КЛАССИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ
МАТЕМАТИКА

И.М. Гельфанд
Д.А. Райков
Г.Е. Шилов

КОММУТАТИВНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2011

УДК 512.2
ББК 22.144
Г 32

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 10-01-07053

Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. **Коммутативные нормированные кольца.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 260 с. — ISBN 978-5-9221-1331-1.

В предлагаемой книге излагается теория коммутативных нормированных колец с ее применениями к анализу и топологии. В конце книги в виде приложения воспроизведена статья И.М. Гельфанда и М.А. Наймарка «Нормированные кольца с инволюцией и их представления», могущая служить введением в теорию некоммутативных нормированных колец с инволюцией.

Книга рассчитана на математиков (студентов старших курсов, аспирантов и научных работников), занимающихся функциональным анализом и его приложениями.

ISBN 978-5-9221-1331-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I

ЧАСТЬ II

ЧАСТЬ III

Предисловие

Настоящая книга посвящена изложению одного из разделов функционального анализа — теории коммутативных нормированных колец с главнейшими ее применениями. В основе книги лежит наша статья, написанная для «Успехов математических наук» в 1940 г. по горячим следам событий начального периода развития этой теории. Обстоятельства военного времени сильно задержали опубликование статьи; она была напечатана лишь в 1946 г. и притом из-за недостатка места в сокращенном виде. В настоящей книге восстановлены (вернее, заново написаны) некоторые опущенные разделы этой статьи (относящиеся к гармоническому анализу на группах и регулярным кольцам) и изложен ряд результатов, полученных уже после опубликования статьи. Кроме того, отчасти в связи с этим, существенно переделана и бóльшая часть старого текста.

Книга состоит из трех частей. Часть I, посвященная общей теории коммутативных нормированных колец, разбита на две главы, первая из которых содержит основы теории, вторая же посвящена более специальным ее вопросам. Наиболее существенным новшеством является здесь распространение операционного исчисления на неоднолистные аналитические функции от нескольких переменных (§ 13). Часть II, посвященная применениям к гармоническому анализу, распадается на три главы. В первой из них (гл. III) рассматривается кольцо абсолютно интегрируемых функций на прямой со свертыванием в качестве умножения и находятся максимальные идеалы этого кольца (а также некоторых его аналогов). В следующей главе (гл. IV) эти результаты переносятся на произвольные коммутативные локально бикомпактные группы и кладутся в основу построения гармонического анализа и теории характеров; новшеством являются здесь построение инвариантной меры на группе характеров и доказательство формул обращения для преобразования Фурье, совершенно не основывающиеся на теоремах о представлении положительно определенных функций или положительных функционалов; в связи с этим и рассмотрение положительно определенных функций перенесено в самый конец главы. Наконец, последняя глава второй части (гл. V) — наиболее специальная из всех глав книги — посвящена исследованию кольца функций с ограниченным изменением на прямой с умножением, определенным как свертывание; основным добавлением к старому тексту является здесь полное описание максимальных идеалов этого кольца. Последняя часть книги — третья — распадается на две главы, посвященные рассмотрению двух важных классов колец функций: регулярных колец (гл. VI) и колец с равномерной сходимостью (гл. VII). В первой из этих глав изучается в основном строение идеалов в регулярных кольцах;

в качестве одного из применений доказывается в обобщенном виде известная тауберова теорема Винера; глава заключается найденным Л. Шварцем примером кольца функций, обладающего замкнутыми идеалами, непредставимыми в виде пересечения максимальных идеалов. В последней главе (гл. VII) рассматриваются кольца $C(S)$ всех ограниченных непрерывных комплексных функций на вполне регулярных пространствах S и различные их подкольца; первый параграф воспроизводит здесь (хотя и в совершенно новой редакции) результаты, содержавшиеся в статье: установление естественного соответствия между бикомпактными расширениями вполне регулярного пространства S и симметричными подкольцами кольца $C(S)$; остальные два параграфа (посвященные произвольным подкольцам колец $C(S)$ и их идеалам) содержат преимущественно новые результаты [1]).

Поскольку для теоретико-групповых применений важны некоммутативные нормированные кольца с инволюцией, в конце книги в виде приложения воспроизводится с некоторыми сокращениями статья И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка «Нормированные кольца с инволюцией и их представления». Читатель, желающий подробнее ознакомиться с теорией некоммутативных нормированных колец, может найти обстоятельное изложение ее в большой монографии М. А. Наймарка «Нормированные кольца». Эта монография содержит также изложение основ теории коммутативных нормированных колец, не касаясь, однако, большинства ее аналитических применений. То же замечание можно сделать и по поводу книги Л. Люмиса «Введение в абстрактный гармонический анализ».

У читателя предполагается знание элементов теории нормированных пространств и теоретико-множественной топологии. Для понимания четвертой главы требуется еще знать, что такое топологическая группа. Разумеется, основные понятия теории меры и интеграла Лебега также предполагаются известными.

Чтобы не прерывать изложения, историко-литературные указания выделены в конец книги. Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, приложенному к историко-литературным указаниям.

И. М. Гельфанд,
Д. А. Райков,
Г. Е. Шилов

[1]) Зависимость между главами книги такова. На главу I существенно опираются все дальнейшие главы. От главы II зависят лишь глава VI (опирающаяся на § 9) и одно место § 44 (глава VII), опирающееся на § 14; кроме того, в мелком шрифте главы III имеются две ссылки на § 13. От главы III зависят главы IV и V (опирающиеся на §§ 16 и 17) и мелкий шрифт главы VI (где в § 41 имеется ссылка также на § 19). Главы IV и V независимы, и дальнейшие главы на них не опираются. На главу VI опираются последние два параграфа главы VII.

ЧАСТЬ I

Глава 1

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОММУТАТИВНЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ

§ 1. Понятие нормированного кольца

Определение 1. *Нормированным кольцом* [1]) называется комплексное банаховское пространство, для элементов которого определено ассоциативное умножение, перестановочное с умножением на комплексные числа, дистрибутивное относительно сложения и непрерывное по каждому множителю.

В дальнейшем мы будем предполагать, что *умножение коммутативно*.

Каждое нормированное кольцо, не содержащее единицы e относительно умножения, можно дополнить до нормированного кольца с единицей, формально присоединив последнюю, т. е. образовав кольцо формальных сумм $\lambda e + x$, где λ пробегает все комплексные числа, x — все элементы рассматриваемого кольца, а e есть присоединенная единица; операции в расширенном кольце определяются естественным

[1]) В другой терминологии: *банаховской алгеброй*. Всюду в дальнейшем под «кольцом» понимается алгебра над телом комплексных чисел.

