ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ

Е.И. БУТИКОВ
А.С. КОНДРАТЬЕВ

ФИЗИКА

Том 1

Механика

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования Министерства образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для учащихся школ с углубленным изучением физики и студентов высших учебных заведений

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2008

УДК 53(075.8)
Б93
ББК 22.3

БУТИКОВ Е. И., КОНДРАТЬЕВ А. С. **ФИЗИКА**: Учеб. пособие: В 3 кн. Кн.1. **Механика.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008 — 352 с. — ISBN 978-5-9221-0107-3 (Кн. 1).

Учебник принципиально нового типа. Последовательность изложения соответствует логической структуре физики как науки и отражает современные тенденции ее преподавания. Материал разделен на обязательный и дополнительный, что позволяет строить процесс обучения с учетом индивидуальных способностей учащихся, включая организацию их самостоятельной работы. Задачи служат как для получения новых знаний, так и для развития навыков исследовательской деятельности.

Для учащихся школ, гимназий, лицеев с углубленным изучением физико-математических дисциплин, а также для подготовки к конкурсным экзаменам в вузы.

Ил. 233.

Рецензенты: профессор *В.И. Николаев*, преподаватель *М.Л. Шифман*

Учебное издание

БУТИКОВ Евгений Иванович
КОНДРАТЬЕВ Александр Сергеевич

ФИЗИКА
Книга 1. **Механика**

Редактор *Д.А. Миртова*
Операторы набора и корректоры: *Н.В. Болотина*, *Л.А. Андреева*, *Л.Н. Серых*, *Н.В. Дзюба*
Оформление обложки *А.Ю. Алехиной*

Подписано в печать 12.02.08. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 24,2. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-9221-0110-3
ISBN 978-5-9221-0107-3 (Кн. 1)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение физики составляет неотъемлемую часть полноценного образования, подразумевающего получение не только определенной суммы знаний в некоторой области, но и всестороннее развитие человеческой личности.

Значение физики в формировании научного мировоззрения определяется ее непреходящей ролью лидера современного естествознания. Физика задает стиль научного мышления, отличающийся высоким совершенством и сбалансированностью качественного и количественного описания явлений природы. Общепризнано, что степень развития той или иной области других естественных наук (химии, биологии, геологии и т. д.) оценивается тем, насколько близко им удается подойти к уровню, характерному для физики.

Физика занимает особое место среди всех естественных наук, так как она изучает наиболее фундаментальные и универсальные закономерности взаимодействий частиц и полей, лежащие в основе всех других явлений — химических, биологических, астрономических, геологических и др. Установленные в физике закономерности обладают наибольшей общностью и в определенном смысле являются окончательными: законы Ньютона, уравнения Максвелла, уравнение Шредингера всегда останутся справедливыми — каждые в своей области, — так как любая новая физическая теория сводится к прежней в той области эмпирического знания, где старая теория выдержала проверку экспериментом.

Предлагаемый учебник ориентирован на работу по программе, принципиально отличающейся от всех использовавшихся до сих пор. Большое внимание в нем уделено преодолению характерного для учебников недостатка, связанного с тем, что на отбор включенного в них материала неизбежно оказывала влияние ограниченность доступных математических средств. В результате этот отбор не в полной мере основывался на истинной научной значимости того или иного конкретного вопроса.

Новые принципы отбора материала прежде всего привели к отличной от традиционной структуре курса физики, когда изложение строится не по принципу историзма, отражающему историческую последовательность различных разделов — механика, физика тепловых явлений, электромагнетизм и т. д., а опирается на внутреннюю логику и методологию физики как науки. При таком подходе многие открытия современной физики в идейном плане оказываются более простыми, чем ряд уже давно изучавшихся традиционных вопросов, получивших в действительности удовлетворительное разрешение только в самое последнее время (например, проблема обоснования термодинамики и статистической физики).

