

Брычков Ю.А.  
Маричев О.И.  
Прудников А.П.

# Таблицы неопределенных интегралов



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 519.6(083)  
ББК 22.194  
Б87

Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П. **Таблицы неопределенных интегралов.** — 2-е изд., исправ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 200 с. — ISBN 5-9221-0331-8.

Книга содержит таблицы неопределенных интегралов от элементарных функций.

Для студентов высших учебных заведений, инженеров, научных работников.

Первое издание — 1986 г.

---

Учебное издание

*БРЫЧКОВ Юрий Александрович*  
*МАРИЧЕВ Олег Игоревич*  
*ПРУДНИКОВ Анатолий Платонович*

**ТАБЛИЦЫ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ**

Редактор *Е.Ю. Ходан*  
Корректор *Л.Т. Варьяш*  
Оригинал-макет: *В.В. Худяков*  
Оформление переплета *А.Ю. Алегхиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 05.11.02.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 18,54. Тираж 5000 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.  
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.  
E-mail: form.pfp@votel.ru <http://www.vologda/~pfpv>

---

ISBN 5-9221-0331-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2003

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот справочник предназначен для студентов высших учебных заведений, инженеров и научных работников. Он содержит таблицы неопределенных интегралов от элементарных функций. В книге помещены в основном интегралы, выражаемые через элементарные функции; для простейших интегралов, не обладающих этим свойством, но часто встречающихся в приложениях, даны представления через специальные функции. Определения этих специальных функций, а также основные свойства элементарных функций, которые могут быть использованы при вычислении интегралов, приведены в приложениях. Другие неопределенные интегралы от элементарных функций можно найти в более полном справочном руководстве <sup>1)</sup>.

Постоянная интегрирования в правых частях формул для краткости опущена; например, вместо

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

пишем

$$\int \sin x \, dx = -\cos x.$$

Переменные интегрирования  $x$ ,  $t$  и параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  считаются действительными,  $\alpha$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — комплексными,  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; остальные ограничения указываются в квадратных скобках после соответствующих формул. Некоторые формулы при определенных значениях параметров теряют смысл. Если эти значения следуют из структуры формулы, то соответствующие разъяснения опускаются. Выражения для интеграла при этих значениях параметров, как правило, даются в последующих формулах.

---

<sup>1)</sup> Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981; в этой книге помещены также и определенные интегралы. Неопределенные и определенные интегралы от специальных функций можно найти в книгах: Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983; Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1985.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1. Основные интегралы.

$$1. \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \quad [p \neq -1].$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x|.$$

3-7:  $[a \neq 0]$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}.$$

$$8. \int e^x dx = e^x.$$

$$9. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad [a > 0, a \neq 1].$$

$$10. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x.$$

$$11. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|.$$

$$12. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x.$$

$$13. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x.$$

$$14. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{arctg} e^x.$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x.$$

$$16. \int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x.$$

$$17. \int \operatorname{cth} x dx = \ln |\operatorname{sh} x|.$$

$$18. \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$19. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$20. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

$$21. \int \cos x dx = \sin x.$$

$$22. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$23. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

$$24. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x}.$$

$$25. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x}.$$

$$26. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x|.$$

$$27. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x|.$$

### 1.2. Общие формулы.

$$1. \int (a f(x) + b g(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

$$2. \int \frac{df(x)}{dx} dx = f(x).$$

$$3. \int \frac{df(x)}{dx} g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$$

[интегрирование по частям].

$$4. \int f(x) dx = \int f(g(y)) g'(y) dy.$$

[интегрирование подстановкой;  
 $x = g(y)$ ]

Дифференцирование неопределенного интеграла:

$$5. \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x).$$

## 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.1. Интегралы вида  $\int x^p(ax^r + b)^q dx$ .

1.  $\int x^p(ax^r + b)^q dx = \frac{x^{p+1}(ax^r + b)^q}{qr + p + 1} + \frac{qrb}{qr + p + 1} \int x^p(ax^r + b)^{q-1} dx.$
2.  $= -\frac{x^{p+1}(ax^r + b)^{q+1}}{(q+1)rb} + \frac{qr + r + p + 1}{(q+1)rb} \int x^p(ax^r + b)^{q+1} dx.$
3.  $= \frac{x^{p+1}(ax^r + b)^q}{p+1} - \frac{qra}{p+1} \int x^{p+r}(ax^r + b)^{q-1} dx.$
4.  $= \frac{x^{p-r+1}(ax^r + b)^{q+1}}{(q+1)ra} - \frac{p-r+1}{(q+1)ra} \int x^{p-r}(ax^r + b)^{q+1} dx.$
5.  $= \frac{x^{p-r+1}(ax^r + b)^{q+1}}{(qr+p+1)a} - \frac{(p-r+1)b}{(qr+p+1)a} \int x^{p-r}(ax^r + b)^q dx.$
6.  $= \frac{x^{p+1}(ax^r + b)^{q+1}}{(p+1)b} - \frac{(qr+r+p+1)a}{(p+1)b} \int x^{p+r}(ax^r + b)^q dx.$
7.  $\int x^p(ax^r + b)^n dx = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{a^k b^{n-k} x^{p+kr+1}}{p+kr+1}.$
8.  $\int \frac{x^p dx}{(ax^r + b)^q} = \frac{x^{p+1}}{(q-1)rb(ax^r + b)^{q-1}} + \frac{(q-1)r - p - 1}{(q-1)rb} \int \frac{x^p dx}{(ax^r + b)^{q-1}}.$
9.  $= -\frac{x^{p-r+1}}{(q-1)ra(ax^r + b)^{q-1}} + \frac{p-r+1}{(q-1)ra} \int \frac{x^{p-r} dx}{(ax^r + b)^{q-1}}.$
10.  $\int \frac{x^{r-1} dx}{(ax^r + b)^q} = -\frac{1}{(q-1)ra(ax^r + b)^{q-1}}.$
11.  $\int \frac{x^{r-1} dx}{ax^r + b} = \frac{1}{ra} \ln |ax^r + b|.$
12.  $\int \frac{x^r dx}{ax^r + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax^r + b}.$
13.  $\int \frac{dx}{(ax^r + b)^q} = \frac{x}{(q-1)rb(ax^r + b)^{q-1}} + \frac{(q-1)r - 1}{(q-1)rb} \int \frac{dx}{(ax^r + b)^{q-1}}.$
14.  $\int \frac{dx}{x^p(ax^r + b)^q} = \frac{1}{(q-1)rbx^{p-1}(ax^r + b)^{q-1}} +$   
 $+ \frac{p + (q-1)r - 1}{(q-1)rb} \int \frac{dx}{x^p(ax^r + b)^{q-1}}.$