образом:

$$(\lambda e + x) + (\mu e + y) = (\lambda + \mu)\, e + (x + y),$$
$$\mu(\lambda e + x) = \mu\lambda e + \mu x,$$
$$(\lambda e + x)(\mu e + y) = \lambda\mu e + (\mu x + \lambda y + xy),$$

норма же задается формулой

$$\|\lambda e + x\| = |\lambda| + \|x\|.$$

Поэтому при построении общей теории нормированных колец можно ограничиться рассмотрением *нормированных колец с единицей*, что мы и будем делать.

Приведем несколько примеров нормированных колец.

1°. Пусть C — пространство всех комплексных функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0, 1]$, наделенное нормой $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$. C есть нормированное кольцо (с единицей $x(t) \equiv 1$) относительно обычного умножения (очевидно, удовлетворяющего всем условиям определения 1).

2°. Пусть D_n — пространство всех комплексных функций, определенных и обладающих непрерывной n-й производной на отрезке $[0, 1]$, наделенное нормой

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(k)}(t)|. \tag{1}$$

D_n есть нормированное кольцо (с единицей $x(t) \equiv 1$) относительно обычного умножения (которое, как нетрудно проверить, непрерывно в норме (1) по совокупности обоих сомножителей и, очевидно, удовлетворяет также всем остальным условиям определения 1).

3°. Пусть W — пространство всех комплексных функций вещественного переменного, разложимых в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд, наделенное нормой

$$\|z\| = \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \right\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \tag{2}$$

(однозначно определяемой вместе с этим рядом его суммой $z = z(t)$). Если

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} \in W \quad \text{и} \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_l e^{ilt} \in W,$$

то также $z(t) = x(t)y(t) \in W$. Действительно, произведение абсолютно сходящихся рядов $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$ и $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} b_l e^{ilt}$ есть абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, где

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{n-l} b_l.$$

Так как при этом

$$\begin{aligned}\|z\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_{n-l}|\,|b_l| =\\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n-l}| \right) |b_l| =\\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \sum_{l=-\infty}^{\infty} |b_l| = \|x\|\,\|y\|,\end{aligned}$$

то умножение непрерывно в норме (2) по совокупности обоих сомножителей. Тем самым W есть нормированное кольцо (с единицей $x(t) \equiv 1$) относительно обычного умножения.

4°. Пусть $I^{(n)}$ — кольцо с единицей, порожденное оператором дифференцирования D в пространстве полиномов степени $\leqslant n$ от одного переменного с комплексными коэффициентами. Так как $D^{n+1} = 0$, то элементами этого кольца являются всевозможные полиномы $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^k$, где a_k — произвольные комплексные числа и D^0 — единичный оператор. Положим

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \right\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Тогда $I^{(n)}$ будет нормированным кольцом относительно умножения операторов с единицей $e = D^0$.

5°. Пусть $L^1(0,\,1)$ — пространство всех абсолютно интегрируемых измеримых комплексных функций на отрезке $[0,\,1]$, наделенное нормой $\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt$. С помощью теоремы Фубини о связи двойного интеграла Лебега с повторными можно показать, что, каковы бы ни были функции $x(t)$ и $y(t)$ из $L^1(0,\,1)$, их «свертка»

$$(x * y)(t) = \int_0^t x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{3}$$

существует почти для всех t и принадлежит $L^1(0,\,1)$, а операция «свертывания» (3) ассоциативна [1]. Эта операция, очевидно, билинейна,

[1] Подробнее об этом см. § 16.

а подстановка $\tau \to t - \tau$ показывает, что она также коммутативна. При этом (снова на основании теоремы Фубини)

$$\begin{aligned}\|x * y\| &= \int_0^1 \left| \int_0^t x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \right| dt \leqslant \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^t |x(t-\tau)|\, |y(\tau)|\, d\tau \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left(\int_\tau^1 |x(t-\tau)|\, dt \right) |y(\tau)|\, d\tau = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-\tau} |x(t)|\, dt \right) |y(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_0^1 |x(t)|\, dt \int_0^1 |y(\tau)|\, d\tau = \\ &= \|x\|\, \|y\|,\end{aligned}$$

откуда следует, что свертывание непрерывно по совокупности обоих «сомножителей». Таким образом, $L^1(0, 1)$ есть нормированное кольцо относительно свертывания. Легко видеть, что оно не содержит единицы [1]. *Нормированное кольцо, полученное путем формального присоединения к* $L^1(0, 1)$ *единицы, мы будем обозначать* I.

6°. Пусть A — пространство всех функций комплексного переменного ζ, определенных и непрерывных в круге $|\zeta| \leqslant 1$ и регулярных всюду внутри этого круга, наделенное нормой $\|x\| = \max\limits_{|\zeta| \leqslant 1} |x(\zeta)|$. A есть нормированное кольцо (с единицей $x(\zeta) \equiv 1$) относительно обычного умножения (очевидно, удовлетворяющего всем условиям определения 1).

Как было выше установлено, в кольцах примеров 3° и 5° норма обладает следующим свойством:

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\, \|y\|. \tag{4}$$

Тому же неравенству, очевидно, удовлетворяет норма также в кольцах примеров 1°, 4° и 6°. Однако в примере 2° при $n \geqslant 2$ неравенство (4), вообще говоря, не выполняется; так, для $x(t) \equiv t$ имеем: $\|x(t)\| = 2$, $\|x^2(t)\| = 5 > \|x(t)\|^2$.

Но если вместо (1) взять в D_n в качестве нормы

$$\|x(t)\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(k)}(t)|}{k!}, \tag{5}$$

[1] Ср. § 16. Отсутствие в кольце $L^1(0, 1)$ единицы следует также из того, что это кольцо состоит из обобщенных нульстепенных элементов (см. с. 27).

то неравенство (4), как в этом нетрудно убедиться, окажется уже выполненным. При этом нормы (1) и (5) *топологически эквивалентны*. Возможность такой перенормировки является общим свойством нормированных колец.

Теорема 1. *Для каждого нормированного кольца R можно найти топологически и алгебраически изоморфное ему кольцо R', обладающее свойствами*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\| \quad \text{и} \quad \|e\| = 1. \tag{$*$}$$

Доказательство. Каждый элемент x кольца R порождает оператор A_x умножения на x: $A_x y = xy$. В силу определения 1 этот оператор является линейным. Операторы A_x образуют в кольце Q всех линейных операторов, отображающих банаховское пространство R в себя, подкольцо R' с единицей (а именно, единичным оператором E, порождаемым единицей e кольца R).

