) ренты . . . 419
12.3. Монотонные ренты . . . 433

12.4. Непрерывные ренты 445
Вопросы и упражнения 452
Задачи 452

Глава 13. **Финансовые операции в схеме сложных процентов** 454
13.1. Погашение долга 455
13.2. Фонды погашения 475
13.3. Непрерывные схемы погашения 486
13.4. Пенсионные схемы 490
Вопросы и упражнения 500
Задачи 501

Глава 14. **Оценка доходности финансовых операций** 502
14.1. Доходность в простейшем случае 503
14.2. Доходность портфельных сделок 514
14.3. Связь доходностей портфеля и активов 521
14.4. Временна́я декомпозиция финансовых сделок и усреднение доходности 527
14.5. Внутренняя доходность финансовых операций 537
14.6. Критерии единственности внутренней доходности 551
14.7. Вычисление внутренней доходности 558
Вопросы и упражнения 566
Задачи 567

Приложение 569

Список литературы 573

Предисловие

Книга посвящена классической финансовой математике. Более точно, *детерминированным* моделям финансовых операций и процессов. Под детерминированностью понимается *полная определенность будущих* значений временны́х и финансовых характеристик изучаемых операций и процессов.

Такими моделями (при определенных условиях) описывается достаточно широкий класс финансовых операций. К ним относятся, прежде всего, так называемые *кредитные операции*. Поэтому классическую финансовую математику часто называют *математикой кредита* или, учитывая ту основополагающую роль, которую играют процент и процентная ставка в кредитных операциях, *теорией процентов*, *теорией процентных ставок* и т. п.

К основным темам, изучаемым в рамках традиционных курсов финансовой математики, относятся простые и сложные проценты, погашение долга, аннуитеты (ренты), расчеты, связанные с различными долговыми инструментами: векселями, облигациями, депозитными сертификатами и т. д., а также расчеты сделок с валютой. В последнее время к ним прибавился ряд тем из финансового менеджмента: анализ и оценка инвестиционных проектов, простейшие модели оценивания акций и др. При этом в руководствах с прикладной ориентацией изложение обычно носит преимущественно операциональный характер, т. е. результат выдается в виде готовой формулы, в которую достаточно подставить исходные данные, чтобы получить значение вычисляемой характеристики.

В отечественной и зарубежной литературе ([1, 3–6, 8–16, 20, 21, 24, 28, 29, 31–33) прикладные аспекты финансовой математики называются обычно «финансовые и коммерческие расчеты» (см. [28]), «финансовые вычисления» (см. [10]) и т. п. Следует заметить, что некоторые отечественные авторы вообще отождествляют понятия «финансовая математика» и «финансово-экономические расчеты» (см., например, предисловие к [21]).

Во введении будет более подробно обсужден термин «финансовая математика». Здесь коснемся только двух аспектов его использования.

Первый касается «широты» термина. До недавнего времени собственно вся финансовая математика сводилась к тому, что мы обозначили термином «классическая финансовая математика», т. е. к изучению детерминированных моделей. В последнее время в связи с серьезными достижениями современной финансовой теории существенно расширились как круг проблем, рассматриваемых в финансовой математике, так и методы их решения. Современная финансовая математика в значительной мере посвящена изучению *вероятностных* моделей, возникающих при анализе финансовых проблем в условиях *неопределенности и риска*. Именно в этом смысле употребляется термин «финансовая математика», например, в [25]. Решение таких проблем нуждается в более сложном математическом аппарате теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, в то время как классическая финансовая математика основана на использовании в основном элементарной алгебры и начал анализа.

Второй аспект касается «глубины» термина. Во многих книгах по финансовой математике говорится, что ее предметом является построение, анализ и применение математических моделей в финансовой теории и практике. Однако действительное описание таких моделей, а тем более тщательный и корректный их анализ дается далеко не всегда. Именно этот аспект дела, а не охват (широта) тем является, по мнению авторов, определяющим при использовании термина «финансовая математика».

Конечно, при первоначальном знакомстве с предметом вполне достаточно неформального изложения с упором на упоминавшийся выше операциональный подход. Но при систематическом изучении финансовой математики, особенно теми, чья будущая (или настоящая) профессиональная деятельность предполагает действительное владение методами финансового анализа, необходимо более глубокое усвоение концептуальных основ финансовой математики, ее методов и конструкций.

Более чем десятилетний опыт преподавания финансовой математики и смежных с ней дисциплин привел авторов к убеждению, что часто именно недостаточное усвоение ее базовых понятий и принципов, неумение пользоваться ими при решении конкретных проблем, а не незнание каких-либо формул является основной причиной трудностей и неудач при изучении финансовой математики. Именно поэтому достаточно полное и строгое (но без излишнего формализма) изложение финансовой математики как метода построения и анализа моделей финансовых операций и процессов было основной целью авторов книги.

Тот факт, что в книге рассмотрены лишь детерминированные модели, обусловлен не только невозможностью чрезмерного увеличения объема книги, но и дидактическими соображениями. Устранение неопределенности и риска позволяет ограничиться элементарными математическими средствами, сводящимися по существу к современному школьному курсу математики и началам вузовского курса высшей математики. Это делает книгу доступной широкому кругу читателей. Кроме того, использование относительно простых (в математическом отношении) средств позволяет дать более полное и тщательное изложение выбранных тем.

Кратко коснемся содержания книги и способа его изложения. В соответствии с названием книги (и сделанными выше замечаниями) в ней описываются математические модели финансовых операций, а также схемы этих моделей или *финансовые схемы*. Понятие финансовой схемы — одно из основных в книге. Финансовая схема — это математическая структура (см. [30]), лежащая в основе определенного класса финансовых моделей. Рассмотрены две основные, чаще всего используемые на практике схемы простых и сложных процентов.

Способ описания каждой из схем одинаков. Сначала анализируются простейшие модели в рамках заданной схемы, затем модели усложняются и, наконец, формулируется общая математическая структура этих моделей, т. е. соответствующая финансовая схема. Такой подход обеспечивает не только систематичность и единообразие изложения, но и способствует более глубокому усвоению изучаемого материала. Изучаемые модели при таком подходе воспринимаются не как разрозненные, хотя и в чем-то «похожие» объекты, а как имеющие внутреннее единство.

Строгое изложение материала сопровождается его неформальным, содержательным обсуждением. Особенно это касается тем, имеющих большое теоретическое или практическое значение. Используемый при представлении материала книги подход «от простого к сложному» облегчает ее чтение и позволяет строить на ее основе курсы различной степени сложности. В реализации такого подхода особенно важную роль играет первая глава, посвященная базовым элементам финансовых моделей, с помощью которых строятся эти модели (временна́я и денежная шкалы, финансовые события и потоки, формальное представление финансовых операций, а также связанные с ними отношения предпочтения и эквивалентности).

Ввиду чрезвычайно важной роли, которую играет фактор времени в финансах, отдельный параграф гл. 1 посвящен анализу различных временны́х правил, т. е. способов представления временны́х периодов (сроков) в заданной временно́й шкале. В нем приведено большинство правил, используемых в разных странах на различных сегментах финансового рынка.

Книга содержит практически весь традиционный материал, включаемый в большинство учебников по финансовой математике, финансовым и коммерческим расчетам и т. п. Кроме того, в нее включено довольно много новых тем, особенно в части, касающейся основных понятий финансовой математики (гл. 1), простых процентов (гл. 4, 6, 7). Ряд тем изложен более полно и систематично по сравнению с имеющимися руководствами. Это относится прежде всего к так называемым непрерывным моделям, моделям с переменным капиталом (гл. 4, 7, 9, 10) и технике эквивалентных преобразований финансовых потоков (гл. 11).

Книга содержит уточнения терминологического характера. Это касается прежде всего понятий процентной ставки и доходности финансовых сделок и ряда других. Кроме того, материал проиллюстрирован рисунками и примерами, служащими для приобретения практических навыков финансовых расчетов. Каждая глава завершается вопросами и упражнениями, а также задачами.

Как отмечалось, организация книги дает возможность построения курсов финансовой математики различного уровня сложности, ориентированных на различные категории слушателей (по цели обучения и по уровню подготовки). Можно предложить три варианта использования книги в этих целях.

Начальный курс (ориентированный на практиков) финансовых вычислений: § 1.1, 1.2; гл. 2; § 3.2, 8.1–8.8, 12.1, 12.2, 13.1, 13.2.

Стандартный курс финансовой математики для студентов экономических специальностей: § 1.1–1.4, 1.6; гл. 2; § 3.1–3.3; гл. 4, 5; § 6.1, 6.2; § 7.1, 7.2; гл. 8, 9; § 10.1, 10.2, 12.1–12.3; гл. 13 (кроме § 13.4); § 14.1–14.4.

«*Продвинутый*» *курс*, ориентированный на финансовых аналитиков и актуариев является расширением стандартного курса включением тем из остальных параграфов книги, прежде всего тех, которые имеют важное теоретическое значение: § 1.3, 1.4, 8.9, 8.10, 10.3, 10.4; гл. 11; 14.4–14.6.

Для сокращения записи для денежной единицы «рубль» в книге принято обозначение $\mathcal{R}$ (например, запись $\mathcal{R}100$ означает 100 руб.), а для обозначения доллара используется общепринятый символ \$.

Все расчеты для содержащих денежные единицы примеров выполнены с точностью до копеек (для рублей) или центов (для долларов). При этом для записи окончательного результата используется знак точного равенства. Аналогичное соглашение принято для процентов: в расчетах указываются лишь сотые доли процентов, но при этом пишется знак точного равенства.

Введение

Основная цель науки о финансах состоит в изучении того, как *экономические агенты* (лица и учреждения) распределяют ограниченные ресурсы *во времени*. Акцент именно на *временнóм*, а не на других видах распределения, изучаемых в экономике (по регионам, отраслям, предприятиям), является отличительной чертой финансовой науки. Решения, принимаемые лицами по поводу временнóго распределения ресурсов, представляют собой *финансовые решения*. С точки зрения лица или лиц, принимающих такие решения, распределяемые ресурсы относятся либо к *расходам* (затратам), либо к *доходам* (поступлениям). Финансовые решения основываются на соизмерении стоимостей потоков расходов и доходов. В термине *поток* отражается временнóй характер распределения средств. Проблемы, касающиеся временнóго распределения ресурсов (в самом широком смысле), являются *финансовыми проблемами*.