$$15. \int \frac{dx}{x^p(ax^r + b)} = -\frac{1}{(p-1)bx^{p-1}} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{x^{p-r}(ax^r + b)}.$$

$$16. \int \frac{dx}{x(ax^r + b)} = \frac{1}{rb} \ln \left| \frac{x^r}{ax^r + b} \right|.$$

2.2. Интегралы вида  $\int \frac{x^m dx}{x^n + a^n}$ .

$$1. \int \frac{dx}{x^{2n} + a^{2n}} = -\frac{1}{2na^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k+1}{2n} \pi \ln \left( x^2 - 2ax \cos \frac{2k+1}{2n} \pi + a^2 \right) + \frac{1}{na^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \operatorname{arctg} \frac{x - a \cos \frac{2k+1}{2n} \pi}{a \sin \frac{2k+1}{2n} \pi}.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^{2n+1} + a^{2n+1}} = \frac{1}{(2n+1)a^{2n}} \ln |x+a| - \frac{1}{(2n+1)a^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi \ln \left( x^2 - 2ax \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi + a^2 \right) + \frac{2}{(2n+1)a^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k+1}{2n+1} \pi \operatorname{arctg} \frac{x - a \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi}{a \sin \frac{2k+1}{2n+1} \pi}.$$

$$3. \int \frac{x^m dx}{x^{2n} + a^{2n}} = -\frac{1}{2na^{2n-m-1}} \times \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(m+1)(2k+1)\pi}{2n} \ln \left( x^2 - 2ax \cos \frac{2k+1}{2n} \pi + a^2 \right) + \frac{1}{na^{2n-m-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(m+1)(2k+1)\pi}{2n} \operatorname{arctg} \frac{x - a \cos \frac{2k+1}{2n} \pi}{a \sin \frac{2k+1}{2n} \pi} \quad [1 \leq m \leq 2(n-1)].$$

$$4. \int \frac{x^m dx}{x^{2n+1} + a^{2n+1}} = \frac{(-1)^m}{(2n+1)a^{2n-m}} \ln |x+a| - \frac{1}{(2n+1)a^{2n-m}} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(m+1)(2k+1)\pi}{2n+1} \ln \left( x^2 - 2ax \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi + a^2 \right) + \frac{2}{(2n+1)a^{2n-m}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(m+1)(2k+1)\pi}{2n+1} \operatorname{arctg} \frac{x - a \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi}{a \sin \frac{2k+1}{2n+1} \pi} \quad [1 \leq m \leq 2n-1].$$

**2.3. Интегралы вида**  $\int \frac{x^m dx}{x^n - a^n}$ .

$$1. \int \frac{dx}{x^{2n} - a^{2n}} = \frac{1}{2na^{2n-1}} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \\ + \frac{1}{2na^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} \ln \left( x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{n} + a^2 \right) - \\ - \frac{1}{na^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \operatorname{arctg} \frac{x - a \cos \frac{k\pi}{n}}{a \sin \frac{k\pi}{n}}.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^{2n+1} - a^{2n+1}} = \frac{1}{(2n+1)a^{2n}} \ln |x-a| - \\ - \frac{1}{(2n+1)a^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi \ln \left( x^2 + 2ax \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi + a^2 \right) - \\ - \frac{2}{(2n+1)a^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k+1}{2n+1} \pi \operatorname{arctg} \frac{x + a \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi}{a \sin \frac{2k+1}{2n+1} \pi}.$$

$$3. \int \frac{x^m dx}{x^{2n} - a^{2n}} = \frac{1}{2na^{2n-m-1}} [\ln |x-a| - (-1)^m \ln |x+a|] + \\ + \frac{1}{2na^{2n-m-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{(m+1)k\pi}{n} \ln \left( x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{n} + a^2 \right) - \\ - \frac{1}{na^{2n-m-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{(m+1)k\pi}{n} \operatorname{arctg} \frac{x - a \cos \frac{k\pi}{n}}{a \sin \frac{k\pi}{n}} \quad [1 \leq m \leq 2(n-1)].$$

$$4. \int \frac{x^m dx}{x^{2n+1} - a^{2n+1}} = \frac{1}{(2n+1)a^{2n-m}} \ln |x-a| + \\ + \frac{(-1)^{m+1}}{(2n+1)a^{2n-m}} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(m+1)(2k+1)\pi}{2n+1} \ln \left( x^2 + 2ax \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi + a^2 \right) + \\ + \frac{2(-1)^{m+1}}{(2n+1)a^{2n-m}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(m+1)(2k+1)\pi}{2n+1} \operatorname{arctg} \frac{x + a \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi}{a \sin \frac{2k+1}{2n+1} \pi} \\ [1 \leq m \leq 2n-1].$$