Покажем, что R' есть нормированное кольцо относительно нормы $\|A_x\| = \sup\limits_{\|y\|\leqslant 1} \|xy\|$. В доказательстве нуждается лишь полнота R', т. е. замкнутость R в Q.

В силу ассоциативности умножения имеем: $A_x(yz) = x(yz) = (xy)\,z = A_x y \cdot z$. Нетрудно видеть, что это свойство характеристично для операторов из кольца R'. Действительно, если оператор A таков, что для любых y и z имеет место равенство $A(yz) = Ay \cdot z$, то, полагая $Ae = x$, имеем: $Ay = A(ey) = Ae \cdot y = xy$, т. е. A есть оператор умножения на x.

Пусть теперь операторы $A_n \in R'$ сильно сходятся к некоторому оператору A, т. е. $A_n x$ сходится к Ax по норме пространства R для каждого $x \in R$. Тогда, в силу непрерывности умножения по первому множителю, имеем: $A(xy) = \lim A_n(xy) = \lim A_n x \cdot y = Ax \cdot y$ и, значит, по только что доказанному, также $A \in R'$. Таким образом, R' замкнуто в Q не только в смысле равномерной, но и в смысле сильной сходимости операторов.

Очевидно, кольца R и R' алгебраически изоморфны. Покажем, что они изоморфны также топологически. Имеем [1]):

$$\|A_x\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|xy\| \geqslant \left\| x\frac{e}{\|e\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|e\|}$$

или

$$\|x\| \leqslant \|e\|\,\|A_x\|. \tag{6}$$

Таким образом, отображение $A_x \to x$ пространства R' на пространство R непрерывно. Но так как оба эти пространства полны, то, в силу известной теоремы Банаха [2]), также обратное отображение $x \to A_x$ непрерывно. Тем самым топологический изоморфизм колец R и R' доказан, а с ним доказано и утверждение теоремы, так как норма в R' обладает свойством $(*)$. Одновременно мы получили, что *каждое нормированное кольцо топологически и алгебраически*

[1]) Легко проверить, что $e \neq 0$ и потому $\|e\| > 0$.

[2]) См. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. — М.–Л., 1951, с. 146–149, или А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. — М., 1954, с. 123–126.

изоморфно некоторому нормированному кольцу операторов в банаховском пространстве.

З а м е ч а н и е. Если в кольце R выполнено условие $(*)$, то R и R' изометричны. Действительно, (6) в этом случае дает: $\|x\| \leqslant \|A_x\|$. С другой стороны, в силу (4), имеем:

$$\|A_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|xy\| \leqslant \|x\| \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|y\| = \|x\|.$$

Соединяя оба неравенства, получаем: $\|A_x\| = \|x\|$.

С л е д с т в и е 1. *Произведение xy непрерывно по совокупности обоих сомножителей.*

О п р е д е л е н и е 2. Ряд $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ будем называть *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\| + \ldots.$$

Очевидно, каждый абсолютно сходящийся ряд в R сходится.

С л е д с т в и е 2. *Абсолютно сходящиеся ряды, составленные из элементов нормированного кольца, можно складывать и перемножать так же, как и абсолютно сходящиеся числовые ряды.*

В дальнейшем *мы будем всюду предполагать, что норма удовлетворяет условию* $(*)$.

§ 2. Максимальные идеалы

Л е м м а. *Множество O всех элементов x нормированного кольца R, для которых существует обратный элемент x^{-1}, открыто, причем x^{-1} есть непрерывная функция от x на O.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего *каждый элемент x, для которого $\|e - x\| < 1$, обладает обратным элементом x^{-1}*. Действительно, рассмотрим ряд

$$e + (e - x) + (e - x)^2 + \ldots. \tag{1}$$

Так как $\|(e - x)^n\| \leqslant \|e - x\|^n$, то этот ряд абсолютно сходится и, следовательно, представляет какой-то элемент из R. Умножив его на $x = e - (e - x)$ и применив следствие 2 теоремы 1 § 1, получим:

$$e + (e - x) + (e - x)^2 + \ldots - (e - x) - (e - x)^2 - \ldots = e.$$

Следовательно, сумма ряда (1) и есть обратный элемент x^{-1}, существование которого мы утверждали.

Пусть теперь x — произвольный элемент из O. Обозначим через $U_0(e)$ окрестность $\|e - y\| < 1$ единичного элемента e, по доказанному, содержащуюся в O. Так как $xx^{-1} = e$, то, в силу непрерывности умножения, существует такая окрестность $U(x)$ элемента x, что $U(x)\,x^{-1} \subset U_0(e)$. Значит, zx^{-1} для произвольного $z \in U(x)$ имеет обратный элемент $(zx^{-1})^{-1}$: $zx^{-1}(zx^{-1})^{-1} = e$. Но тогда $x^{-1}(zx^{-1})^{-1}$

есть обратный элемент для z, т.е. вместе с x в O содержится и его окрестность $U(x)$.

Пусть, наконец, $x_n \to x \in O$. Тогда $z_n = x_n x^{-1} \to x x^{-1} = e$, и поэтому, как вытекает из выражения (1) для обратного элемента, также

$$x x_n^{-1} = z_n^{-1} = e + (e - z_n) + (e - z_n)^2 + \ldots \to e.$$

Умножив обе части этого предельного соотношения на x^{-1}, получим $x_n^{-1} \to x^{-1}$, и лемма полностью доказана.

Определение 1. Множество I элементов кольца R называется *идеалом*, если оно обладает следующими свойствами:

а) если $x \in I$ и $y \in I$, то также $x + y \in I$;

б) если $x \in I$, то $zx \in I$ для всех $z \in R$.

Идеал I кольца R называется *собственным*, если, кроме того,

в) $I \neq R$.

Примером собственного идеала кольца C примера 1° § 1 может служить совокупность всех функций из C, равных нулю на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Элемент кольца R, обладающий обратным элементом, не может содержаться ни в каком собственном идеале. Действительно, если $x \in I$, то при существовании x^{-1} мы для всякого элемента z кольца R имели бы $z = (zx^{-1})\, x \in I$, т.е. I совпадал бы с R.

С другой стороны, каждый элемент, не имеющий обратного, содержится в некотором собственном идеале, а именно, в совокупности элементов zx, где z пробегает всё R.