Поскольку решение финансовых проблем предполагает *соизмерение стоимостей затрат* (расходов) и *результатов* (доходов), то предполагается наличие некоторой общей меры для измерения стоимости (ценности) распределяемых ресурсов. На практике стоимость ресурсов (активов) измеряется в тех или иных *денежных единицах*. Но это только один аспект проблемы. Другой касается учета фактора *времени*. Если проблема *временнóго распределения* ресурсов — отличительная характеристика финансовых проблем, то финансовая теория должна давать средства для соизмерения ценностей, *относящихся к разным* моментам времени. Этот аспект проблемы имеет афористичное выражение «время — деньги». Рубль, доллар и т. д. сегодня и завтра имеют разные стоимости.

Кроме того, существует еще один чрезвычайно важный аспект. Во всех *реальных* финансовых проблемах, с которыми приходится сталкиваться на практике, присутствует *неопределенность*, касающаяся как величины *будущих* расходов и доходов, так и моментов времени, к которым они относятся. Именно тот факт, что финансовые проблемы связаны со временем, и обуславливает присущую им неопределенность. Говоря о неопределенности, имеем в виду, конечно, неопределенность *будущего*, а не прошлого. Неопределенность прошлого связана обычно (по крайней мере, в финансовых проблемах) с недостатком информации и в этом смысле, в принципе, устранима по мере накопления и уточнения данных, тогда как неопределенность будущего *принципиально* неустранима. Эта неопределенность, присущая финансовым проблемам, приводит к ситуации риска при их решении. *Любое решение* по поводу финансовых проблем в силу неопределенности *может* привести к результатам, отличающимся от *ожидаемых*, сколь бы тщательным и продуманным не было это решение.

Финансовая теория разрабатывает понятия и методы для решения финансовых проблем. Как и любая другая теория, она строит *модели* реальных *финансовых процессов*. Поскольку такие основные элементы, как время, стоимость, риск, а также критерии для выбора желаемого распределения ресурсов получают количественное выражение, то эти модели по необходимости носят характер *математических моделей*. Большинство моделей, изучаемых в современной финансовой теории, носят ярко выраженный математический характер. При этом математические средства, используемые для построения и анализа финансовых моделей, варьируются от элементарной алгебры до весьма сложных разделов случайных процессов, оптимального управления и др.

Хотя, как было сказано, неопределенность и риск — неотъемлемые характеристики финансовых проблем, в ряде случаев ими можно пренебречь либо в *силу стабильности условий*, в которых принимается решение, либо в идеализированных ситуациях, когда рассматриваемая модель в силу ее специфики игнорирует наличие тех или иных видов рисков. Финансовые модели такого рода называют моделями с *полной информацией*, детерминированными моделями и т. п. Изучение таких моделей важно по двум обстоятельствам.

Во-первых, в ряде случаев эти модели вполне пригодны для прямого использования. Это касается, например, большинства моделей классической финансовой математики, посвященной моделям простейших финансовых операций, таких как банковский депозит, вексельная сделка и т. п.

Во-вторых, одним из способов изучения моделей в условиях неопределенности является *моделирование* (см. [22]), т. е. анализ *возможных* будущих ситуаций или *сценариев*. Каждому сценарию соответствует некоторый, уже вполне определенный, будущий «ход событий». Анализ этого сценария осуществляется, естественно, в рамках детерминированной модели. Затем на основе проведенного анализа различных вариантов развития событий принимается *общее решение*. В этом смысле можно сказать, что изучение общих финансовых моделей основывается на использовании детерминированных моделей.

Предлагаемая книга посвящена детерминированным моделям, возникающим при решении специального класса финансовых проблем. Отсутствие фактора неопределенности приводит к тому, что главной проблемой при анализе таких моделей является разработка методов сопоставления стоимостей в различные моменты времени.

Выше уже отмечался математический характер финансовых моделей. Принципы построения математических моделей в финансах те же, что и в любых других науках. Не касаясь подробно этой темы и отсылая читателя к специальной литературе (см. [17, 22]), остановимся лишь на одном весьма важном моменте. Характеризуя математические модели, обычно говорят, что они являются *формализацией* содержательных неформальных моделей, имея в виду, что эти модели описываются с помощью *математического языка*. Безусловно, использование математического языка — это отличительная характеристика математических моделей. Однако далеко не самая важная. К сожалению, достаточно часто приходится сталкиваться просто «с игрой в символы», когда для различных понятий вводятся лишь их *символьные обозначения*, а вся модель сводится к набору бессодержательных «уравнений», выражающих некоторые «зависимости» между введенными переменными. Естественно, для этих зависимостей также придумываются специальные «функциональные» обозначения и т. п.

На самом деле, построение математических моделей сводится не к «лингвистическому переводу» с содержательного языка на математический, а к более глубокой и тонкой процедуре *сопоставления* содержательным объектам, понятиям и т. д. соответствующих им *математических объектов* и понятий. И дело здесь не ограничивается просто введением обозначений. Математические объекты: числа, множества чисел, функции, матрицы, операторы, случайные величины и т. д. — являются *вполне определенными* конструкциями. Для них определены различного рода операции и отношения. Они обладают определенными свойствами и т. д. Когда строится математическая модель финансовой операции, например, связанной с выбором инвестиционного портфеля, необходимо решить, какими математическими объектами (а не символами!) будут представлены все *существенные элементы* такой сделки? Как представляются активы? Что это: числа, функции или, быть может, случайные величины? Что такое портфель: *множество* или *вектор* активов? Что такое доходность и риск активов и портфеля: числа, функции, матрицы или что-нибудь еще? Вопрос «что это такое?» (в смысле: каков этот объект, какова его структура, какими свойствами он обладает) является основным в построении моделей. Кстати говоря, само развитие математики шло именно по этому пути. Туманные определения линии как «длины без ширины», функции как «зависимости переменных» постепенно были заменены *строгими* или, как говорят, формальными определениями как некоторых специальных конструкций из «элементарных кирпичиков», единственных *неопределяемых*, но *интуитивно* ясных понятий, на базе которых строится все здание математики.

Существование таких «элементарных кирпичиков» можно проследить в большинстве корректных моделей из различных областей науки. В книге также сделана попытка выделить такие «базовые элементы» финансовых моделей, с помощью которых можно строить другие более сложные модели. Они подробно рассматриваются в первой главе. Существенное использование в современной финансовой теории и практике математических методов и тот факт, что сами финансовые модели являются математизированными, приводит к тому, что совокупность таких моделей и математических средств для их построения и анализа называют *финансовой математикой* (в широком смысле). Таким образом, финансовая математика в таком ее понимании занимается построением и изучением математических моделей финансовых операций и процессов. При этом в ней выделяют различные разделы, обычно связанные с соответствующей предметной областью, например математика кредитных операций (теория процентов), математика инвестиций, математика производных финансовых инструментов, математика операций (актуарная математика) и т. п. В принципе, в таком подходе ничего плохого нет, однако возникает вопрос, является ли такая математика *на самом деле* математикой? Конечно, формула сложных процентов описывает модель «накопительного вклада» и ее можно в равной степени считать математической моделью некоторого финансового процесса или *финансовой моделью, выраженной математически*. Однако ни нахождение значения этой формулы для конкретных значений переменных, ни различные ее математические преобразования, вообще говоря, не являются, на наш взгляд, *математикой*. Это, конечно, применение математики, но не сама математика. Но существует ли тогда финансовая математика? Не является ли то, что под ней обычно подразумевают, просто применением математики, а реальное содержание ее сводится просто к набору *финансовых моделей*, хотя и математически представленным? Чем вообще занимается математика?

По мнению авторов, очень удачный ответ на этот вопрос содержится в статье известного отечественного математика М. М. Постникова [19]. Он основан на двух экспериментальных фактах, которые можно сформулировать в виде следующих утверждений.

1. Познание природы осуществляется с помощью моделей, т. е. *упрощенных* и *идеализированных* описаний окружающего мира.

Здесь модель понимается в самом широком смысле, включая и неформальное, словесное ее описание.

2. Рассматривая модели в различных науках, легко обнаружить группы чрезвычайно сходных моделей, и результаты, полученные для одной модели, могут быть применены в другой.

Для описания сходства моделей М. М. Постников предлагает использовать термин «схема». Тогда сходство моделей можно выразить утверждением, что эти модели имеют общую схему, или, что схожие модели — это модели, которые основываются на одной и той же схеме. Введение понятия схемы приводит к задаче изучения схем как таковых, безотносительно к их конкретному воплощению.

Используя понятие схемы, М. М. Постников дает следующее определение математики.

«Математикой называется наука, изучающая все возможные схемы, их взаимосвязи, методы их конструирования, иерархии схем и т. д. и т. п. Таким образом, математика не есть наука о моделях мира, а есть наука о схемах этих моделей».

Заметим, что М. М. Постников говорит о математике как о науке о любых схемах моделей, в том числе, схемах моделей из *разных* наук. Но, немного сужая это определение, можно говорить о математике данной науки, если ограничиться изучением схем лишь моделей, возникающих в этой науке. В таком смысле финансовую математику можно рассматривать как науку о схемах финансовых моделей.

Для того чтобы такая трактовка финансовой математики была достаточно продуктивной, нужно иметь такие схемы. И они есть. Даже в элементарной классической финансовой математике можно выделить, по крайней мере, две такие схемы. Это схемы простых и сложных процентов. Заметим, что очень важно, речь здесь идет не о *формулах* простых или сложных процентов, а именно о *схемах* финансовых моделей (которые в книге коротко названы *финансовыми схемами*), т. е. о схемах моделей, «основанных» на теории простых и сложных процентов.

Во введении нет смысла давать определение финансовой схемы, в частности, схем простых и сложных процентов. Первому понятию посвящена первая глава, а двум другим, по существу, вся книга.

В заключение заметим, что авторы не настаивают на использовании термина «финансовая математика» непременно в таком уточненном смысле. Цель состояла в объяснении авторской точки зрения на предмет и метод финансовой математики и вытекающий из нее принятый в книге способ изложения материала. В частности, этим же продиктован и выбор названия книги.