**2.4. Интегралы вида**  $\int \frac{x^p dx}{(x+a)^q}$ .

$$1. \int \frac{x^p dx}{(x+a)^q} = -\frac{x^p}{(q-1)(x+a)^{q-1}} + \frac{p}{q-1} \int \frac{x^{p-1} dx}{(x+a)^{q-1}}.$$

$$2. \int \frac{x^m dx}{(x+a)^q} = - \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{(-a)^{m-k}}{(q-k-1)(x+a)^{q-k-1}};$$

если  $k = q - 1$ , то вместо соответствующего члена в сумме следует взять  $C_m^{q-1}(-a)^{m-q+1} \ln|x+a|$ .

$$3. \int \frac{dx}{(x+a)^n} = - \frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}.$$

$$4. \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|.$$

$$5. \int \frac{x dx}{(x+a)^n} = - \frac{1}{(n-2)(x+a)^{n-2}} + \frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}.$$

$$6. \int \frac{x^2 dx}{(x+a)^n} = - \frac{1}{(n-3)(x+a)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(x+a)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(x+a)^{n-1}}.$$

$$7. \int \frac{x^3 dx}{(x+a)^n} = - \frac{1}{(n-4)(x+a)^{n-4}} + \frac{3a}{(n-3)(x+a)^{n-3}} - \frac{3a^2}{(n-2)(x+a)^{n-2}} + \frac{a^3}{(n-1)(x+a)^{n-1}}.$$

$$8. \int \frac{x^m dx}{x+a} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k a^k x^{m-k}}{m-k} + (-a)^m \ln|x+a|.$$

$$9. \int \frac{x dx}{x+a} = x - a \ln|x+a|.$$

$$10. \int \frac{x^2 dx}{x+a} = \frac{x^2}{2} - ax + a^2 \ln|x+a|.$$

$$11. \int \frac{x^3 dx}{x+a} = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + a^2x - a^3 \ln|x+a|.$$

$$12. \int \frac{x^m dx}{(x+a)^2} = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \frac{ka^{k-1}x^{m-k}}{m-k} + \frac{(-1)^{m-1}a^m}{x+a} + (-1)^{m-1}ma^{m-1} \ln|x+a|.$$

$$13. \int \frac{x dx}{(x+a)^2} = \frac{a}{x+a} + \ln|x+a|.$$

$$14. \int \frac{x^2 dx}{(x+a)^2} = x - \frac{a^2}{x+a} - 2a \ln|x+a|.$$

$$15. \int \frac{x^3 dx}{(x+a)^2} = \frac{x^2}{2} - 2ax + \frac{a^3}{x+a} + 3a^2 \ln|x+a|.$$

$$16. \int \frac{x dx}{(x+a)^3} = - \frac{1}{x+a} + \frac{a}{2(x+a)^2}.$$

$$17. \int \frac{x^2 dx}{(x+a)^3} = \frac{2a}{x+a} - \frac{a^2}{2(x+a)^2} + \ln|x+a|.$$

$$18. \int \frac{x^3 dx}{(x+a)^3} = x - \frac{3a^2}{x+a} + \frac{a^3}{2(x+a)^2} - 3a \ln|x+a|.$$



$$19. \int \frac{x dx}{(x+a)^4} = -\frac{1}{2(x+a)^2} + \frac{a}{3(x+a)^3}.$$

$$20. \int \frac{x^2 dx}{(x+a)^4} = -\frac{1}{x+a} + \frac{a}{(x+a)^2} - \frac{a^2}{3(x+a)^3}.$$

$$21. \int \frac{x^3 dx}{(x+a)^4} = \frac{3a}{x+a} - \frac{3a^2}{2(x+a)^2} + \frac{a^3}{3(x+a)^3} + \ln|x+a|.$$

2.5. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{x^p(x+a)^q}$ .

$$1. \int \frac{dx}{x^p(x+a)^q} = -\frac{1}{(p-1)ax^{p-1}(x+a)^{q-1}} - \frac{p+q-2}{(p-1)a} \int \frac{dx}{x^{p-1}(x+a)^q}.$$

$$2. = \frac{1}{(q-1)ax^{p-1}(x+a)^{q-1}} + \frac{p+q-2}{(q-1)a} \int \frac{dx}{x^p(x+a)^{q-1}}.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^m(x+a)^n} = \frac{1}{a^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{m+n-2} (-1)^{k+1} C_{m+n-2}^k \frac{(x+a)^{m-k-1}}{(m-k-1)x^{m-k-1}};$$

если  $k = m-1$ , то вместо соответствующего члена в сумме следует взять  $(-1)^m C_{m+n-2}^{m-1} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right|$ .

$$4. \int \frac{dx}{x(x+a)^n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{ka^{n-k}(x+a)^k} - \frac{1}{a^n} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right|.$$

$$5. = \frac{1}{a^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} C_{n-1}^k \left( \frac{x}{x+a} \right)^k - \frac{1}{a^n} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right|.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2(x+a)^n} = -\frac{1}{ax(x+a)^{n-1}} - \frac{n}{a} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{ka^{n-k}(x+a)^k} - \frac{1}{a^n} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right| \right].$$

$$7. \int \frac{dx}{x^3(x+a)^n} = \frac{(n+1)x-a}{2a^2x^2(x+a)^{n-1}} + \frac{n(n+1)}{2a^2} \int \frac{dx}{x(x+a)^n}.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^m(x+a)} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{(m-k)a^k x^{m-k}} + \frac{(-1)^m}{a^m} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right|.$$

$$9. \int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{x+a} \right|.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2(x+a)} = -\frac{1}{ax} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right|.$$

$$11. \int \frac{dx}{x^3(x+a)} = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2ax^2} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right|.$$

$$12. \int \frac{dx}{x(x+a)^2} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right| \right).$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2(x+a)^2} = -\frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x} - \frac{2}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right| \right).$$

$$14. \int \frac{dx}{x^3(x+a)^2} = \frac{1}{a^3} \left( \frac{1}{x+a} + \frac{2}{x} - \frac{a}{2x^2} - \frac{3}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right| \right).$$

$$15. \int \frac{dx}{x(x+a)^3} = \frac{1}{a^2(x+a)} + \frac{1}{2a(x+a)^2} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right|.$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2(x+a)^3} = -\frac{1}{2a^2(x+a)^2} - \frac{2}{a^3(x+a)} - \frac{1}{a^3x} + \frac{3}{a^4} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right|.$$

$$17. \int \frac{dx}{x^3(x+a)^3} = \frac{1}{a^4} \left[ \frac{3}{x+a} + \frac{a}{2(x+a)^2} + \frac{3}{x} - \frac{a}{2x^2} - \frac{6}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x} \right| \right].$$