Таким образом, *для того чтобы элемент кольца R имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы он не принадлежал ни одному собственному идеалу*. В частности, *если кольцо R не содержит собственных идеалов, отличных от нулевого* (т.е. состоящего лишь из элемента 0), *то R есть тело.*

Нетрудно убедиться в том, что замыкание $\overline{I}$ идеала I удовлетворяет условиям а) и б) определения 1. Так как вместе с тем каждый собственный идеал I содержится в замкнутом в силу леммы множестве $R \diagdown O$, то и его замыкание $\overline{I}$ содержится в $R \diagdown O$ и, значит, не совпадает с R. Таким образом, *замыкание собственного идеала есть снова собственный идеал*.

Определение 2. *Максимальным идеалом* называется собственный идеал, не содержащийся ни в каком другом собственном идеале.

Найдем все максимальные идеалы кольца C примера 1° § 1.

Максимальный идеал кольца C есть совокупность всех функций из C, обращающихся в нуль в какой-либо фиксированной точке отрезка [0, 1].

Совокупность M_τ всех функций $x(t) \in C$, для которых $x(\tau) = 0$, является собственным идеалом кольца C. Пусть $y(t)$ — какая-нибудь функция из C, не принадлежащая M_τ. Нам нужно показать, что не существует собственного идеала, который содержал бы M_τ и $y(t)$. Но это следует из того, что всякая функция $z(t) \in C$ представима в виде

$$z(t) = \frac{z(\tau)}{y(\tau)}\, y(t) + \left(z(t) - \frac{y(t)}{y(\tau)}\, z(\tau) \right),$$

где $z(t) - \dfrac{y(t)}{y(\tau)}\, z(\tau) \in M_\tau$, а первое слагаемое кратно $y(t)$ [1]).

Пусть теперь M — какой-нибудь максимальный идеал кольца C. Покажем, что все функции, входящие в этот максимальный идеал, обращаются в нуль в некоторой фиксированной точке отрезка $[0, 1]$. В самом деле, если это не так, то для каждой точки $\tau \in [0, 1]$ найдется функция $x_\tau(t) \in M$ такая, что $x_\tau(\tau) \neq 0$ и, значит, $|x_\tau(t)| > \delta_\tau > 0$ в некотором интервале, окружающем τ. По лемме Бореля–Лебега, существует конечное число таких интервалов, покрывающих весь отрезок $[0, 1]$. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — соответствующие им точки. Функция

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\tau_1}(t)\, \overline{x_{\tau_1}(t)} + \ldots + x_{\tau_n}(t)\, \overline{x_{\tau_n}(t)} = \\ &= |x_{\tau_1}(t)|^2 + \ldots + |x_{\tau_n}(t)|^2 \end{aligned}$$

содержится в M. Но, с другой стороны, $x(t) > \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta^2_{\tau_k} > 0$ и, значит, в C существует функция $\dfrac{1}{x(t)}$, а в таком случае $x(t)$, как мы видели, не может принадлежать ни одному собственному идеалу, в частности максимальному идеалу M. Полученное противоречие показывает, что существует такая точка τ, что $x(\tau) = 0$ для всех $x(t) \in M$. Но тогда M, будучи максимальным, есть идеал M_τ, составленный из в с е х функций кольца C, обращающихся в нуль в точке τ.

Таким же точно образом убеждаемся в том, что совокупность всех абсолютно сходящихся рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, суммы которых обращаются в нуль в некоторой точке τ, образует максимальный идеал в кольце W примера 3° § 1. Но, желая повторить для кольца W приведенное выше доказательство обратного утверждения, мы пришли бы к пункту, где из того, что сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ отлична от нуля для всех t, делается заключение, что $\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \right)^{-1}$ также принадлежит кольцу W, т. е. разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд. Это заключение верно и составляет содержание одной теоремы Винера ([29], с. 14; [30], с. 91) [2]); однако ниже мы докажем его, как раз основываясь на том, что все максимальные идеалы кольца W имеют указанный вид.

З а м е ч а н и е. Пусть R — произвольное нормированное кольцо, составленное из (необязательно всех) непрерывных функций $x(t)$, заданных на бикомпакте (т. е. бикомпактном хаусдорфовом пространстве) S, с обычными

[1]) Так же можно убедиться в том, что во в с я к о м кольце функций (с обычными алгебраическими операциями) совокупность всех функций, обращающихся в нуль в одной и той же точке, образует максимальный идеал.

[2]) См. также А. З и г м у н д. Тригонометрические ряды. — М.–Л., 1939, с. 145.

сложением и умножением. C и D_n (пример 2° § 1) принадлежат этому типу; W также принадлежит, если входящие в него функции считать заданными не на прямой, а на окружности радиуса 1. Просматривая приведенные выше рассуждения, мы видим, что совокупность всех функций из R, одновременно обращающихся в нуль в какой-нибудь точке множества S, всегда является максимальным идеалом кольца R[1]; для справедливости же обратного утверждения достаточно, чтобы R обладало следующими свойствами:

а) вместе с каждой функцией $x(t)$ в R входит и комплексно сопряженная функция $\overline{x(t)}$;

б) вместе с функцией $x(t)$, нигде на S не обращающейся в нуль, в R входит и функция $\dfrac{1}{x(t)}$.

Чтобы этим устанавливалось взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами и точками множества S, нужно еще, чтобы кольцо R обладало следующим «свойством отделимости»:

в) для любых двух различных точек t_1, t_2 множества S в R существует функция $x(t)$ такая, что $x(t_1) \neq x(t_2)$.

Условие б) не только достаточно (в соединении с условием а)), но и необходимо. Условие а) не является необходимым, как мы увидим в § 4 при определении максимальных идеалов кольца A примера 6° § 1.

Так как D_n обладает свойствами а), б) и в), то заключаем, что *максимальные идеалы кольца D_n — это совокупности всех функций из D_n, обращающихся в нуль в произвольной фиксированной точке отрезка* $[0, 1]$.

Далее, кольцо $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на S, очевидным образом удовлетворяющее условиям а) и б), в силу нормальности пространства S и известной теоремы Урысона[2] обладает также свойством отделимости в). Таким образом, и *максимальные идеалы кольца $C(S)$ — это совокупности всех функций из $C(S)$, обращающихся в нуль в произвольной фиксированной точке бикомпакта S.*

Очевидно, *всякий максимальный идеал замкнут*: в противном случае он содержался бы в своем замыкании как собственная часть и, значит, не был бы максимальным.

Т е о р е м а 1. *Всякий собственный идеал I содержится в максимальном.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем с помощью трансфинитной индукции. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_\omega, \ldots, x_\alpha, \ldots$ — вполне упорядоченная трансфинитная последовательность всех элементов кольца R. Каждому не максимальному собственному идеалу I можно поставить в соответствие собственный идеал $I^+ \supset I$ следующим образом: так как I не максимальный, то существуют элементы $x \in R \diagdown I$, обладающие тем свойством, что совокупность всех элементов вида $j + rx$, где $j \in I$, $r \in R$, образует собственный идеал; пусть x_I — первый из подобных

---

[1] Притом независимо от бикомпактности пространства S и непрерывности функций $x(t)$ (см. сноску на с. 15).