Глава 1

БАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФИНАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Основными элементами финансовых моделей являются *время* и *деньги*. В сущности, *финансовые модели* в той или иной мере отражают *количественные соотношения* между денежными суммами, относящимися к *различным моментам времени*. Тот факт, что со временем *стоимость* или, лучше сказать, *ценность* (value) денег *изменяется*, сейчас, благодаря постоянной инфляции, очевиден каждому. Рубль сегодня и рубль завтра, через неделю, месяц, год — это разные вещи. Возможно, менее очевидно, по крайней мере для не экономиста, что и при отсутствии инфляции фактор времени тем не менее влияет на ценность денег.

Допустим, что, обладая некоторой «свободной» суммой, вы решаете положить ее на срочный вклад в банк под определенный процент. Со временем сумма вашего счета в банке растет, и в конце срока при благоприятных условиях вы получаете бóльшую сумму, нежели та, что положили вначале. Вместо депозита в банке вы могли бы купить акции или облигации какой-либо компании, которые также могут принести вам по прошествии некоторого времени определенный доход. Таким образом, и в этом случае сумма, инвестируемая вначале, превращается в бóльшую сумму за некоторый промежуток времени. Конечно, вы можете ничего не предпринимать и просто хранить деньги дома или в сейфе в банке. В этом случае номинальное значение вашей суммы не изменится. Не изменится и реальная стоимость, если нет инфляции. В противном случае она, конечно, уменьшится. Однако обладая, по крайней мере в принципе, возможностью инвестировать и не делая этого, с точки зрения экономиста вы поступаете неразумно и несете, вполне *реальный* в *экономическом смысле* убыток. Этот убыток носит название *вмененных издержек* или *упущенной выгоды*. Таким образом, наивная точка зрения отличается от экономической. Считая (в отсутствии инфляции) сумму денег, хранящуюся в сейфе, не теряющей стоимости, вы, с точки зрения экономиста, ошибаетесь. И в этом случае ценность денег со временем также изменяется.

Конечно, «экономический» подход предполагает наличие каких-либо механизмов по «управлению стоимостью» денег. В современном обществе он реализуется наличием инвестиционного, в частности, финансового рынка. Банки, страховые компании, инвестиционные фонды, брокерские фирмы предоставляют широкий спектр активов, покупка которых ведет (часто, но не всегда) к увеличению стоимости вложенного капитала. Накопление стоимости инвестированного капитала задает «процесс преобразования» стоимости денег во времени. Так, рубль, инвестированный сегодня, превращается в два рубля через несколько лет, с другой стороны, будущие суммы имеют, с точки зрения текущего (сегодняшнего) момента, меньшую стоимость, хотя бы потому, что для получения их в будущем достаточно инвестировать сегодня меньшую сумму.

Подытоживая, можно сформулировать общий финансовый принцип, определяющий влияние времени на стоимость денег:

одна и та же сумма денег в различные моменты времени имеет различную ценность. С другой стороны, по отношению к определенным условиям, разные суммы денег в различные моменты времени могут быть равноценными в финансово-экономическом смысле.

Сказанное выше носит лишь качественный характер. Целью этой главы является *точное математическое описание* основных финансовых понятий или, как говорят, их *формализация*, на основе которой становится возможным дать математическое количественное представление сформулированного «принципа относительности» для денежных сумм, относящихся к различным моментам времени.

1.1. Временна́я и денежная шкалы

Временна́я шкала. Как было отмечено выше, *время* является одним из важнейших факторов в финансовых операциях и сделках. Для временно́й локализации денежных сумм необходимо указание *временно́й шкалы*, т. е. способа выделения отдельных моментов времени. Под временно́й шкалой понимается система *временных координат*, задание которых сводится к указанию:

- *начала отсчета*, т. е. начального момента времени, по отношению к которому задаются все остальные моменты времени;
- *единицы измерения*, т. е. *базового промежутка* или *единичного периода*, служащего для измерения длительности временных промежутков.

В экономике это обычно год, но может быть выбран любой другой промежуток: полугодие, квартал, месяц, неделя, день или даже час.

Выбор начала отсчета и базового (единичного) промежутка временно́й шкалы определяется, конечно, конкретными условиями, и они выбираются из соображений удобства, простоты и т. п. В принципе они могут быть произвольными. Временная шкала допускает наглядное представление в виде *линии времени*, т. е. прямой линии с отмеченной начальной точкой и отмеченными моментами времени, связанными с базовым промежутком (рис. 1.1).

На временно́й шкале (рис. 1.1) точка 0 соответствует начальному моменту времени. Обычно она интерпретируется как *текущий* (*на-

стоящий) момент, т. е. сейчас. Точка с координатой 1 соответствует концу базового промежутка с началом в точке 0. Так, если базовый промежуток — год, то это момент времени год спустя; далее идут: конец второго периода, третьего и т. д., т. е. для годового базового промежутка это конец второго, третьего и т. д. годов. Точки с координатами $-1, -2, -3$ и т. д. соответствуют предыдущим, т. е. прошлым (по отношению к началу), моментам времени. Так, точка -2 соответствует началу позапрошлого года.

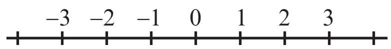

Рис. 1.1

Шкалу, состоящую из дискретного набора моментов времени, называют *дискретной*. Выбрав базовый период и начало шкалы, ее можно отождествить с множеством целых чисел $\mathbf{Z}$. Во многих случаях модели финансовых процессов рассматриваются непосредственно в дискретной шкале.

На рис. 1.1 отмечены лишь моменты времени, соответствующие целым кратным базового периода. Можно, конечно, рассматривать и промежуточные моменты времени, например, год и 2 недели для годового базового промежутка. Поскольку время обладает свойством непрерывности, то временна́я шкала также является *непрерывной*, т. е. моменты времени, точнее, их координаты, могут представляться *любыми вещественными* (действительными) *числами*.

Заметим, что хотя в теории финансов обычно используется непрерывная шкала времени, на практике обычно ограничиваются *дискретной шкалой*, связанной с естественными календарными промежутками (см. § 1.4), например, годами, месяцами и т. п.

Временную шкалу обозначим символом $\mathbf{T}$, а отдельные моменты времени буквой t или буквой с индексами $t_1, t_2, \ldots$ и т. д. (рис. 1.2).

Любые два момента времени t_1, t_2 обладают определенным взаимным расположением. Если момент t_1 предшествует моменту t_2, то этот факт математически выражается неравенством $t_1 < t_2$. В противном случае t_1 следует за t_2 или совпадает с ним. Это равносильно неравенству $t_1 \geqslant t_2$.

Любые два различных момента t_1, t_2 определяют промежуток (отрезок, интервал) времени с концами, соответствующими этим моментам времени (см. рис. 1.2). *Длина* этого промежутка T определяется координатами концов: $T = |t_2 - t_1|$. Здесь $|a|$ — модуль (абсолютная величина) числа a. В случае, когда $t_1 < t_2$, длина T промежутка с концами в t_1 и t_2 равна $T = t_2 - t_1$.

Рис. 1.2

В математике рассматривают различные типы промежутков в зависимости от того, включаются или нет его концы в этот промежуток. Традиционные обозначения $[t_1, t_2], (t_1, t_2), [t_1, t_2), (t_1, t_2]$ хорошо известны. Первые два промежутка называются соответственно *отрезком* и *интервалом*.

В дальнейшем при построении математических моделей финансовых сделок, операций, процессов и т. д. мы будем фиксировать выбранную временну́ю шкалу. На практике это обычно *годовая шкала*, *конкретная реализация* которой зависит от выбранных временны́х правил (см. § 1.6). Но основные характеристики изучаемых финансовых моделей не будут зависеть от выбора той или иной шкалы. Часто в практических вопросах приходится переходить от одной временно́й шкалы к другой, например, от годовой к месячной, квартальной или наоборот. При этом возникает вопрос о соотношении (связи) временны́х координат этих шкал.

Пусть, например, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'$ две шкалы, временны́е координаты которых обозначим через t и t' соответственно. Пусть начало отсчета шкалы $\mathbf{T}'$ имеет координату τ_0 в шкале $\mathbf{T}$, а длина базового периода шкалы $\mathbf{T}'$ имеет длину k в единицах шкалы $\mathbf{T}$. Тогда между координатами t и t' этих шкал существует простое соотношение

$$t = \tau_0 + kt'.$$

В частности, если начала отсчетов обеих шкал совпадают, то $\tau_0 = 0$ и, следовательно, получим

$$t = kt'.$$

Например, если t — координата годовой, а t' — координата месячной шкалы, то $k = 1/12$ и, значит, при совпадении начал отсчетов получим хорошо известное равенство

$$t_{\text{год}} = \frac{t'_{\text{мес}}}{12}.$$

Наконец, длины T и T' любого промежутка в шкалах $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'$ соответственно связаны как

$$T = kT'.$$

Денежная шкала. В финансовой теории и практике приходится постоянно говорить о различных денежных суммах или о стоимости, цене финансовых активов. Эти величины измеряются в определенных *денежных единицах*. Задание фиксированной денежной единицы определяет *денежную шкалу*. Денежная единица — основной элемент *национальной денежной системы*. Так, можно говорить о таких единицах, как рубль, доллар, немецкая марка и т. п. Конкретное значение денежной суммы, стоимости, цены представляется числом относительно данной денежной единицы. В этом смысле можно говорить о 500 тыс. руб. ($\mathcal{R}$500 000) или 1 тыс. долл. (\$1000) и т. д.

Значения денежных сумм — также своеобразные «денежные координаты». Однако денежная шкала отличается от временно́й двумя особенностями. Во-первых, денежная шкала по определению дискретна, поскольку каждая денежная система предполагает минимальную денежную единицу, доли которой не имеют естественного значения; во-вторых, сама по себе денежная шкала предполагает лишь положительные значения. Сумма, выраженная отрицательными числами, не имеет непосредственного значения. Однако в описании различных финансовых сделок денежные суммы играют разную роль по отношению к различным участникам сделки. Так, то, что для одного — доход, для другого — расход; один дает, а другой берет деньги в долг; один покупает, а другой продает и т. д. Для выражения этого обстоятельства на практике используют и отрицательные значения для сумм, стоимостей и т. п. Обычно в ситуациях, *рассматриваемых по отношению к одной из сторон*, участвующих в сделке, эти отрицательные значения трактуются как расход, долг, уменьшение фондов, покупки и т. п. Конечно, все определяется конкретными условиями и способом описания сделки. Хотя в принципе можно было бы обойтись и без отрицательных значений для сумм, их использование существенно упрощает описание финансовых операций. Денежную шкалу мы будем отмечать символом $\mathbf{M}$.