**2.6. Интегралы вида**  $\int x^p \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx$ .

$$1. \int x^p \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx = \frac{(x+a)(x+b)x^{p-1}}{p+1} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q - \\ - \frac{q(b-a) + p(b+a)}{p+1} \int x^{p-1} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx - \frac{(p-1)ab}{p+1} \int x^{p-2} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx.$$

$$2. \int x \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx = \\ = \frac{(x+a)^q}{2(x+b)^{q-2}} + \frac{b(x+a)^q}{(q-1)(x+b)^{q-1}} + \frac{q[(q-1)(a-b) - 2b]}{2(q-1)} \int \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^{q-1} dx.$$

$$3. = \frac{(x+a)^{q+1}}{2(x+b)^{q-1}} - \frac{q(b-a) + a + b}{2} \int \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx.$$

$$4. \int \frac{(x+a)^p}{(x+b)^q} dx = -\frac{(x+a)^p}{(q-1)(x+b)^{q-1}} + \frac{p}{q-1} \int \frac{(x+a)^{p-1}}{(x+b)^{q-1}} dx.$$

$$5. \int \frac{(x+a)^p}{(x+b)^{p+2}} dx = \frac{1}{(p+1)(b-a)} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^{p+1}.$$

$$6. \int \frac{(x+a)^p}{(x+b)^{p+3}} dx = \frac{(x+a)^{p+1} [x + (p+1)(b-a) + b]}{(p+1)(p+2)(b-a)^2(x+b)^{p+2}}.$$

$$7. \int \frac{1}{(x+c)^p} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx = \\ = -\frac{1}{(p-1)(a-c)(b-c)} \left\{ \frac{1}{(x+c)^{p-1}} \cdot \frac{(x+a)^{q+1}}{(x+b)^{q-1}} + \right. \\ \left. + [(p-2)(a+b-2c) - q(b-a)] \int \frac{1}{(x+c)^{p-1}} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx + \right. \\ \left. + (p-3) \int \frac{1}{(x+c)^{p-2}} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^q dx \right\}.$$

$$8. \int \frac{1}{x+c} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^n dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \left[ \left( \frac{a-c}{b-c} \right)^k - 1 \right] \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^{n-k} - \\ - \left[ \left( \frac{a-c}{b-c} \right)^n - 1 \right] \ln |x+b| + \left( \frac{a-c}{b-c} \right)^n \ln |x+c|.$$

$$9. \int \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^n dx = -\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n}{(n-k)(n-k-1)} \frac{(x+a)^{n-k}}{(x+b)^{n-k-1}} + \\ + n(x+a) - n(b-a) \ln |x+b|.$$

10. 
$$= - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^{k+1} \frac{(a-b)^{k+1}}{k(x+b)^k} + x + n(a-b) \ln |x+b|.$$
11. 
$$\int \frac{x+a}{x+b} dx = x + (a-b) \ln |x+b|.$$
12. 
$$\int x \frac{x+a}{x+b} dx = \frac{x^2}{2} + (a-b)(x-b \ln |x+b|).$$
13. 
$$\int x^2 \frac{x+a}{x+b} dx = \frac{x^3}{3} + (a-b) \left( \frac{x^2}{2} - bx + b^2 \ln |x+b| \right).$$
14. 
$$\int \frac{x+a}{x(x+b)} dx = \frac{a}{b} \ln |x| - \frac{a-b}{b} \ln |x+b|.$$
15. 
$$\int \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^2 dx = x - \frac{(a-b)^2}{x+b} + 2(a-b) \ln |x+b|.$$
16. 
$$\int x \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^2 dx = \frac{x^2}{2} + 2(a-b)x + (a-b) \left[ \frac{b(a-b)}{x+b} + (a-3b) \ln |x+b| \right].$$
17. 
$$\int x^2 \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^2 dx = \frac{x^3}{3} + (a-b)x^2 + \frac{b(a-b)^2 x}{x+b} + (a-b)[(a-3b)(x+b) - 2b(a-2b) \ln |x+b|].$$
18. 
$$\int \frac{1}{x} \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^2 dx = \frac{(a-b^2)}{b(x+b)} + \frac{a^2}{b^2} \ln |x| - \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \ln |x+b|.$$
19. 
$$\int \frac{(x+a)^2}{x+b} dx = \frac{x^2}{2} + (2a-b)x + (a-b)^2 \ln |x+b|.$$
20. 
$$\int x \frac{(x+a)^2}{x+b} dx = \frac{x^3}{3} + (2a-b) \frac{x^2}{2} + (a-b)^2 (x-b \ln |x+b|).$$
21. 
$$\int x^2 \frac{(x+a)^2}{x+b} dx = \frac{x^4}{4} + (2a-b) \frac{x^3}{3} + (a-b)^2 \left( \frac{x^2}{2} - bx + b^2 \ln |x+b| \right).$$
22. 
$$\int \frac{(x+a)^2}{x(x+b)} dx = x + \frac{1}{b} [a^2 \ln |x| - (a-b)^2 \ln |x+b|].$$
23. 
$$\int \frac{x+a}{(x+b)^2} dx = -\frac{a-b}{x+b} + \ln |x+b|.$$
24. 
$$\int x \frac{x+a}{(x+b)^2} dx = x + \frac{b(a-b)}{x+b} + (a-2b) \ln |x+b|.$$
25. 
$$\int x^2 \frac{x+a}{(x+b)^2} dx = \frac{x^2}{2} + (a-2b)x - \frac{b^2(a-b)}{x+b} - b(2a-3b) \ln |x+b|.$$
26. 
$$\int \frac{x+a}{x(x+b)^2} dx = \frac{a-b}{b(x+b)} - \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{x+b}{x} \right|.$$