[2] См., например, П. С. А л е к с а н д р о в. Введение в общую теорию функций и множеств. — М.–Л., 1948, с. 305.

элементов в последовательности $\{x_\alpha\}$; тогда полагаем $I^+ = \{j + rx_I\}$. Построим теперь трансфинитную последовательность собственных идеалов I_α следующим образом: положим $I_0 = I$ и пусть I_α построены для всех $\alpha < \beta$; если β первого класса, т. е. существует $\beta - 1$, то положим $I_\beta = I^+_{\beta-1}$; если β второго класса, то положим $I_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} I_\alpha$. Эта последовательность имеет мощность, не превосходящую мощности кольца R, и потому обладает последним членом, который тем самым и является максимальным идеалом, содержащим идеал I.

В соединении со сделанным выше замечанием об условии существования обратного элемента отсюда непосредственно следует

Теорема 2. *Для того чтобы элемент коммутативного нормированного кольца R имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы он не принадлежал ни одному максимальному идеалу. В частности, если кольцо не содержит ни одного ненулевого максимального идеала, то оно является телом.*

Элементы $x, y \in R$ называются *сравнимыми по идеалу* I, если $x - y \in I$. Так как отношение сравнимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R разбивается на классы сравнимых между собой элементов. Назвав суммой (произведением) классов X, Y класс, содержащий суммы (произведения) элементов x, y из X, Y, и обозначив через λX (λ — комплексное число) класс, составленный из элементов λx, где $x \in X$, получим кольцо R/I классов вычетов кольца R по идеалу I. Нулем этого *кольца вычетов* служит класс, образованный всеми элементами $x \in I$, а единицей E — класс, содержащий единичный элемент e кольца R.

Введем в R/I норму

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|. \tag{2}$$

Теорема 3. *Если I — замкнутый собственный идеал, то R/I есть нормированное кольцо.*

Доказательство.

1) $\|\lambda X\| = |\lambda|\,\|X\|$.

Очевидно.

2) $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$.

Имеем:

$$\|X + Y\| = \inf_{z \in X+Y} \|z\| = \inf_{x \in X,\, y \in Y} \|x + y\| \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{x \in X,\, y \in Y} (\|x\| + \|y\|) = \inf_{x \in X} \|x\| + \inf_{y \in Y} \|y\| = \|X + \|Y\|.$$

3) $\|XY\| \leqslant \|X\|\,\|Y\|$.

Имеем:

$$\|XY\| = \inf_{z\in XY} \|z\| \leqslant \inf_{x\in X,\, y\in Y} \|xy\| \leqslant \inf_{x\in X,\, y\in Y} \|x\|\,\|y\| =$$
$$= \inf_{x\in X} \|x\| \inf_{y\in Y} \|y\| = \|X\|\,\|Y\|.$$

4) $\|E\| = 1$.

Так как $e \in E$, то $\|E\| \leqslant 1$. Пусть y — произвольный элемент из E. Имеем: $y = e + x$, где $x \in I$. Если бы $\|y\|$ было меньше 1, то, как было показано в начале параграфа, x имел бы обратный и, значит, не мог бы принадлежать собственному идеалу I. Таким образом, $\|E\| \geqslant 1$ и, значит, $\|E\| = 1$.

5) Если $\|X\| = 0$, то X есть нулевой класс.

В силу (2) существует последовательность $x_n \in X$ такая, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть x — произвольный элемент класса X. Имеем: $x - x_n \in I$, и так как $x_n \to 0$, то $x = \lim\limits_{n\to\infty}(x - x_n) \in \overline{I}$. Но, по предположению, идеал I замкнут, $\overline{I} = I$. Таким образом, X совпадает с I, т. е. является нулевым классом.

6) R/I полно по норме (2).

Пусть $\{X_n\}$ — фундаментальная последовательность классов, т. е. $\|X_n - X_m\| \to 0$ при $m, n \to \infty$. Тогда из нее можно выбрать подпоследовательность $\{X_{n_k}\}$ такую, чтобы ряд $\sum\limits_k \|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\|$ сходился. В силу (2), для произвольного элемента $x_1 \in X_{n_1}$ найдется элемент $x_2 \in X_{n_2}$ такой, что $\|x_2 - x_1\| < 2\|X_{n_2} - X_{n_1}\|$; далее, для этого x_2 найдется элемент $x_3 \in X_{n_3}$ такой, что $\|x_3 - x_2\| < 2\|X_{n_3} - X_{n_2}\|$, и т. д. Очевидно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится к некоторому $x \in R$. Но тогда последовательность $\{X_{n_k}\}$, а значит и вся последовательность $\{X_n\}$, сходится к классу X, содержащему x.

Замечание 1. Гомоморфное отображение кольца R в кольцо вычетов R/I по замкнутому идеалу I, получающееся, если элементу $x \in R$ поставить в соответствие содержащий его класс X, является открытым непрерывным отображением [1]. В самом деле, пусть $U \subset R$ — открытый шар с центром в нуле: $U = \{x \in R\colon \|x\| < \delta\}$, и пусть U' — образ U в R/I. По определению нормы в кольце вычетов, этот образ составлен из тех и только тех классов $X \in R/I$, для которых $\|X\| < \delta$; следовательно, U' — открытое множество в R/I. Точно так же убедимся в том, что образ всякого открытого шара из R есть открытое множество в R/I. Так как открытые шары образуют в R определяющую систему окрестностей, то отсюда

[1] То есть образ всякого открытого множества из R является открытым множеством в R/I (отображение открытое) и полный прообраз всякого замкнутого множества из R/I является замкнутым множеством в R (отображение непрерывное).

следует, что всякое открытое множество из R имеет открытый образ в R/I. С другой стороны, пусть $F' \subset R/I$ замкнуто, F — полный прообраз F', $x_1(\in X_1)$, $x_2(\in X_2)$, $\ldots$, $x_n(\in X_n)$, $\ldots$ — фундаментальная последовательность в F, $x \in R$ — ее предел и $x \in X$. Так как $\|X - X_n\| \leqslant \|x - x_n\|$, то $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ и, следовательно, принадлежит F'; но тогда $x \in F$ и, следовательно, F замкнуто.