Замечание. Различие по поводу дискретности денежной и непрерывности временно́й шкал не стоит абсолютизировать. С одной стороны, на практике моменты времени и промежутки измеряются лишь с определенной точностью, скажем, до дня или недели. Иногда, когда речь идет о таком очень динамичном рынке, как рынок валюты или биржевой рынок акций, могут играть роль и минуты, и даже доли минут. Но в любом случае обычно имеется естественный предел в длительности реально значимых промежутков времени, и меньшие промежутки просто игнорируются, так что в этом смысле временна́я шкала практически дискретна, и все моменты и промежутки при выборе подходящей единицы времени могут считаться целочисленными (целое число минут, дней и т. п.). С другой стороны, денежную шкалу можно рассматривать практически непрерывной, если в качестве единицы взять «достаточно большую» величину. Так, сумма в $\mathcal{R}2{,}1356$ бессмысленна, однако, ее числовое значение становится осмысленным, если в качестве единицы взять 1 млрд руб. □

В выборе денежной шкалы учитываются два обстоятельства. При описании финансовых сделок, контрактов и т. п. внутри данной страны, т. е. в рамках национальной денежной системы произвол сводится к выбору *единицы* денежной шкалы. При этом переход от одной единицы к другой (например, от рубля к копейкам, от долларов к центам и т. п.) сводится к умножению исходной денежной суммы на некоторую константу. Более того, если $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — две базисные денежные единицы денежной шкалы и

$$\mathbf{e} = l\mathbf{e}',$$

то для любой денежной суммы, выражающейся значениями m и m' в этих базисах соответственно, справедливо соотношение

$$m'\mathbf{e}' = m\mathbf{e}$$

или

$$m'\mathbf{e}' = ml\mathbf{e}',$$

откуда

$$m' = ml.$$

Например, при переходе от рублей к копейкам имеем базисное соотношение

$$\mathcal{R}1 = 100 \text{ коп.},$$

и переход от рублей к копейкам означает умножение суммы в рублях на 100.

Другой вид преобразования денежных сумм, связанный с выбором денежной шкалы, имеет место в *мультивалютных сделках*. Так, в экспортно-импортных операциях постоянно приходится переходить от сумм, выраженных в национальных денежных единицах, к «эквивалентным» суммам, выраженным в иностранной валюте, и обратно. Существенное отличие этого случая от рассмотренного выше заключается в отсутствии фиксированного (т. е. независящего от времени) соотношения между единицами различных валют. Это наиболее типичная ситуация. В некоторых случаях такие соотношения (обменные курсы) могут фиксироваться на государственном уровне специальными соглашениями, но даже в таких случаях, как правило, существует свободный рынок этих валют, на котором устанавливаются их *рыночные* курсы, причем последние могут существенно отличаться от установленных.

В общем случае задача о переходе от одной денежной шкалы $\mathbf{M}$ к другой шкале $\mathbf{M}'$ решается в принципе так же, как и выше, различие состоит лишь в том, что коэффициент перехода l в базисном соотношении

$$\mathbf{e} = l\mathbf{e}'$$

зависит от времени: $l = l(t) = l_t$, т. е.

$$\mathbf{e} = l_t\mathbf{e}'.$$

Коэффициент l_t, представляющий стоимость единицы $\mathbf{e}$ шкалы $\mathbf{M}$ в единицах $\mathbf{e}'$ шкалы $\mathbf{M}'$ в момент t, называется (текущим) *обменным курсом* (exchange rate) валюты $\mathbf{e}$ или *котировкой* валюты $\mathbf{e}$ *относительно* валюты $\mathbf{e}'$. Если $\mathbf{e}'$ — единица *национальной* валюты, а $\mathbf{e}$ — единица иностранной валюты, то такая котировка называется *прямой*, т. е. в этом случае единица иностранной валюты выражается непосредственно в единицах национальной валюты. В противоположном случае, когда стоимость единицы национальной валюты выражается в единицах иностранной валюты, соответствующая котировка называется *обратной*.

Естественно, что термины «прямая» и «обратная» котировки имеют смысл лишь относительно выбранной *национальной* валюты. На международных финансовых рынках вместо национальной валюты говорят о выбранной *основной*, *базовой* или *расчетной* валюте. Тогда котировки всех остальных валют относительно базовой называются прямыми котировками этих валют, а котировка базовой относительно данной валюты называется обратной котировкой данной валюты.

Задание обменного курса (котировки) l_t позволяет преобразовывать значения денежных сумм из различных шкал. Так, сумме S, заданной в единицах $\mathbf{e}$ шкалы $\mathbf{M}$, соответствует в шкале $\mathbf{M}'$ (в момент t) значение

$$S'_t = l_t S.$$

Например, если $\mathbf{M}$ — долларовая, а $\mathbf{M}'$ — рублевая шкалы, и текущий обменный курс

$$\$1 = \mathcal{R}25,$$

то $\$50$ соответствует $\mathcal{R}1250$ по текущему курсу. Естественно, можно находить и обратное соответствие. Так, сумме $\mathcal{R}500$ соответствует $\$20$.

Основные типы финансовых величин. Пожалуй, одним из важнейших обстоятельств, которое часто упускают из вида, является то, что цены, курсы, стоимости, доходы всегда имеют определенную *временну́ю привязку*. Они относятся либо к *моментам времени*, например, курс ценной бумаги, либо к *временны́м промежуткам*, например, дивиденды или проценты. В соответствии с этим все величины в финансовой математике (да и вообще в экономике) можно разделить на два класса.

Первый класс составляют величины, относящиеся к *моментам времени*. Они являются функциями времени, т. е. изменяются с течением времени. Их называют *мгновенными величинами* (или *переменными состояниями*). В англоязычной литературе — stock variables, т. е. *переменные запаса*. Эти величины представляют мгновенное значение различных финансовых характеристик, таких как стоимость, цена, курс. Все *балансовые показатели* относятся к величинам этого вида.

Второй класс составляют величины (переменные), которые естественным образом связаны с *промежутками*, *периодами времени*. Их называют *интервальными величинами*. В англоязычной литературе — flow variables, т. е. *переменные потока*. Так, годовой доход, прибыль, доходность, процентная ставка — примеры величин этого класса. В частности, большое семейство величин этого класса составляют характеристики, показывающие изменение мгновенных величин (т. е. величин первого класса) за определенный промежуток времени. Приращение стоимости активов какого-либо фонда за год является также примером интервальных величин.

Между величинами указанных классов не всегда удается провести четкую грань. Рассмотрим, например, дивиденды, выплачиваемые по обыкновенным акциям. Конкретно очередная выплата дивидендов осуществляется в *определенный момент времени*. Для отдельного акционера это может быть моментом перечисления дивидендов на его счет в банке или брокерской конторе. Поэтому на первый взгляд эта сумма относится к моменту времени. Однако *экономический смысл* дивидендов как доли прибыли, полученной предприятием за определенный *промежуток* времени, например за год, ясно указывает на то, что эта величина является функцией именно промежутка, а не момента времени. Так, бессмысленно говорить о том, какова величина дивидендов на данную конкретную дату: сегодня, завтра, через год. Однако можно говорить о величине дивидендов за год, два, три и т. д. С другой стороны, не имеет смысла говорить о цене акции за год, два года и т. п. Можно говорить об изменении цены или средней цене за эти промежутки, но это уже интервальные, а не мгновенные характеристики.

Из отмеченного выше различия между мгновенными и интервальными величинами следует различный способ их математического представления. Так как величина первого типа есть функция времени, то обычно этот факт записывают в виде $S(t)$ или S_t, где $S(t)$ (или S_t) — значение в момент времени t некоторой величины S, например, стоимости актива. Часто можно рассматривать всевозможные значения $S(t)$ при различных t из некоторого промежутка. Наглядно эта ситуация изображается графиком $S(t)$ как функции от t (рис. 1.3). Здесь горизонтальная ось (ось абсцисс) есть временна́я шкала, а вертикальная ось (ось ординат) есть шкала значений величины S, например, денежная шкала.

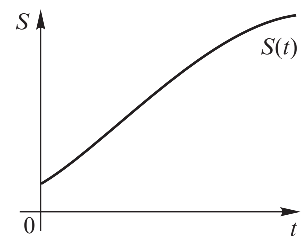

Рис. 1.3

Величины второго класса являются функциями промежутка, и поэтому для их определения необходимо задавать промежуток времени. Это можно сделать, используя стандартное обозначение для промежутков $[t_1, t_2]$ или (t_1, t_2) и т. п. Так, значение величины R второго класса для промежутка (отрезка) $[t_1, t_2]$ можно записать в виде $R([t_1, t_2])$, а для промежутка $(t_1, t_2]$ соответственно $R((t_1, t_2])$. Если тип промежутка несуществен, то можно написать просто $R(t_1, t_2)$.

Иногда эта величина зависит не от положения концов промежутка, а только от его длины $T = t_2 - t_1$ при $t_1 < t_2$. В этом случае вместо приведенных выше обозначений используют обозначения вида $R(T)$ или R_T.

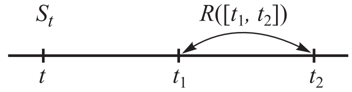

Рис. 1.4

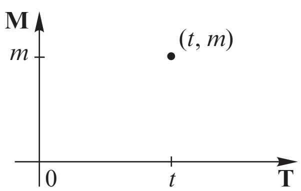

Рис. 1.5

Наглядно величины обоих классов можно изображать с помощью *временны́х диаграмм*. Например, конкретное значение величины S в момент времени t, а также $R([t_1, t_2])$, можно изобразить, как это сделано на рис. 1.4. Временна́я $\mathbf{T}$ и денежная $\mathbf{M}$ шкалы вместе порождают финансовую *систему координат*, которую называют *финансовым пространством* или *плоскостью время–деньги*. Формально финансовое пространство есть просто декартово произведение

$$\mathbf{T} \times \mathbf{M} = \{(t, m) \mid t \in \mathbf{T},\ m \in \mathbf{M}\},$$

которое состоит из возможных пар вида (t, m), где t — временна́я, а m — денежная компоненты (координаты) этой пары (или точки). Наглядно финансовое пространство или плоскость время–деньги имеют вид обычной координатной плоскости, где по оси абсцисс отмечаются моменты времени, а по оси ординат — денежные суммы (рис. 1.5).