Структура курса физики, принятая в данном учебнике, такова. В книге 1 изучаются основы механики, изложение которой строится с учетом общих методологических принципов физики, таких, как принцип симметрии, относительности, соответствия и т. д.

Книга 2 включает в себя основы электродинамики и оптики, изложение которых базируется на фундаментальных представлениях об электромагнитном поле без детализации структуры вещества, рассматриваемого здесь чисто феноменологически.

Наконец, в книге 3 на основе развития фундаментальных механических и электромагнитных представлений развивается последовательная картина строения и свойств вещества от атома до Вселенной.

В каждом разделе учебника выделен основной материал, что позволяет добиваться глубокого и прочного его усвоения, не загружая память учащихся множеством частных деталей. Дополнительный материал, отмеченный полосой слева, при первом чтении можно опустить без ущерба для понимания логических связей. Особое внимание уделено мировоззренческому аспекту изучаемых физических теорий и их месту в научной картине мира. В учебнике отражены теоретико-познавательные стороны излагаемого материала: границы применимости физических теорий, соотношения между физическими теориями и законами различной степени общности, роль опыта в физике как источника знаний и критерия правильности теории, сведения из истории физики.

Центральное место в курсе занимают фундаментальные физические законы сохранения — энергии, импульса, электрического заряда. Подробно рассматривается их соотношение с физическими законами, описывающими конкретные явления, — законами Ньютона, Ома, Ампера, Фарадея, Ленца и т. д.

Построение предлагаемого курса опирается не только на внутреннюю логику физики как науки, но предполагает максимально возможную реализацию межпредметных связей, в частности с курсами математики, астрономии, химии, биологии и т. д.

Значительное внимание в учебнике уделено задачам, решение которых составляет важную часть эффективного изучения физики на любом уровне — от первоначального, школьного, вплоть до профессионального физико-математического образования.

I. КИНЕМАТИКА

Все без исключения физические явления происходят в пространстве и во времени. Приступая к изучению простейших физических явлений, объединяемых общим названием «механическое движение», нужно в первую очередь составить представление о содержании этих фундаментальных понятий — *пространства* и *времени.*

§ 1. Пространство. Время

«Что такое время, пространство, место и движение, я не объясняю, так как это известно всем», — так пишет создатель классической механики Исаак Ньютон в книге «Математические основы естествознания», более известной в русском переводе под названием «Математические начала натуральной философии». Действительно, у каждого человека с детства на основе личного жизненного опыта вырабатываются определенные интуитивные представления об этих простейших на первый взгляд понятиях. Однако чем больше человек узнает об окружающем мире, тем яснее ему становится, что понятия пространства и времени относятся к числу наиболее глубоких. Фундаментальность этих понятий заключается в том, что их невозможно выразить, объяснить через какие-либо более простые понятия.

Для изучения законов природы важны не формальные определения, что такое пространство и время, а их *свойства*, познаваемые на опыте. Опыт говорит о том, что физическое пространство трехмерно, однородно и изотропно, а время — одномерно и однородно.

Одномерность времени проявляется в том, что для указания момента наступления какого-либо события или длительности какого-либо процесса достаточно одного числа.

Однородность времени проявляется в неизменности физических законов: какими они были во времена Ньютона, такими остаются в наши дни, такими же будут и завтра. При этом совершенно не важно, что какие-то законы еще не открыты человеком — в природе они действовали, действуют и будут действовать. Опыт, поставленный в одинаковых физических условиях в разные моменты времени, дает одинаковые результаты.

Трехмерность физического пространства проявляется в том, что для указания места, где происходит какое-либо событие, достаточно трех чисел — трех пространственных координат. Точно так же трех чисел достаточно для указания относительного расположения двух точек: можно, например, задать расстояние между ними (для чего требуется одно число) и направление соединяющей их прямой (для чего нужны еще два числа).

Однородность физического пространства проявляется в независимости физических законов от положения: одни и те же законы действуют во всех уголках Вселенной. Опыт, поставленный в одинаковых физических условиях в разных местах, дает одинаковые результаты.