Замечание 2. Между замкнутыми идеалами J кольца R, содержащими замкнутый идеал I, и замкнутыми идеалами J' кольца R/I существует взаимно однозначное соответствие, при котором каждому идеалу J отвечает его образ J' в R/I.

Действительно, в силу непрерывности отображения $R \to R/I$, полный прообраз J всякого замкнутого идеала J' кольца R/I есть замкнутый идеал кольца R, очевидно, содержащий I, причем из $J_1' \neq J_2'$ следует $J_1 \neq J_2$. Обратно, образ J' всякого идеала J, содержащего I, есть идеал в кольце R/I; при этом J — полный прообраз идеала J', так как J вместе с каждым элементом x содержит все элементы, сравнимые с x по идеалу I; и так как $R \to R/I$ — открытое отображение, а при открытом отображении из замкнутости полного прообраза следует замкнутость образа, то образ J' всякого замкнутого идеала J, содержащего I, является замкнутым идеалом в R/I.

Очевидно, собственные идеалы кольца R/I являются образами собственных идеалов кольца R. В частности, максимальные идеалы кольца R/I — это образы максимальных идеалов кольца R, содержащих I.

Теорема 4. *Кольцо R/M вычетов коммутативного нормированного кольца R по максимальному идеалу M есть тело.*

Доказательство. В силу теорем 1 и 2 достаточно убедиться в том, что кольцо R/M не содержит ни одного ненулевого собственного идеала. Но если бы в R/M имелся такой идеал J, то его прообраз в R был бы собственным идеалом, содержащим идеал M и не совпадающим с ним, в противоречие с максимальностью идеала M.

Заметим, что, в силу теоремы 3, R/M есть нормированное кольцо, ибо, как мы видели выше, максимальный идеал всегда замкнут.

Нетрудно видеть, что верна и обратная теореме 4

Теорема 5. *Если кольцо R/I вычетов кольца R по собственному идеалу I есть тело, то I является максимальным идеалом. При этом заранее не предполагается, что идеал I замкнут.*

Доказательство. Если бы в кольце R существовал собственный идеал J, содержащий идеал I и не совпадающий с ним, то его образ в R/I был бы ненулевым собственным идеалом, что невозможно, так как R/I, по предположению, есть тело.

Рассмотрим кольцо вычетов кольца C по максимальному идеалу M. Так как M состоит из всех функций $x(t) \in C$, обращающихся в нуль в некоторой точке τ (см. с. 15), то каждый класс вычетов X состоит из всех функций $x(t) \in C$, принимающих в этой точке одно и то же значение λ_X.

При этом $\lambda_{X+Y} = \lambda_X + \lambda_Y$, $\lambda_{XY} = \lambda_X \lambda_Y$, $\lambda_{\mu X} = \mu\lambda_X$. Кроме того, $\|X\| = |\lambda_X|$; в самом деле, если $x(t) \in X$, то $\|x\| \geqslant |x(\tau)| = |\lambda_X|$, а, с другой стороны, функция $x(t) \equiv \lambda_X$ принадлежит классу X. Таким образом, C/M изоморфно телу комплексных чисел.

Ниже мы увидим, что этим свойством обладают все коммутативные нормированные кольца. При доказательстве этого мы используем методы теории аналитических функций.

§ 3. Абстрактные аналитические функции

Определение 1. Функцию $x(\lambda)$, определенную в некоторой области D плоскости комплексного переменного λ и принимающую значения из нормированного кольца R, мы будем называть *аналитической* в D, если для всех $\lambda \in D$ она сильно дифференцируема, т. е. отношение

$$\frac{x(\lambda+h) - x(\lambda)}{h} \tag{1}$$

сходится по норме к некоторому пределу $x'(\lambda)$, когда $h \to 0$.

Так, если обратный элемент $x(\lambda) = (z - \lambda e)^{-1}$ существует для $\lambda = \lambda_0$ (а тогда, в силу леммы § 2, он существует и для всех λ, достаточно близких к λ_0), то он является аналитической функцией от λ в некоторой окрестности точки λ_0. Действительно,

$$\frac{(z - (\lambda+h)\,e)^{-1} - (z - \lambda e)^{-1}}{h} = (z - (\lambda+h)\,e)^{-1}(z - \lambda e)^{-1}$$

и, в силу леммы § 2, произведение в правой части сходится к $(z - \lambda e)^{-2}$, когда $h \to 0$.

Если функция $x(\lambda)$ аналитична в D и f — любой линейный функционал, определенный на пространстве R, то $f\{x(\lambda)\}$ есть обыкновенная аналитическая функция в D. Действительно, из сильной сходимости отношения (1) следует также сходимость отношения

$$\frac{f\{x(\lambda+h)\} - f\{x(\lambda)\}}{h} = f\left\{\frac{x(\lambda+h) - x(\lambda)}{h}\right\},$$

т. е. дифференцируемость функции $f\{x(\lambda)\}$.

На наши «абстрактные» аналитические функции (со значениями в R) можно распространить основные результаты теории обыкновенных аналитических функций и прежде всего теорему и формулу Коши. Для этого нам нужно будет еще определить контурное интегрирование абстрактных функций.

Пусть Γ — ориентированная дуга спрямляемой кривой в плоскости комплексного переменного λ и $x(\lambda)$ — функция со значениями в R, определенная и непрерывная по норме на Γ. Интеграл $\int\limits_\Gamma x(\lambda)\,d\lambda$ мы определим обычным образом:

$$\int\limits_\Gamma x(\lambda)\,d\lambda = \lim_{\max|\lambda_{k+1}-\lambda_k| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x(\lambda'_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k),$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ — разбиение дуги Γ последовательными точками, λ'_k — любая точка, заключенная на Γ между λ_k и λ_{k+1}, и предел понимается в смысле сильной сходимости. Существование и однозначность этого предела следуют из спрямляемости кривой Γ и равномерной непрерывности $x(\lambda)$ на Γ и доказываются обычным способом. Из определения интеграла видно также, что

$$f\Big\{\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\,d\lambda\Big\} = \int\limits_{\Gamma} f\{x(\lambda)\}\,d\lambda \tag{2}$$

для любого линейного функционала f.

Теорема Коши. *Если функция $x(\lambda)$ со значениями в нормированном кольце R аналитична в замкнутой области, ограниченной простой спрямляемой кривой Γ, то*

$$\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Доказательство. Положим $\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\,d\lambda = y$. В силу (2) для всякого линейного функционала f имеем: $f\{y\} = \int\limits_{\Gamma} f\{x(\lambda)\}\,d\lambda$. Следовательно, по теореме Коши для обыкновенных аналитических функций $f\{y\} = 0$ для всякого f. Но тогда и $y = 0$, ибо, по теореме Хана–Банаха, для всякого $y \neq 0$ существует линейный функционал f такой, что $f\{y\} \neq 0$.