1.2. Финансовые события и денежные потоки

Финансовые события и платежи. Введем теперь два понятия, которые образуют своеобразный мостик между финансовыми величинами двух классов, определенными в предыдущем параграфе. Речь идет о финансовых событиях и финансовых (денежных) потоках.

В финансовой математике, как мы уже упоминали ранее, сопоставляются денежные суммы и моменты (или промежутки) времени, к которым они относятся.

Определение 1.1. Пара (t, C), состоящая из момента времени t и значения суммы C, называется мгновенным *финансовым событием* или событием 1-го рода. Мгновенные события будем называть просто событиями.

Финансовое событие наглядно изображается либо отмеченной точкой на временно́й диаграмме, либо точкой на плоскости время–деньги (см. рис. 1.5).

Финансовое событие может иметь различную интерпретацию. Так, это может быть просто указание стоимости актива в данный момент времени. Но это может быть и взнос (вклад, поступление) на счет или в фонд в некоторый момент t определенной суммы C. Это может быть также выплата (изъятие) со счета или фонда некоторой определенной суммы в момент времени t. В первом случае значения C обычно записываются положительными, а во втором случае — отрицательными числами.

Определенные выше события (1-го рода) являются формальным представлением мгновенных финансовых величин. Интервальные финансовые величины представляются событиями 2-го рода.

Определение 1.2. Пара (J, C), где $J \subseteq \mathbf{T}$ — некоторый временно́й промежуток, а $C \in \mathbf{M}$ — денежная сумма, называется интервальным событием или событием 2-го рода.

На временно́й диаграмме интервальное событие изображается как на рис. 1.6.

Хотя мы определили два вида финансовых событий, соответствующих двум типам финансовых величин, на практике во многих случаях, как, в частности, отмечалось в примере с выплатой дивидендов, можно обойтись событиями 1-го рода. Так обычно и поступают. Для этого используют преобразование интервального платежа в мгновенный платеж:

$$(J, C) \longmapsto (\tau, C).$$

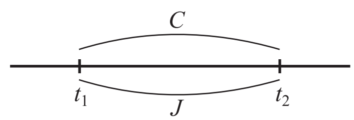

Рис. 1.6

В простейшем случае величина платежа не меняется, а преобразование заключается в выборе момента τ *актуализации* этого платежа. На практике чаще всего используются два правила актуализации интервального платежа (J, C), где J — промежуток с концами t_1, t_2. В первом случае платеж C осуществляется в *начале* промежутка, т. е. $\tau = t_1$. Такая схема актуализации называется *авансированием* (рис. 1.7 *а*). Во втором случае платеж C осуществляется в конце промежутка, т. е. $\tau = t_2$. Эта схема называется *финализацией* (рис. 1.7 *б*).

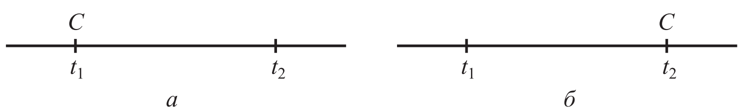

Рис. 1.7

Актуализация задает способ преобразования событий 2-го рода в события 1-го рода. Имеется еще один вид связи между такими «разнородными» событиями, состоящий в преобразовании событий 1-го рода в события 2-го рода. Речь идет об операторе *изменения* мгновенной величины за некоторый промежуток времени $J = [t_1, t_2]$. Если нам известны два события (t_1, S_1), (t_2, S_2) (1-го рода), соответствующие состояниям мгновенной величины в моменты t_1, t_2, то можно определить событие 2-го рода (J, C), где $C = \Delta_J S = S(t_2) - S(t_1)$ — изменение величины S на промежутке J.

Финансовые потоки. На практике изолированные события рассматриваются редко. В большинстве случаев в финансовой сделке участвует не одно, а множество событий.

Определение 1.3. Последовательность

$$\{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}, \quad n \leqslant \infty,$$

финансовых событий называется (дискретным) *финансовым* или *денежным потоком* 1*-го рода* и обозначается символом CF (от англ. cash flow).

При $n < \infty$ — это *конечный* (дискретный) финансовый поток. В финансовой литературе рассматривают также и случай $n = \infty$, т. е. *бесконечные* (дискретные) потоки, например, так называемые *вечные ренты*.

Так, открытию счета на $\mathcal{R}1000$ и последующему снятию с него в конце 1-го и 2-го годов соответственно $\mathcal{R}400$ и $\mathcal{R}300$ соответствует финансовый поток

$$CF = \{(0{,}1000), (1, -400), (2, -300)\}.$$

Денежный поток наглядно изображается либо последовательностью отмеченных точек на временно́й шкале (рис. 1.8 *а*), либо точками на координатной плоскости (рис. 1.8 *б*). Изображения финансовых собы-

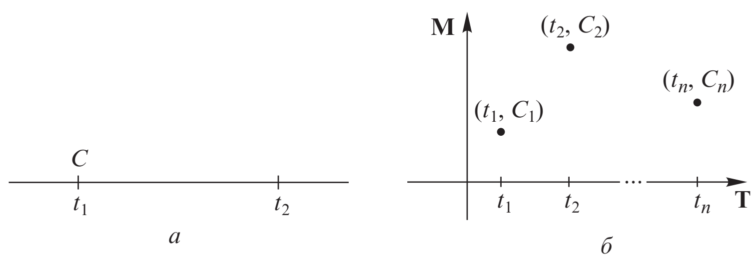

Рис. 1.8

тий и потоков на временно́й шкале называют обычно *временны́ми диаграммами*, а их изображения на плоскости — *графиками*.

Естественным образом определяются умножение финансового потока на некоторое число и сумма (объединение) двух финансовых потоков. Так, под результатом умножения финансового потока

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}$$

на число α понимается поток

$$\alpha CF = \{(t_1, \alpha C_1), (t_2, \alpha C_2), \ldots, (t_n, \alpha C_n)\}.$$

В свою очередь, результатом суммирования потоков CF_1 и CF_2 является поток $CF_1 + CF_2$, состоящий из всех финансовых событий $(t_j^{(1)}, C_j^{(1)})$ и $(t_k^{(2)}, C_k^{(2)})$, входящих в потоки CF_1 и CF_2 соответственно, для которых моменты $t_j^{(1)}$ и $t_k^{(2)}$ различны, а также событий $(t_j, C_j^{(1)} + C_j^{(2)})$ при $t_j^{(1)} = t_k^{(2)} = t_j$. В последнем случае, если в результате сложения сумм имеем, что $C_j^{(1)} + C_j^{(2)} = 0$, то событие $(t_j, 0)$ можно не включать в результирующий поток.

Моменты времени t_j, для которых имеют место ненулевые платежи, назовем *критическими моментами*. Таким образом, если t_j — критический момент, то в финансовом событии (t_j, C_j) должно выполняться условие $C_j \neq 0$.

Пример 1.1. Для финансовых потоков событий

$$CF_1 = \{(0,100), (2,-200), (3,400), (5,100), (6,-300)\}$$

и

$$CF_2 = \{(2,400), (4,700), (5,-150), (6,650), (7,800)\}$$

найти финансовый поток $2CF_1 + CF_2$.

Решение. Прежде всего выпишем поток $2CF_1$:

$$2CF_1 = \{(0,200), (2,-400), (3,800), (5,200), (6,-600)\}.$$

Тогда для потока $2CF_1 + CF_2$ окончательно получаем

$$2CF_1 + CF_2 = \{(0,200), (3,800), (4,700), (5,50), (6,50), (7,800)\},$$

при этом событие (2,0) опускается, так как моменту времени $t = 2$ реально никакого финансового значения не приписано. ■

Заметим, что в финансовой математике дискретный денежный поток часто описывают не последовательностью $\{(t_k, C_k)\}_{k=1}^{n}$, составляющих этот поток событий, а его *денежной* или *платежной функцией* $C_{CF} = C(t)$:

$$C : \mathbf{T} \to \mathbf{M}, \quad t \mapsto C(t),$$

определенной *на всей* временно́й шкале. При этом функция $C(t)$ равна нулю во всех точках, кроме критических, в которых она, естественно, совпадает с суммами C_k, связанными с событиями, т. е.

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq t_k, \\ C_k, & \text{если } t = t_k. \end{cases}$$

Функции такого рода принято называть *финитными* (для конечных потоков), поскольку они отличны от нуля лишь в конечном числе точек. Множество всех точек (моментов), в которых денежная функция потока отлична от нуля, называется его *носителем* и обозначается $\operatorname{supp} CF$:

$$\operatorname{supp} CF = \{t \in \mathbf{T} \mid C(t) \neq 0\} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}.$$

С помощью денежных функций легко определяются алгебраические операции над потоками. Пусть, например, $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — денежные функции потоков CF_1 и CF_2 соответственно. Тогда для потока CF, являющегося суммой

$$CF = CF_1 + CF_2$$

этих потоков, денежная функция $C(t)$ определяется равенством

$$C(t) = C_1(t) + C_2(t).$$

Аналогично денежная функция $\widetilde{C}(t)$ потока λCF, полученного умножением потока CF на число λ, есть произведение денежной функции $C(t)$ потока CF на это число:

$$\widetilde{C}(t) = \lambda C(t).$$

Согласно данному выше определению потока, его события относятся к определенным моментам времени. Рассмотрим упоминавшуюся выше выплату дивидендов по акциям (или процентов по облигациям). Последовательность ежегодных выплат дивидендов можно также описать денежным потоком. Но дивиденды по своему содержанию являются выплатами за период, например, за год. Поэтому с формальной точки зрения следовало бы определить еще один вид потоков, состоящий из платежей за период.