2.7. Интегралы вида  $\int \frac{x^p dx}{(x+a)^q (x+b)^r}.$

1. 
$$\int \frac{x^p dx}{(x+a)^q (x+b)^r} = \frac{1}{p-q-r+1} \left\{ \frac{x^{p-1}}{(x+a)^{q-1} (x+b)^{r-1}} - \right.$$
  

$$\left. - [(p-r)a + (p-q)b] \int \frac{x^{p-1} dx}{(x+a)^q (x+b)^r} - (p-1)ab \int \frac{x^{p-2} dx}{(x+a)^q (x+b)^r} \right\}.$$

2. 
$$\int \frac{x^p dx}{(x+a)^m(x+b)^n} =$$

$$= - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+m+p+1}}{k(x+a)^k} \left[ \sum_{l=0}^{m-k-1} C_p^l C_{m+n-k-l-2}^{n-1} \frac{a^{p-l}}{(b-a)^{m+n-k-l-1}} \right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{k(x+b)^k} \left[ \sum_{l=0}^{n-k-1} C_p^l C_{m+n-k-l-2}^{m-1} \frac{(-b)^{p-l}}{(b-a)^{m+n-k-l-1}} \right] +$$

$$+ (-1)^{m+p+1} \sum_{k=0}^{m-1} C_p^k C_{m+n-k-2}^{m-1} \frac{a^{p-k}}{(b-a)^{m+n-k-1}} \ln|x+a| +$$

$$+ (-1)^m \sum_{k=0}^{n-1} C_p^k C_{m+n-k-2}^{m-1} \frac{(-b)^{p-k}}{(b-a)^{m+n-k-1}} \ln|x+b|.$$
3. 
$$\int \frac{dx}{(x+a)^q(x+b)^r} = - \frac{1}{(r-1)(a-b)(x+a)^{q-1}(x+b)^{r-1}} -$$

$$- \frac{q+r-2}{(r-1)(a-b)} \int \frac{dx}{(x+a)^q(x+b)^{r-1}}.$$
4. 
$$= \frac{1}{(q-1)(a-b)(x+a)^{q-1}(x+b)^{r-1}} +$$

$$+ \frac{q+r-2}{(q-1)(a-b)} \int \frac{dx}{(x+a)^{q-1}(x+b)^r}.$$
5. 
$$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n} = \frac{(-1)^{m+n-2}}{(b-a)^{m+n-1}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n-1}}^{m+n-2} \frac{(-1)^k}{n-k-1} C_{m+n-2}^k \times$$

$$\times \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^{n-k-1} + \frac{(-1)^{m-1}}{(b-a)^{m+n-1}} C_{m+n-2}^{n-1} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|.$$
6. 
$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k} C_{m+n-k-2}^{n-1}}{k(b-a)^{m+n-k-1}(x+a)^k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^m C_{m+n-k-2}^{m-1}}{k(b-a)^{m+n-k-1}(x+b)^k} +$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{(b-a)^{m+n-1}} C_{m+n-1}^{n-1} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|.$$
7. 
$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = - \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|.$$
8. 
$$\int \frac{x dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} (a \ln|x+a| - b \ln|x+b|).$$
9. 
$$\int \frac{x^2 dx}{(x+a)(x+b)} = x + \frac{1}{a-b} (b^2 \ln|x+b| - a^2 \ln|x+a|).$$
10. 
$$\int \frac{dx}{x(x+a)(x+b)} = \frac{1}{ab} \ln|x| + \frac{1}{a(a-b)} \ln|x+a| - \frac{1}{b(a-b)} \ln|x+b|.$$
11. 
$$\int \frac{dx}{x^2(x+a)(x+b)} =$$

$$= - \frac{1}{abx} - \frac{a+b}{a^2 b^2} \ln|x| - \frac{1}{a^2(a-b)} \ln|x+a| + \frac{1}{b^2(a-b)} \ln|x+b|.$$

12. 
$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)^2} = -\frac{1}{(a-b)(x+b)} + \frac{1}{(a-b)^2} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|.$$
13. 
$$\int \frac{x dx}{(x+a)(x+b)^2} = \frac{b}{(a-b)(x+b)} - \frac{a}{(a-b)^2} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|.$$
14. 
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x+a)(x+b)^2} &= \\ &= -\frac{b^2}{(a-b)(x+b)} + \frac{a^2}{(a-b)^2} \ln |x+a| + \frac{b^2-2ab}{(a-b)^2} \ln |x+b|. \end{aligned}$$
15. 
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x+a)(x+b)^2} &= \\ &= \frac{1}{b(a-b)(x+b)} + \frac{1}{ab^2} \ln |x| - \frac{1}{a(a-b)^2} \ln |x+a| + \frac{2b-a}{b^2(a-b)} \ln |x+b|. \end{aligned}$$
16. 
$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = -\frac{1}{(a-b)^2} \left( \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} \right) + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|.$$
17. 
$$\int \frac{x dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2} \left( \frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} \right) - \frac{a+b}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|.$$
18. 
$$\int \frac{x^2 dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = -\frac{1}{(a-b)^2} \left( \frac{a^2}{x+a} + \frac{b^2}{x+b} \right) + \frac{2ab}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|.$$