Аналогично доказывается

Интегральная формула Коши. *Если функция $x(\lambda)$ со значениями в нормированном кольце R аналитична в замкнутой области, ограниченной спрямляемой кривой Γ, то для всех внутренних точек λ этой области она представима в виде*

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{x(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \lambda}. \tag{3}$$

Из формулы (3) обычным образом следует, что *аналитическая функция со значениями в нормированном кольце R неограниченно дифференцируема и в окрестности каждой точки регулярности $\lambda = \lambda_0$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Тейлора*

$$x(\lambda) = x(\lambda_0) + x'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \frac{x''(\lambda_0)}{2!}(\lambda - \lambda_0)^2 + \ldots,$$

причем радиус сходимости этого ряда равен расстоянию от λ_0 до ближайшей особенности функции $x(\lambda)$.

В качестве примера (дальше он нам понадобится) определим радиус наибольшего круга с центром в $\lambda = 0$, внутри которого существует

$(e-\lambda x)^{-1}$. Эта функция дифференцируема, т. е. аналитична, во всей области, где она существует. Поэтому ее ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n \tag{4}$$

должен внутри искомого круга абсолютно сходиться. Обратно, функция $(e-\lambda x)^{-1}$, очевидно, существует внутри круга абсолютной сходимости ряда (4) и совпадает с суммой этого ряда. Но кругом абсолютной сходимости ряда (4) является [1])

$$|\lambda| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}}.$$

Таким образом, искомым радиусом служит $\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}}$.

Аналогично можно убедиться в том, что наибольший радиус ρ_x шаровой окрестности точки $x \in O$, целиком содержащейся в O, равен $\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^{-n}\|}}$.

§ 4. Функции на максимальных идеалах. Радикал кольца

Опираясь на результаты, полученные в предыдущем параграфе, мы можем теперь закончить изучение кольца вычетов коммутативного нормированного кольца по максимальному идеалу, начатое в § 2.

Определение 1. *Спектром* элемента x нормированного кольца R называется совокупность всех комплексных чисел λ, для которых $(x-\lambda e)^{-1}$ не существует.

Теорема 1. *Каждый элемент x нормированного кольца R обладает непустым спектром.*

Доказательство. Пусть, в противоречие с утверждением теоремы, элемент $x \in R$ имеет пустой спектр, т. е. $(x-\lambda e)^{-1}$ существует для всех λ. Беря, в частности, $\lambda = 0$, получаем, что тогда существует x^{-1}. При этом x^{-1} также имеет пустой спектр, т. е. и $(x^{-1}-\lambda e)^{-1}$

---

[1]) Из неравенства (4) § 1 легко следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|z^n\|}$ существует для любого $z \in R$. Действительно, в силу указанного неравенства, полагая $\|z^n\| = \alpha_n$, имеем: $\alpha_n = \alpha_{mk+l} \leqslant \alpha_k^m \alpha_l$ $(0 \leqslant l < k)$, откуда $\alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha_k^{\frac{1}{k}-\frac{l}{kn}} \alpha_l^{\frac{1}{n}}$. Фиксируя k и беря $n \to \infty$, получаем: $\overline{\lim}\, \alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha_k^{\frac{1}{k}}$. Беря теперь $k \to \infty$, находим: $\overline{\lim}\, \alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \underline{\lim}\, \alpha_n^{\frac{1}{n}} = \lim \alpha_n^{\frac{1}{n}}$. Одновременно мы видим, что $\sqrt[k]{\|z^k\|} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|z^n\|}$ для всех k. Заметим, что мы воспользовались лишь тем свойством последовательности $\|z^n\| = \alpha_n$ $(\geqslant 0)$, что $\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m \alpha_n$.

существует для всех λ. В самом деле, для $\lambda = 0$ это очевидно, а для $\lambda \neq 0$ имеем:

$$(x^{-1} - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1} x (x - \lambda^{-1} e)^{-1}.$$

Так как, таким образом, $(x - \lambda e)^{-1}$ и $(x^{-1} - \lambda e)^{-1}$ — целые функции, то, согласно § 3, их ряды Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{-n-1}\lambda^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\lambda^n$ абсолютно сходятся во всей плоскости, в частности при $\lambda = 1$. Но тогда должны одновременно выполняться предельные соотношения $x^{-n} \to 0$ и $x^n \to \to 0$, что невозможно, так как $x^n x^{-n} = e$.

Замечание. Теорема 1 может быть доказана также с помощью теоремы Лиувилля, которая для абстрактных аналитических функций гласит:

Если функция $x(\lambda)$ со значениями в нормированном кольце R регулярна на всей плоскости λ и равномерно ограниченна по норме, то $x(\lambda) \equiv x_0$, где x_0 — некоторый постоянный элемент кольца R.

Доказательство этой теоремы проводится тем же способом, что и данные в § 3 доказательства теоремы и формулы Коши. В силу теоремы Лиувилля для обыкновенных аналитических функций, для любого линейного функционала f имеем: $f\{x(\lambda)\} \equiv \mathrm{const}$. Но тогда и $x(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, ибо если $x(\lambda)$ принимает два различных значения $x(\lambda_1)$ и $x(\lambda_2)$, то, по теореме Хана–Банаха, существует такой линейный функционал f, что $f\{x(\lambda_1)\} \neq f\{x(\lambda_2)\}$.

Пусть теперь $(x - \lambda e)^{-1}$ существует для всех λ. Имеем:

$$\|(x - \lambda e)^{-1}\| = |\lambda^{-1}| \, \|(e - \lambda^{-1} x)^{-1}\|.$$

В силу леммы § 2, второй множитель в правой части при $|\lambda| \to \infty$ стремится к 1, следовательно, $\|(x - \lambda e)^{-1}\| \to 0$. Отсюда вытекает, что функция $(x - \lambda e)^{-1}$ ограниченна на всей плоскости; значит, по теореме Лиувилля, $(x - \lambda e)^{-1} \equiv \mathrm{const}$. Так как $(x - \lambda e)^{-1} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, то заключаем, что $(x - \lambda e)^{-1} \equiv 0$. Но это невозможно.

Теорема 2. *Нормированное тело R изоморфно телу комплексных чисел.*

Доказательство. По теореме 1 для каждого $x \in R$ существует λ, при котором элемент $x - \lambda e$ не имеет обратного в R. Так как R — тело, то это означает, что $x - \lambda e = 0$, т. е. $x = \lambda e$. Соответствие

$$\lambda e \to \lambda \tag{1}$$

и будет утверждаемым в теореме изоморфизмом между телом R и телом комплексных чисел.