Определение 1.4. *Интервальным финансовым потоком* или *денежным потоком 2-го рода* называется последовательность событий 2-го рода

$$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), (J_2, C_2), \ldots, (J_n, C_n)\},$$

где $J_1, J_2, \ldots, J_n$ — попарно непересекающиеся промежутки времени.

На временно́й диаграмме (рис. 1.9) приведена графическая иллюстрация денежного потока 2-го рода.

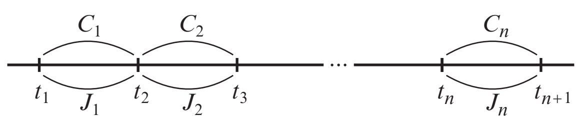

Рис. 1.9

Определенная выше операция актуализации событий 2-го рода легко переносится и на потоки. Применяя ее к каждому событию, из потока 2-го рода, получим поток 1-го рода, т. е. обычный поток событий. Хотя в принципе выбор конкретной схемы актуализации (авансирования или финализации) может быть различным для различных событий, на практике обычно используют «единообразную» схему актуализации: либо авансирование для всех событий, либо финализация также для всех событий потока 2-го рода.

Таким образом, в первом случае интервальный поток $\overline{CF}$ превратится в *авансированный* (относительно последовательности промежутков J_k) поток событий

$$CF^a = \{(t_0, C_1), (t_1, C_2), \ldots, (t_{n-1}, C_n)\},$$

а во втором — *финализированный* поток

$$CF^f = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}.$$

Оператор авансирования будем обозначать через Adv, а оператор финализации через Fin . Тогда

$$CF^a = \mathrm{Adv}(CF),$$
$$CF^f = \mathrm{Fin}(CF).$$

Пример 1.2. Для потока 2-го рода (рис. 1.10) найти соответствующие этому потоку авансированный и финализированный потоки событий.

Решение. Авансирование потока $\overline{CF}$ дает поток

$$CF^a = \mathrm{Adv}(\overline{CF}) = \{(0{,}100), (1{,}200), (2{,}300)\}.$$

Его диаграмма приведена на рис. 1.11.

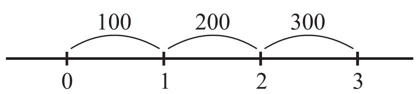

Рис. 1.10

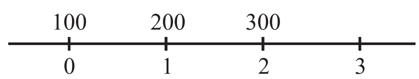

Рис. 1.11

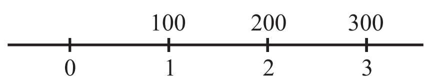

Рис. 1.12

Финализация потока $\overline{CF}$ дает поток

$$CF^f = \mathrm{Fin}(\overline{CF}) = \{(1, 100), (2, 200), (3, 300)\},$$

диаграмма которого показана на рис. 1.12. ■

Можно также рассматривать преобразование потоков 1-го рода в потоки 2-го рода. Один из общих подходов к такому преобразованию будет описан ниже, а здесь рассмотрим преобразование потоков, связанное с понятием изменения мгновенной величины. Пусть

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}$$

— поток событий, представляющий собой последовательность состояний некоторой мгновенной величины. Тогда ему соответствует поток 2-го рода

$$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), (J_2, C_2), \ldots, (J_n, C_n)\},$$

где $J_k = [t_k, t_{k+1}]$, а $C_k = \Delta S_k = S(t_{k+1}) - S(t_k)$ — изменение S на промежутке J_k.

Описанные операции чаще всего используются в теории рент, являющихся примерами так называемых *регулярных потоков платежей*.

Ренты. Регулярные потоки платежей естественным образом появляются во многих финансовых контрактах, сделках и операциях. Выплаты процентов по облигациям или по вкладу, выплата дивидендов акционерам, выплата пенсий участнику пенсионной схемы — все это примеры регулярных потоков платежей. В понятии регулярности потока есть два аспекта: временно́й и финансовый. Временно́й аспект связан с *регулярностью моментов осуществления платежей*, например, платежи осуществляются в конце каждого месяца, квартала или года. Финансовый аспект связан с некоторой закономерностью в размерах самих платежей, например, все платежи одинаковы, платежи монотонно растут на заданную величину или увеличиваются в заданное число раз, или, наоборот, уменьшаются и т. п.

Обычно потоки платежей, обладающие регулярностью платежей как по времени, так по величине, называют *рентами*. По своему смыслу рентные платежи, как отмечалось выше, являются интервальными величинами, поскольку относятся к периодам, а не моментам времени. Поэтому *рента* — это *регулярный поток платежей второго рода*. Выше было показано, как этот поток превращается в обычный поток платежей (поток 1-го рода или поток событий), который также называется рентой. Поскольку ренты играют очень важную роль в финансовом анализе, рассмотрим их более подробно. Начнем с определения.

Определение 1.5. *Рентой* называется интервальный поток (поток 2-го рода)

$$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), \ldots, (J_n, C_n), \ldots\}$$

с последовательностью смежных промежутков

$$J_1, \ldots, J_k, \ldots, J_n, \ldots,$$

называемых *периодами ренты*, одинаковой длины:

$$|J_1| = |J_2| = \ldots = |J_n| = \ldots = h.$$

Число h называется (*числовым*) *периодом ренты*. Концы

$$t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_n, \ldots$$

промежутков

$$J_k = (t_{k-1}, t_k)$$

называются (*критическими*) *моментами ренты*. Они образуют арифметическую прогрессию: $t_n = t_0 + n \cdot h$, $n = 0, 1, \ldots$ Момент t_0 называется *началом* ренты. Если рента имеет конечное число промежутков J_k (или платежей), то она называется *срочной*, в противном случае — *бессрочной* или *вечной*. Конец t_n последнего промежутка J_n срочной ренты называется *концом* ренты. Число $T = t_n - t_0$ называется *горизонтом* (*шириной*) ренты.

Некоторые платежи ренты могут быть нулевыми. Периоды, которым соответствуют *ненулевые* платежи, называются *платежными*, остальные периоды — *нулевыми* (*пустыми*). Число платежных периодов называется *сроком* ренты.

Начало первого платежного периода ренты называется *эффективным началом*, а конец последнего платежного периода — *эффективным концом* ренты.

Таким образом, начало и эффективное начало ренты могут не совпадать. При совпадении рента называется *немедленной*, в противном случае — *отложенной* (или *отсроченной*). Если конец и эффективный конец ренты совпадают, то рента называется *завершенной*, в противном случае — *незавершенной*. На рис. 1.13 изображены диаграммы отложенной (*а*) и незавершенной (*б*) рент.

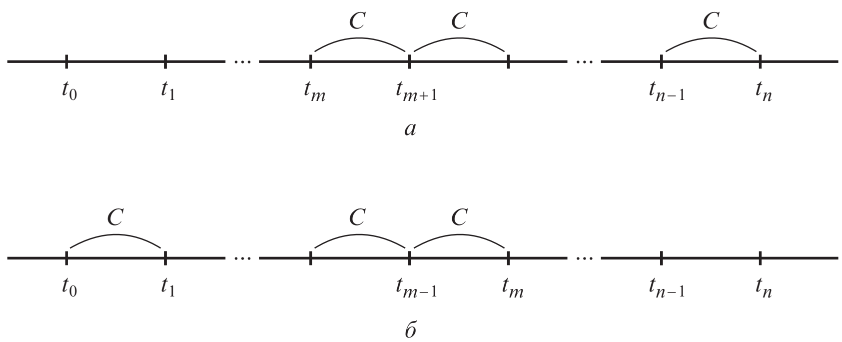

Рис. 1.13

Если все *ненулевые* платежи ренты равны, то рента называется *постоянной*. Если платежи ренты монотонно растут, то рента называется *возрастающей*, если монотонно убывают, то — *убывающей*; и в том, и в другом случаях рента называется *монотонной*. По характеру монотонности (убывания/возрастания) ренты делятся на *арифметические* и *геометрические*. Платежи арифметической монотонной ренты составляют арифметическую прогрессию:

$$C_{k+1} = C_k + d, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а платежи геометрической монотонной ренты образуют геометрическую прогрессию:

$$C_{k+1} = C_k \cdot q, \quad (q \neq 0), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Приведенные выше определения, как мы уже говорили, задают ренту как поток $\overline{CF}$ 2-го рода. Но на практике рента реализуется (актуализируется) как поток финансовых *событий*. Выше мы описали два правила актуализации, т. е. превращения интервального потока в поток (ренту) событий.

В первом случае все рентные платежи относятся на начала соответствующих периодов. Полученный таким преобразованием поток называется *авансированной*, *упреждающей* рентой или рентой *пренумерандо*.

Во втором случае все рентные платежи относятся на концы соответствующих периодов. Полученный таким преобразованием поток называется *финальной*, *обыкновенной* рентой или рентой *постнуме-*

рандо. Обыкновенную ренту в отечественной литературе [24] иногда называют *задержанной*. Термин «задержанная рента» не следует путать с ранее приведенным термином «отложенная (отсроченная) рента».

На оба описанных выше представления интервальной ренты как потока событий дословно переносятся все данные выше определения. Так, можно говорить о срочной постоянной обыкновенной ренте, отложенной возрастающей авансированной ренте и т. д.

Периоды ренты на практике обычно связаны с так называемыми стандартными календарными периодами, подробно рассматриваемыми ниже в этой главе. К ним относятся годовые, полугодовые, квартальные, месячные и т. д. промежутки. Ренту с годовым периодом обычно называют *аннуитетом*.

Иногда суммы, относящиеся к естественным периодам ренты, реализуются не одним платежом, а серией одинаковых (более мелких) платежей, равномерно распределенных по периоду ренты. Так, дивидендная рента по акциям с естественным годовым периодом часто выплачивается ежеквартально. Другим примером может служить купонная рента по облигациям. Годовой процент по облигациям, задаваемый купонной ставкой, часто выплачивается двумя одинаковыми платежами по полугодиям. Ренты такого вида называются p-кратными относительно базового периода ренты (обычно, года). Так, *p-кратная* рента с годовым периодом (т. е. аннуитет) и годовым платежом C реализуется в виде *p одинаковых* платежей величины C/p. Эти платежи сами образуют ренту, которую мы будем называть *микрорентой*, соответствующей базовому периоду ренты (рис. 1.14).