**2.8. Интегралы вида**  $\int x^{\pm m}(ax^2+bx+c)^n dx$ .

1. 
$$\int (ax^2+bx+c)^n dx = \frac{1}{2(2n+1)a} \left[ (2ax+b)(ax^2+bx+c)^n - n(b^2-4ac) \int (ax^2+bx+c)^{n-1} dx \right].$$
2. 
$$\begin{aligned} &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{2ax+b}{2a} \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2k}^k \left( \frac{b^2-4ac}{a} \right)^{n-k} (ax^2+bx+c)^k. \end{aligned}$$
3. 
$$\begin{aligned} \int \frac{(ax^2+bx+c)^n}{x^m} dx &= -\frac{(ax^2+bx+c)^{n+1}}{(m-1)cx^{m-1}} + \\ &+ \frac{b(n-m+2)}{c(m-1)} \int \frac{(ax^2+bx+c)^n}{x^{m-1}} dx + \frac{a(2n-m+3)}{c(m-1)} \int \frac{(ax^2+bx+c)^n}{x^{m-2}} dx. \end{aligned}$$

**2.9. Интегралы вида**  $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ .

1. 
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} &= \frac{-2ax-b}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \\ &- \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2-4ac)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. &= \frac{2ax + b}{2n - 1} \times \\
&\times \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^k(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k-1)a^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)(4ac-b^2)^{k+1}(ax^2+bx+c)^{n-k-1}} + \\
&\quad + \frac{(2n-3)!!(2a)^{n-1}}{(n-1)!(4ac-b^2)^{n-1}} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}. \\
3. &\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| \quad [b^2-4ac > 0]. \\
4. &= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad [b^2-4ac < 0]. \\
5. &= -\frac{2}{2ax+b} \quad [b^2=4ac]. \\
6. &= \frac{1}{a(p-q)} \ln \left| \frac{x-p}{x-q} \right|,
\end{aligned}$$

где  $p, q$  — действительные корни многочлена  $ax^2 + bx + c$ .

$$\begin{aligned}
7. &\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2a}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}. \\
8. &\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^3} = \frac{2ax+b}{2(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^2} + \\
&\quad + \frac{3a(2ax+b)}{(4ac-b^2)^2(ax^2+bx+c)} + \frac{6a^2}{(4ac-b^2)^2} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.
\end{aligned}$$

**2.10. Интегралы вида**  $\int \frac{x^m dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ .

$$\begin{aligned}
1. &\int \frac{x^m dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{-x^{m-1}}{(2n-m-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\
&\quad + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-2} dx}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-1} dx}{(ax^2+bx+c)^n}. \\
2. &\int \frac{x^{2n-1} dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3} dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-3} dx}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2} dx}{(ax^2+bx+c)^n}. \\
3. &\int \frac{x dx}{(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{2(n-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}. \\
4. &= \frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\
&\quad + \frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}. \\
5. &\int \frac{x^2 dx}{(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{(b^2-2ac)(2ax+b) - b(b^2-4ac)}{2(n-1)a^2(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \\
&\quad - \frac{2(2n-3)(b^2-2ac) - 2(n-1)(b^2-4ac)}{2(n-1)a(b^2-4ac)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

6. 
$$\int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| -$$

$$- \frac{b}{a\sqrt{|b^2 - 4ac|}} \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| & [b^2 > 4ac], \\ \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} & [b^2 < 4ac]. \end{cases}$$
7. 
$$\int \frac{x^2 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$
8. 
$$\int \frac{x^3 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{ax^2 - 2bx}{2a^2} +$$

$$+ \frac{b^2 - ac}{2a^3} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b(b^2 - 3ac)}{2a^3} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$
9. 
$$\int \frac{x dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{bx + 2c}{(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)} + \frac{b}{b^2 - 4ac} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$
10. 
$$\int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^2} =$$

$$= \frac{(2ac - b^2)x - bc}{a(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)} - \frac{2c}{b^2 - 4ac} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$
11. 
$$\int \frac{x^3 dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{c(2ac - b^2) + b(3ac - b^2)x}{a^2(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} +$$

$$+ \frac{1}{2a^2} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{b(6ac - b^2)}{2a^2(b^2 - 4ac)} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

2.11. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{x^m(ax^2 + bx + c)^n}.$

1. 
$$\int \frac{dx}{x^m(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{1}{(m-1)c x^{m-1}(ax^2 + bx + c)^{n-1}} -$$

$$- \frac{(m+n-2)b}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2 + bx + c)^n} -$$

$$- \frac{(m+2n-3)a}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2 + bx + c)^n}.$$
2. 
$$\int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{1}{2(n-1)c(ax^2 + bx + c)^{n-1}} -$$

$$- \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^{n-1}}.$$
3. 
$$\int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} -$$

$$- \frac{b}{c\sqrt{|b^2 - 4ac|}} \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| & [b^2 > 4ac], \\ \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{|4ac - b^2|}} & [b^2 < 4ac]. \end{cases}$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2(ax^2 + bx + c)} = -\frac{1}{cx} - \frac{b}{2c^2} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} + \frac{b^2 - 2ac}{2c^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^3(ax^2 + bx + c)} = \frac{2bx - c}{2c^2x^2} + \frac{b^2 - ac}{2c^3} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} + \frac{b(3ac - b^2)}{2c^3} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

$$6. \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{1}{2c(ax^2 + bx + c)} \left[ 1 + \frac{b(b + 2ax)}{b^2 - 4ac} \right] + \frac{1}{2c^2} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} - \frac{b}{2c^2} \left( 1 - \frac{2ac}{b^2 - 4ac} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^2(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{(b^2 - 3ac)(b + 2ax)}{c^2(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} - \frac{c + bx}{c^2x(ax^2 + bx + c)} - \frac{b}{c^3} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} + \frac{1}{b^2 - 4ac} \left( \frac{b^4}{c^3} - \frac{6b^2a}{c^2} + \frac{6a^2}{c} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^3(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{3bx - c}{2c^2x^2(ax^2 + bx + c)} + \frac{3b^2 - 2ac}{c^2} \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{9ab}{2c^2} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2}.$$