Изоморфизм (1) мы будем называть *каноническим*.

Из теоремы 4 § 2 и теоремы 2 непосредственно вытекает следующая важная теорема:

Теорема 3. *Кольцо R/M вычетов коммутативного нормированного кольца R по максимальному идеалу M канонически изоморфно телу комплексных чисел.*

Таким образом, максимальный идеал M определяет каноническое гомоморфное отображение кольца R в тело комплексных чисел, при котором все элементы одного и того же класса из R/M переходят в то комплексное число, которое отвечает этому классу в силу канонического изоморфизма между R/M и телом комплексных чисел.

Вместе с тем теорема 5 § 2 показывает, что, обратно, *всякое нетривиальное алгебраически гомоморфное отображение кольца R в тело комплексных чисел порождает максимальный идеал*. Действительно, ядро этого гомоморфного отображения образует в R идеал, кольцо вычетов по которому изоморфно телу комплексных чисел; в силу теоремы 5 § 2 этот идеал (состоящий из всех элементов кольца, переходящих в нуль) является максимальным.

Обозначим через $x(M)$ число, соответствующее элементу $x \in R$ при каноническом гомоморфном отображении кольца R в тело комплексных чисел, определяемом максимальным идеалом M. Для каждого фиксированного x мы получаем при меняющемся M функцию $x(M)$, определенную на множестве $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$ всех максимальных идеалов кольца R. Эти функции, очевидно, обладают следующими свойствами:

а) Если $x = x_1 + x_2$, то $x(M) = x_1(M) + x_2(M)$.

б) Если $x = x_1 x_2$, то $x(M) = x_1(M)\, x_2(M)$.

в) Если $x_2 = \lambda x_1$, то $x_2(M) = \lambda x_1(M)$.

г) $e(M) \equiv 1$.

д) Если $x \in M_0$, то $x(M_0) = 0$, и обратно, если $x(M_0) = 0$, то $x \in M_0$.

е) Если $M_1 \neq M_2$, то существует $x \in R$ такой, что $x(M_1) \neq x(M_2)$.

Кроме того,

ж) $|x(M)| \leqslant \|x\|$.

Действительно, $x(M)$ есть то число λ_X, которое, в силу канонического изоморфизма между R/M и телом комплексных чисел, соответствует классу X, содержащему x. Так как $X = \lambda_X E$, то $\|X\| = |\lambda_X|\,\|E\| = |\lambda_X|$. Вспоминая определение нормы класса вычетов, получаем: $|x(M)| = |\lambda_X| = \inf\limits_{z \in X} \|z\| \leqslant \|x\|$.

Свойства а)–г) показывают, что функции $x(M)$ образуют кольцо $\widehat{R}$ с единицей, причем

$$x \to x(M) \tag{2}$$

есть гомоморфное отображение кольца R на это кольцо $\widehat{R}$. Мы будем называть (2) *каноническим гомоморфным отображением* R на $\widehat{R}$.

Далее, свойства а), в), г) и ж) показывают, что каждый максимальный идеал M кольца R порождает на R линейный функционал с нормой 1, определяемый равенством

$$M(x) = x(M)$$

с заданным M и переменным x. Действительно, в силу этих свойств, имеем:

$$M(x_1 + x_2) = M(x_1) + M(x_2), \quad M(\lambda x) = \lambda M(x),$$
$$|M(x)| \leqslant \|x\| \quad \text{и} \quad M(e) = 1.$$

При этом, в силу свойства отделимости е), различные максимальные идеалы порождают различные линейные функционалы. В множестве всех линейных функционалов на R они выделяются свойством «мультипликативности»

$$M(x_1 x_2) = M(x_1)\, M(x_2)$$

(вытекающим из б)), на основании чего их называют *мультипликативными линейными функционалами*.

В силу д) мы можем теперь формулировать теорему 2 § 2 следующим образом:

Теорема 3$'$. *Для того чтобы элемент x кольца R имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы функция $x(M)$ нигде не обращалась в нуль.*

В качестве иллюстрации к полученным результатам определим максимальные идеалы колец W (пример 3° § 1) и A (пример 6° § 1).

1. Пусть элемент e^{it} кольца W при каноническом гомоморфном отображении по максимальному идеалу M переходит в число a, так что e^{-it} переходит в a^{-1}. В силу ж) имеем: $|a| \leqslant \|e^{it}\| = 1$ и $|a^{-1}| \leqslant \|e^{-it}\| = 1$, следовательно, $a = e^{it_0}$ $(0 \leqslant t_0 < 2\pi)$. Таким образом, e^{it} переходит в e^{it_0}. Но тогда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in W$ переходит в $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int_0}$. При этом M состоит из всех рядов, переходящих в нуль, т. е. из всех функций $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, обращающихся в нуль в точке t_0.

Основываясь на этом результате, мы можем теперь доказать теорему Винера, упомянутую в § 2 (с. 15). Действительно, пусть сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ нигде не обращается в нуль. По доказанному это означает, что она как элемент кольца W не принадлежит ни одному максимальному идеалу, а тогда, по теореме 2 § 2, в W существует обратный элемент, т. е. $\dfrac{1}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}}$ также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд.

2. Так же как и при рассмотрении кольца C (с. 14), убеждаемся в том, что совокупность всех функций из A, обращающихся в нуль в некоторой точке ζ_0 круга $|\zeta| \leqslant 1$, образует в A максимальный идеал. Покажем, что верно и обратное. Пусть M_0 — максимальный идеал кольца A и ζ_0 — число, в которое переходит функция $x(\zeta) \equiv \zeta \in A$ при каноническом гомоморфном отображении по этому максимальному идеалу. Функция ζ является *образующей* кольца A: все функции из A — пределы равномерно сходящихся последовательностей полиномов [1]). Отсюда следует, что для каждого элемента $x(\zeta) \in A$ имеем: $x(M_0) = x(\zeta_0)$ и, значит, M_0 совпадает с совокупностью всех

[1]) Действительно, пусть $x \in A$. $x(\zeta)$ равномерно аппроксимируема в круге $|\zeta| \leqslant 1$ функциями $x\left(\dfrac{\zeta}{1+\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$, а последние, будучи аналитическими в соответствующем круге $|\zeta| < 1 + \varepsilon$, равномерно аппроксимируемы полиномами от ζ во внутреннем по отношению к нему круге $|\zeta| \leqslant 1$.