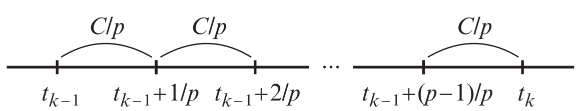

Рис. 1.14

Микрорента получается дроблением суммы C, относящейся к некоторому базовому периоду. Если эта операция выполняется для всех сумм и периодов ренты, то полученная рента называется *p-кратным дроблением* исходной ренты. Оператор p-кратного дробления обозначим $D^{(p)}$, соответственно ренту, полученную p-кратным дроблением ренты $\overline{CF}$, обозначим $D^{(p)}(\overline{CF})$.

Пример 1.3. Для арифметической возрастающей интервальной ренты $\overline{CF}$ (рис. 1.15) найти микроренту, соответствующую трехкратному дроблению последнего платежа, и ренту, полученную двукратным дроблением всей ренты $\overline{CF}$.

Решение. Микрорента $D^{(3)}([2,3],300)$, соответствующая трехкратному дроблению последнего платежа, изображена на рис. 1.16.

Рента $D^{(2)}(\overline{CF})$, получающаяся двукратным дроблением ренты $\overline{CF}$, показана на рис. 1.17. ■

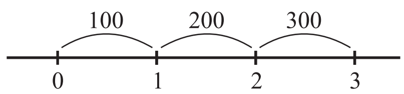

Рис. 1.15

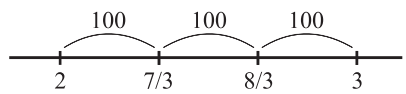

Рис. 1.16

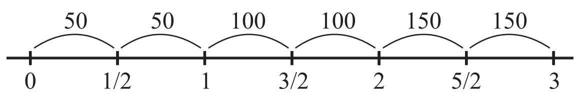

Рис. 1.17

К дробной ренте, т. е. ренте, полученной p-кратным дроблением, можно применить оба вида преобразования (актуализации), которые рассматривались выше. Последовательно применяя операторы дробления и актуализации, мы можем получить *дробные ренты событий*. Так, ренту $\mathrm{Adv}(D^{(p)}(\overline{CF}))$ можно назвать *p-кратной авансированной* рентой, а ренту $\mathrm{Fin}(D^{(p)}(\overline{CF}))$ — *p-кратной обыкновенной* рентой.

П р и м е р 1.4. Для интервальной ренты CF из предыдущего примера найти различные актуализации двукратного дробления этой ренты.

Р е ш е н и е. Очевидно, что

$$\mathrm{Adv}(D^{(2)}(\overline{CF})) = \{(0,50),(1/2,50),(1,100),(3/2,100),(2,150),(5/2,150)\}.$$

Аналогично

$$\mathrm{Fin}(D^{(2)}(\overline{CF})) = \{(1/2,50),(1,50),(3/2,100),(2,100),(5/2,150),(3,150)\}. \quad \blacksquare$$

Мы определили оператор дробления непосредственно для интервальной ренты. Очевидно, его легко распространить на ренты событий. Для этого нужно просто поменять местами операторы дробления и актуализации.

Так, p-кратное дробление авансированной ренты (событий) можно определить как авансирование p-кратного дробления исходной интервальной ренты:

$$D^{(p)}(\mathrm{Adv}(\overline{CF})) = \mathrm{Adv}(D^{(p)}(\overline{CF})).$$

Аналогично можно определить дробление обыкновенной ренты (событий):

$$D^{(p)}(\mathrm{Fin}(\overline{CF})) = \mathrm{Fin}(D^{(p)}(\overline{CF})).$$

На этом закончим краткий обзор основных понятий, относящихся к регулярным потокам — рентам.

Большое внимание, уделенное финансовым событиям и потокам, вызвано тем, что в современной финансовой теории понятие актива непосредственно связано с понятием потока платежей. По существу, с формальной точки зрения, *любой актив можно представить порождаемым им потоком платежей*. Так, облигацию можно описать потоком, состоящим из всех процентных выплат и выплаты ее номинала в конце срока погашения, акцию можно отождествить с потоком выплат дивидендов и, в случае продажи, вырученной суммой, недвижимость — потоком арендных платежей и т. д.

Рассмотрим, например, облигацию с номинальной стоимостью $\mathcal{R}1000$ и сроком погашения 3 года. Пусть купонная ставка равна 8% годовых и проценты (купоны) выплачиваются дважды в год в конце каждого полугодия, т. е. по истечении очередного полугодия требуется выплатить $\mathcal{R}40$. Тогда денежный поток, порождаемый этой облигацией, имеет следующий вид (рис. 1.18).

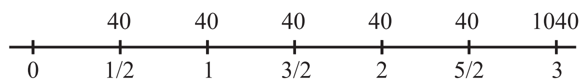

Рис. 1.18

Представление актива в виде денежного потока позволяет строить математические модели, описывающие количественные соотношения между основными характеристиками активов: их ценами, доходностью, риском и др. Ниже будут рассмотрены некоторые из таких моделей.

Нетто-величина дискретного потока и простейшие балансовые модели. Согласно определению, финансовые события, составляющие поток платежей 1-го рода, относятся к конкретным моментам времени. Введем теперь характеристику, связанную с событиями потока, происходящими внутри некоторого промежутка времени.

Определение 1.6. *Нетто-величиной* потока платежей

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}$$

на промежутке J называется величина

$$NV(CF, J) = \sum_{k:t_k \in J} C_k,$$

т. е. это просто алгебраическая сумма величин C_k тех платежей потока, моменты времени которых попадают в данный промежуток; символ NV — сокращение от англ. netto–value.

Заметим, что здесь при определении промежутка времени важно указать, включаются в него или нет его границы. Например, для потока

$$CF = \{(-3{,}100), (-1, -200), (1{,}300), (2{,}400)\}$$

для различных промежутков можно вычислить соответствующие нетто-величины потока:

$$NV(CF, [-4, 0]) = 100 + (-200) = -100;$$
$$NV(CF, (-1{,}1]) = 300;$$
$$NV(CF, [-3{,}5)) = 100 - 200 + 300 + 400 = 600.$$

Для нетто-величины потока имеет место очевидное свойство.

Свойство аддитивности. *Для любых* $t_1 < t_2 < t_3$

$$NV(CF, [t_1, t_2]) + NV(CF, (t_2, t_3]) = NV(CF, [t_1, t_3]),$$

т. е. нетто-величина потока на промежутке равна сумме нетто-величин потоков на составляющих этот промежуток непересекающихся подпромежутках (т. е. его частях).

В финансовой математике широко используются так называемые накопительные модели. Такой простейшей моделью является модель *накопительного счета* (или фонда), состояние которого в момент t представляет собой мгновенную денежную величину $S(t)$. Поступающие на накопительный счет средства, задаваемые *входным потоком платежей*, аккумулируются на счете, увеличивая его состояние, соответственно снимаемые со счета средства образуют *выходной поток*, уменьшающий состояние счета. Наличие входного и выходного потоков, таким образом, тесно связано с изменениями состояния счета. Более того, само понятие состояния в этом случае нуждается в уточнении. Для пояснения этого рассмотрим следующий пример.

Пусть инвестор имеет на счете в банке $\mathcal{R}500$. В некоторый момент времени t_0 он вносит еще $\mathcal{R}100$. Каково состояние счета в этот момент времени? Следует помнить, что мы имеем дело с моделью, т. е. идеализированным представлением процесса формирования счета. Поскольку в модели поступление новой суммы считается мгновенным, то мгновенно должно измениться и состояние счета. Таким образом, возникает «неопределенность»: считать ли состоянием в момент времени t_0 начальное значение $\mathcal{R}500$ или же новое «пополненное» значение $\mathcal{R}600$? На практике такой вопрос, конечно, не возникает, поскольку пополнение счета — не мгновенный акт, а процесс, имеющий длительность. Однако в математической модели необходимо сделать выбор и дать соответствующее определение состояния. В принципе возможны *три* варианта.

В первом из них предлагается считать состояние просто неопределенным в моменты поступления или изъятия сумм, но этот подход не очень удобен.

Во втором варианте состояние в момент t_0 совпадает с «непосредственно предыдущим». Математически это записывается в виде

$$S(t_0) = S(t_0 - 0),$$

где

$$S(t_0 - 0) = \lim_{t \to t_0 - 0} S(t)$$

есть предел слева $S(t)$ в точке t_0. Это значит, что функция $S(t)$ является непрерывной слева в точке t_0.

Для нашего примера это соответствует выбору состояния счета в момент t_0, равного $\mathcal{R}500$.

Наконец, *в третьем* варианте состояние в момент t_0 считается совпадающим с «непосредственно следующим за ним» состоянием. Это значит, что

$$S(t_0) = S(t_0 + 0),$$

где

$$S(t_0 + 0) = \lim_{t \to t_0 + 0} S(t)$$

есть предел справа функции $S(t)$ в точке t_0. В этом случае $S(t)$ непрерывна справа.

В нашем примере это соответствует состоянию счета в момент t_0, равному $\mathcal{R}600$.

Таким образом, во втором варианте состояние счета в момент t_0 «не реагирует» на поступление, а в третьем варианте оно — «завершенное», т. е. то, в котором уже учтено поступление на счет, происшедшее в данный момент времени.

Следует отчетливо понимать, что вопрос о том, **какое состояние на самом деле**, бессмыслен. Но, строя математическую модель, нам необходимо дать соответствующее определение состояния.

Здесь и в последующем используется третий вариант — завершенное состояние. Если бы мы выбрали второй вариант, то промежутки в свойстве аддитивности были бы открытыми справа, т. е. имели вид $[t_1, t_2)$ и $[t_2, t_3)$.

Нетто-стоимость потока, как легко видеть, полностью определяет сам поток. В самом деле,

$$S_k = NV(CF, [t_k, t_k]).$$

Таким образом, нетто-стоимость является еще одной и, как увидим ниже, более общей формой задания финансовых потоков.