**2.12.** Интегралы вида  $\int (x + d)^{\pm m} (ax^2 + bx + c)^n dx$ .

$$1. \int (x + d)^m (ax^2 + bx + c)^n dx = \frac{1}{(m + 2n + 1)a} \left[ (x + d)^{m-1} (ax^2 + bx + c)^{n+1} + (m + n)(2ad - b) \int (x + d)^{m-1} (ax^2 + bx + c)^n dx - (m - 1)(ad^2 - bd + c) \int (x + d)^{m-2} (ax^2 + bx + c)^n dx \right].$$

$$2. \int \frac{(ax^2 + bx + c)^n}{(x + d)^m} dx = -\frac{(ax^2 + bx + c)^n}{(m - 2n - 1)(x + d)^{m-1}} - \frac{2n(ad^2 - bd + c)}{m - 2n - 1} \int \frac{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}{(x + d)^m} dx - \frac{n(b - 2ad)}{m - 2n - 1} \int \frac{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}{(x + d)^{m-1}} dx.$$

$$3. = \frac{-1}{(m - 1)(ad^2 - bd + c)} \left[ \frac{(ax^2 + bx + c)^{n+1}}{(x + d)^{m-1}} + (m - n - 2)(b - 2ad) \int \frac{(ax^2 + bx + c)^n}{(x + d)^{m-1}} dx + (m - 2n - 3)a \int \frac{(ax^2 + bx + c)^n}{(x + d)^{m-2}} dx \right].$$



$$4. \quad = -\frac{(ax^2 + bx + c)^n}{(m-1)(x+d)^{m-1}} + \\ + \frac{n(b-2ad)}{m-1} \int \frac{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}{(x+d)^{m-1}} dx + \frac{2na}{m-1} \int \frac{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}{(x+d)^{m-2}} dx.$$

$$5. \quad \int \frac{(ax^2 + bx + c)^n}{x+d} dx = (ad^2 - bd + c)^n \ln|x+d| + \\ + \int (ax + b - ad) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (ad^2 - bd + c)^{n-k-1} (ax^2 + bx + c)^k \right] dx.$$

**2.13.** Интегралы вида  $\int \frac{(x+d)^m dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ .

$$1. \quad \int \frac{(x+d)^m dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \\ = \frac{(2ad-b)(2ax+b) + 4ac - b^2}{2(n-1)(4ac-b^2)(ad^2 - bd + c)} \frac{(x+d)^{m+1}}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \\ + \frac{2(m-2n+4)a}{(n-1)(n-2)(4ac-b^2)(ad^2 - bd + c)} \frac{(x+d)^{m+1}}{(ax^2 + bx + c)^{n-2}} + \\ + \left[ \frac{4(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)} - \frac{2(m-n+2)}{(n-1)(ad^2 - bd + c)} \right] \int \frac{(x+d)^m dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \\ - \frac{2(m-2n+4)(m-2n+5)a}{(n-1)(n-2)(4ac-b^2)(ad^2 - bd + c)} \int \frac{(x+d)^m dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-2}}.$$

$$2. \quad = \frac{1}{(m-2n+1)a} \left[ \frac{(x+d)^{m-1}}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + (m-n)(2ad-b) \times \right. \\ \left. \times \int \frac{(x+d)^{m-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^n} - (m-1)(ad^2 - bd + c) \int \frac{(x+d)^{m-2} dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \right].$$

$$3. \quad = \frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)} \left[ \frac{(2ax+b)(x+d)^m}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \right. \\ \left. - 2(m-2n+3)a \int \frac{(x+d)^m dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - m(b-2ad) \int \frac{(x+d)^{m-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \right].$$

$$4. \quad \int \frac{(x+d) dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| + \\ + \frac{2ad-b}{a\sqrt{|b^2-4ac|}} \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & [b^2 < 4ac], \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| & [b^2 > 4ac]. \end{cases}$$

$$5. \quad \int \frac{(x+d)^2 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x}{a} + \frac{ad^2 - c}{a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} + \frac{2ad-b}{a} \int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c}.$$

$$6. \quad \int \frac{(x+d) dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{(b-2ad)x + 2c - bd}{(b^2-4ac)(ax^2 + bx + c)} + \frac{b-2ad}{b^2-4ac} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

**2.14. Интегралы вида**  $\int \frac{dx}{(x+d)^m(ax^2+bx+c)^n}$ .

1. 
$$\int \frac{dx}{(x+d)^m(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{(m-1)(ad^2-bd+c)} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{(x+d)^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} + (m+n-2)(b-2ad) \times \right.$$

$$\times \int \frac{dx}{(x+d)^{m-1}(ax^2+bx+c)^n} +$$

$$\left. + (m+2n-3)a \int \frac{dx}{(x+d)^{m-2}(ax^2+bx+c)^n} \right].$$
2. 
$$= \frac{1}{2(ad^2-bd+c)} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{(n-1)(x+d)^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} + 2(ad-b) \times \right.$$

$$\times \int \frac{dx}{(x+d)^{m-1}(ax^2+bx+c)^n} + \frac{m+2n-3}{n-1} \int \frac{dx}{(x+d)^m(ax^2+bx+c)^{n-1}} \left. \right].$$
3. 
$$= \frac{1}{(m+n-1)(2ad-b)} \left[ \frac{1}{(x+d)^m(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + (m+2n-2)a \int \frac{dx}{(x+d)^{m-1}(ax^2+bx+c)^n} \right] \quad [ad^2-bd+c=0].$$
4. 
$$\int \frac{dx}{(x+d)(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{ad^2-bd+c} \left[ \frac{1}{2(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + \left(ad - \frac{b}{2}\right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} + \int \frac{dx}{(x+d)(ax^2+bx+c)^{n-1}} \right].$$
5. 
$$\int \frac{dx}{(x+d)(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2(ad^2-bd+c)} \ln \frac{(x+a)^2}{|ax^2+bx+c|} +$$

$$+ \frac{2ad-b}{2(ad^2-bd+c)\sqrt{|b^2-4ac|}} \begin{cases} 2 \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & [b^2 < 4ac], \\ \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| & [b^2 > 4ac]. \end{cases}$$
6. 
$$\int \frac{dx}{(x+d)^2(ax^2+bx+c)} =$$

$$= -\frac{1}{ad^2-bd+c} \left[ \frac{1}{x+d} + \frac{2ad-b}{2(ad^2-bd+c)} \ln \frac{(x+a)^2}{|ax^2+bx+c|} + \right.$$

$$\left. + \frac{2c(ad^2-bd+c)-2ad+b^2}{2(ad^2-bd+c)^2} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \right].$$

**2.15. Интегралы вида**  $\int \frac{x^m dx}{(x^2+a^2)^n}$ .

1. 
$$\int \frac{x^m dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x^{m+1}}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{m-2n+3}{2(n-1)a^2} \int \frac{x^m dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$
2. 
$$= \frac{x^{m-1}}{(m-2n+1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{(m-1)a^2}{m-2n+1} \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

3. 
$$= -\frac{x^{m-1}}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{m-1}{2(n-1)} \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$
4. 
$$= \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2+a^2)^n}.$$
5. 
$$\int \frac{x^{2m} dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x^{2m+1}}{2(n-1)a^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(2n-2m-3)(2n-2m-5)\dots(2n-2m-2k-1)}{2^k(n-2)(n-3)\dots(n-k-1)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{a^{2k}(x^2+a^2)^{n-k-1}} \right] +$$

$$+ (-1)^m a^{2m-2n+1} \frac{(2n-2m-3)(2n-2m-5)\dots(3-2m)(1-2m)}{2^{n-1}(n-1)!} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{2k-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right].$$
6. 
$$\int \frac{x^{2m+1} dx}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k \frac{a^{2k}}{(n-m+k-1)(x^2+a^2)^{n-m+k-1}}.$$
7. 
$$= \frac{1}{2a^{2(n-m-1)}} \sum_{k=0}^{n-m-2} \frac{(-1)^k}{m+k+1} C_{n-m-2}^k \left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)^{m+k+1}$$

$$[n \geq m+2].$$
8. 
$$\int \frac{x^{2m} dx}{x^2+a^2} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{a^{2k} x^{2m-2k-1}}{2m-2k-1} + (-1)^m a^{2m-1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$
9. 
$$\int \frac{x^{2m+1} dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m-k} a^{2k} x^{2m-2k} + \frac{(-a^2)^m}{2} \ln(x^2+a^2).$$
10. 
$$\int \frac{x^{2m} dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x^{2m+1}}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{2m-1}{2} a^{2m-3} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{m+k}}{2k-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1} + (-1)^m \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right].$$
11. 
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$
12. 
$$= \frac{x}{2n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)}{2^k(n-1)(n-2)\dots(n-k)a^{2k}(x^2+a^2)^{n-k}} +$$

$$+ \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!a^{2n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$
13. 
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$
14. 
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$15. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2 + a^2)} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$16. \int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2).$$

$$17. \int \frac{x^2 dx}{x^2 + a^2} = x - a \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$18. \int \frac{x^3 dx}{x^2 + a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln|x^2 + a^2|.$$

$$19. \int \frac{x^4 dx}{x^2 + a^2} = \frac{x^3}{3} - a^2 x + a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$20. \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2 + a^2)}.$$

$$21. \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$22. \int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2).$$

$$23. \int \frac{x^4 dx}{(x^2 + a^2)^2} = x + \frac{a^2 x}{2(x^2 + a^2)} - \frac{3a}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

2.16. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{x^m(x^2 + a^2)^n}$ .

$$1. \int \frac{dx}{x^{2m}(x^2 + a^2)^n} = -\frac{1}{(2m-1)a^2 x^{2m-1}(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{2m+2n-3}{(2m-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{2m-2}(x^2 + a^2)^n}.$$

$$2. = \frac{1}{(2m+2n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} \times \\ \times \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k (2m+2n-1)(2m+2n-3) \dots (2m+2n-2k+1)}{(2m-1)(2m-3) \dots (2m-2k+1)a^{2k}} \frac{1}{x^{2m-2k+1}} + \\ + (-1)^m \frac{(2n-1)(2n+1) \dots (2n+2m-3)}{(2m-1)! a^{2m}} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad [\text{см. 2.15.11-12}].$$

$$3. \int \frac{dx}{x^{2m+1}(x^2 + a^2)^n} = \\ = -\frac{1}{2ma^2 x^{2m}(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{m+n-1}{ma^2} \int \frac{dx}{x^{2m-1}(x^2 + a^2)^n}.$$

$$4. = \frac{1}{2(-a^2)^{m+n}} \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{(-1)^k}{k-n+1} C_{m+n-1}^k \left( \frac{x^2 + a^2}{x^2} \right)^{k-n+1}.$$

$$5. \int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

$$6. = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)a^{2k}(x^2 + a^2)^{n-k}} + \frac{1}{2a^{2n}} \ln \frac{x^2}{x^2 + a^2}.$$