Финансовые или денежные потоки обычно имеют *источники*, т. е. финансовые средства, ресурсы, запасы, которые порождают эти потоки, и *приемники* или *цели*, куда эти потоки поступают. Источники и приемники можно представлять себе в виде резервуаров, накопителей денежных ресурсов, т. е. с позиции финансовой математики — это просто фонды. Текущая величина (объем) фонда есть стоимость имеющихся в данный момент в фонде активов. Это — величина 1-го класса. Денежный поток, связанный с фондом, может менять его величину в течение некоторого промежутка времени. Если положительные значения из потока рассматривать как *входной поток*, а отрицательные — как *выходной*, то исходный денежный поток разобьется на два потока: один поступающий (втекающий) в фонд, а другой исходящий (вытекающий) из него. За данный промежуток времени изменение величины фонда в точности равно алгебраической сумме платежей потока за этот же промежуток.

Математически этот факт отражается следующим образом. Пусть V_0 — начальная величина фонда; V_t — величина фонда в момент времени t. Тогда для любого потока CF, связанного с фондом, будет справедливо соотношение

$$V_t = V_0 + NV(CF, (0,t]), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

которое называется *уравнением баланса*.

Далее, пусть t_1 и t_2 — произвольные моменты времени и $t_1 < t_2$. Тогда из (1.1) с учетом свойства аддитивности нетто-величины потока событий следует, что

$$V_{t_2} = V_0 + NV(CF, (0, t_2]) =$$
$$= V_0 + NV(CF, (0, t_1]) + NV(CF, (t_1, t_2]) = V_{t_1} + NV(CF, (t_1, t_2]).$$

Таким образом, получим соотношение

$$V_{t_2} = V_{t_1} + NV(CF, (t_1, t_2]), \quad t_1 < t_2, \tag{1.2}$$

которое также называется уравнением баланса.

Уравнение (1.2) есть просто выражение «закона сохранения». В самом деле, разность $V_{t_2} - V_{t_1}$ есть изменение объема фонда за промежуток времени $(t_1, t_2]$, а объем фонда в этом промежутке изменится ровно настолько, сколько денежных средств поступит (или уйдет) в (из) него. Нетто-величина потока как раз и дает общий баланс поступлений и изъятий фонда.

В качестве примера рассмотрим снова поток

$$CF = \{(-3{,}100), (-1{,}200), (1{,}300), (2{,}400)\}.$$

Считая, что величина фонда в момент времени $t = 0$ составляет $V_0 = \mathcal{R}500$, можно найти состояние фонда в любой другой момент времени. Так,

$$V_1 = V_0 + \mathcal{R}300 = \mathcal{R}500 + \mathcal{R}300 = \mathcal{R}800,$$
$$V_3 = V_1 + \mathcal{R}400 = \mathcal{R}1200$$

и т. д.

Приведенные выше определения и вычисления, отражающие зависимость величины фондов от соответствующих потоков финансовых событий, не учитывают временну́ю стоимость денег. Это чисто балансовые соотношения. Существуют более сложные соотношения, учитывающие и фактор времени в том смысле, о котором говорилось ранее. Так, величина фонда может изменяться не только из-за временны́х поступлений, но и из-за изменения стоимости активов фонда.

Общие финансовые потоки. В заключение параграфа проанализируем финансовые потоки с несколько более общей точки зрения, позволяющей ввести обобщенное понятие финансового потока и, в частности, описать так называемые непрерывные потоки, которые играют важную роль в финансовом анализе.

Рассмотренные нами выше потоки событий (потоки 1-го рода) являются дискретными (или сосредоточенными) потоками, потоки 2-го рода (интервальные потоки) являются *распределенными*. Между ними имеется двусторонняя связь. Интервальный поток $\overline{CF}$ можно (вообще говоря, искусственно) преобразовать в дискретный, а любой дискретный поток (событий) CF — в интервальный, если некоторым образом подобрать последовательность непересекающихся промежутков $J_1, J_2, \ldots, J_n$, содержащую все моменты дискретного потока. В этом случае промежутку J_k можно поставить в соответствие интервальный платеж
$$C_k = NV(CF, J_k),$$
являющийся нетто-значением потока CF на промежутке J_k. Эта связь имеет более глубокие корни; она позволяет дать общее определение финансового потока, включающего как дискретные, так и распределенные, в частности, непрерывные потоки.

Задать финансовый поток общего вида можно с помощью так называемой *величины потока* — функции, сопоставляющей каждому промежутку J временно́й шкалы $\mathbf{T}$ значение $V(J)$ величины потока, соответствующее этому промежутку. Содержательно величина потока для данного промежутка равна общей денежной массе, «перенесенной» потоком за данный период времени. Формально это просто некоторая *функция промежутков времени*. Ее естественно считать аддитивной в том смысле, что величина потока для промежутка, разбитого на две части, будет равна сумме величин потоков, соответствующих этим частям. Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение 1.7. *Величиной* финансового потока CF называется аддитивная функция V_{CF} промежутков временно́й шкалы $\mathbf{T}$, т. е. функция V_{CF}, сопоставляющая каждому промежутку J (любого вида) некоторое значение $V_{CF}(J)$ из денежной шкалы $\mathbf{M}$. Аддитивность V_{CF} означает, что для любых двух непересекающихся промежутков J_1, J_2, дающих в сумме промежуток J:
$$J = J_1 \cup J_2, \quad J_1 \cap J_2 = \varnothing,$$
выполняется равенство
$$V_{CF}(J) = V_{CF}(J_1 \cup J_2) = V_{CF}(J_1) + V_{CF}(J_2).$$
Поток CF, определяемый своей величиной V_{CF}, назовем *общим финансовым потоком*.

В дальнейшем величину потока будем обозначать как V, если это не будет приводить к недоразумениям.

Определение общего финансового потока весьма похоже на определение потока 2-го рода, однако в нем нет упоминания о какой-либо заранее заданной последовательности смежных промежутков. Значение величины финансового потока (или объем платежа) сопоставляется *любому* промежутку.

Введем еще ряд дополнительных определений, связанных с понятием общего финансового потока, которые позволят точнее описать связь этого понятия с ранее изученными потоками.

Как и для дискретных потоков, можно определить операции над общими потоками. Так, говорят о сумме $CF = CF_1 + CF_2$ двух общих потоков, задаваемых величинами $V_1 = V_{CF_1}$ и $V_2 = V_{CF_2}$ соответственно. При этом для каждого промежутка J величина $V(J) = V_{CF}(J)$ суммарного потока определяется суммой значений $V_1(J)$ и $V_2(J)$:

$$V(J) = V_1(J) + V_2(J).$$

Умножение общего потока CF, задаваемого величиной $V = V_{CF}$, на число λ, дает поток λCF, значение величины которого для промежутка J равно $\lambda V(J)$.

Будем говорить, что точка $a \in \mathbf{T}$ является *особой* или *критической точкой* потока, если для любых *достаточно малых* промежутков J, содержащих a, имеет место равенство

$$V(J) = V(a).$$

Здесь точка a рассматривается как промежуток (отрезок)

$$J_a = [a, a].$$

Финансовый поток, задаваемый величиной V, будем называть *дискретным*, если он имеет дискретное (конечное или бесконечное) множество особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ таких, что для любого промежутка J, *не содержащего* ни одной особой точки, соответствующее значение величины потока V равно нулю:

$$V(J) = 0.$$

В этом случае совокупность особых точек называется *носителем* общего потока. Совершенно ясно, что дискретный поток с множеством особых точек $a_1, \ldots, a_n$, $n \leqslant \infty$, есть не что иное, как обычный поток событий (поток 1-го рода), описанный выше. Действительно, если положить $t_k = a_k$ и $C_k = V(a_k)$, то получим поток событий

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}, \quad n \leqslant \infty,$$

причем, как легко видеть, нетто-значение потока CF на любом промежутке J совпадает со значением величины V исходного дискретного потока:

$$NV(CF, J) = V(J).$$

Последнее равенство, в свою очередь, подсказывает, как для обычного (дискретного) потока событий задать соответствующий ему общий поток, определяемый величиной V.

Вернемся теперь к общим потокам CF, задаваемым величиной V. Пусть J — произвольный промежуток (*любого вида*) с концами a и b.

Обозначим его $J = \langle a, b\rangle$. Назовем *средней плотностью* потока на промежутке J величину

$$\overline{\mu}(J) = \frac{V(J)}{|J|},$$

где $|J| = b - a$ — длина промежутка J. Будем говорить, что поток имеет конечную плотность $\mu(c)$ в точке c, если существует предел

$$\mu(c) = \lim_{|J|\to 0} \{\overline{\mu}(J) \,|\, c \in J\} = \lim_{|J|\to 0} \frac{V(J)}{|J|}.$$

Таким образом, плотность $\mu(c)$ в точке c есть предел средней плотности потока по промежуткам, содержащим c ($c \in J$), при условии, что их длина стремится к нулю: $|J| \to 0$. Существование конечной плотности в точке c означает, что для достаточно малых (по длине) промежутков J имеет место *приближенное* равенство

$$V(J) \approx \mu(c)|J| = \mu(c)(b - a),$$

которое тем точнее, чем меньше длина промежутка J. В частности, отсюда следует, что $V(J) \to 0$ при $|J| \to 0$, $c \in J$, или, как еще говорят, поток *непрерывен* в точке c, т. е. значение потока $V(\{c\})$ в этой точке равно нулю:

$$V(\{c\}) = 0.$$

Поток, непрерывный в каждой точке $c \in \mathbf{T}$, называется (*всюду*) *непрерывным*.

Для непрерывного потока значение величины V на промежутке $J = \langle a,\, b\rangle$ не зависит от *вида* промежутка:

$$V([a, b]) = V((a, b]) = V([a, b)) = V((a, b)).$$

Поэтому величину *непрерывного* потока можно рассматривать не как функцию промежутка, а как обычную функцию двух переменных (концов промежутка):

$$V(J) = V(a, b).$$

Так в дальнейшем и будем поступать.

Условие аддитивности в этом случае запишется в виде

$$V(a, c) = V(a, b) + V(b, c)$$

для $a \leqslant b \leqslant c$.

В частности, плотность *непрерывного* потока в точке есть предел:

$$\mu(c) = \lim_{(y-x)\to 0} \frac{V(x, y)}{y - x}, \quad x \leqslant c \leqslant y.$$

Особое значение в дальнейшем будут играть потоки с *кусочно-непрерывной плотностью* $\mu(x)$ в любой точке из $\mathbf{T}$. Такие потоки будем называть *абсолютно непрерывными*.