Изотропность физического пространства проявляется в независимости физических законов от ориентации физической системы в пространстве.

При обсуждении свойств пространства и времени нами использовалось слово «событие», смысл которого интуитивно был ясен. Для описания явлений природы удобно ввести соответствующее физическое понятие: под *событием* будем понимать нечто, характеризуемое пространственным положением и моментом времени, т. е. тем, где и когда это «нечто» произошло. Таким образом, событие характеризуется указанием четырех чисел: трех пространственных и одной временно́й координат.

Примерами физических событий могут служить мгновенная вспышка света в определенной точке, столкновение двух элементарных частиц и т. д. Любой физический процесс или явление можно рассматривать как некую последовательность или совокупность отдельных событий.

Физическое понятие события подобно геометрическому понятию точки как объекта, не имеющего пространственной протяженности. Аналогично, отдельное физическое событие не имеет ни пространственной, ни временной протяженности.

- В тексте утверждалось, что для указания момента времени требуется только одно число. Как это согласуется с тем, что при ответе на вопрос «когда вы родились?» приходится называть год, месяц и число?
- На пути из Москвы в Санкт-Петербург на автомобиле для определения своего местоположения достаточно указать, на каком километре шоссе вы находитесь. Как это согласовать с тем фактом, что для указания пространственного положения требуются три числа?

△ **Свойства симметрии**. Однородность времени, однородность и изотропность пространства отражают определенную *симметрию* физического мира.

Однородность пространства связана с симметрией по отношению к преобразованию сдвига, т. е. к параллельному переносу. Параллельный перенос физической системы как целого не влияет на характер протекающих в ней процессов. В этом проявляется эквивалентность, т. е. равноправие, всех точек физического пространства.

Изотропность пространства связана с симметрией по отношению к поворотам. Поворот всей системы как целого, как и параллельный перенос, не влияет на характер протекающих в ней процессов. В этом проявляется эквивалентность всех направлений в пространстве.

Однородность времени связана с симметрией по отношению к сдвигу во времени. Такой сдвиг также не влияет на характер процессов в физической системе. В этой симметрии проявляется эквивалентность всех моментов времени.

Отмеченные свойства симметрии физического мира не единственные. Существует также симметрия по отношению к отражению в плоскости, по отношению к преобразованию инверсии относительно точки, по отношению к отражению во времени. С последней из указанных симметрий связана *обратимость* физических явлений.

Представление об обратимости явлений можно получить из такого примера. Заснимем на кинопленку столкновение двух бильярдных шаров. При просмотре фильма пленку можно пускать в любом направлении. По наблюдаемой на экране картине невозможно определить, движется ли пленка в том же направлении, что и при съемке фильма, или в противоположном. В «обращенном» во времени движении никакие физические законы не нарушаются.

Соображения симметрии играют большую роль при объяснении свойств физического мира. ▲

- Если все точки физического пространства эквивалентны, то почему при взвешивании груза показания пружинных весов на полюсе и на экваторе различаются?
- Все ли процессы в природе обратимы? Приведите известные вам примеры обратимых процессов.

§ 2. Механическое движение. Система отсчета

Простейший вид движения — *механическое движение* — заключается в изменении пространственного положения тела с течением времени. Как определить положение тела в пространстве? Оказывается, это можно сделать, только указав его положение относительно каких-либо других тел. Не существует физического способа указать положение тела в пустом пространстве, где никаких других тел нет. Поэтому нельзя говорить и об изменении положения тела в пустом пространстве. Значит, механическое движение тела может происходить только относительно других тел. В этом заключается простейший смысл *относительности* механического движения.

Система отсчета. Будем называть *телом отсчета* некоторое тело, условно принимаемое за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел. Например, движение людей, автомобилей, самолетов удобно рассматривать относительно Земли, считая ее неподвижной. В свою очередь, движение Земли и других планет удобно рассматривать относительно Солнца, выбирая его в

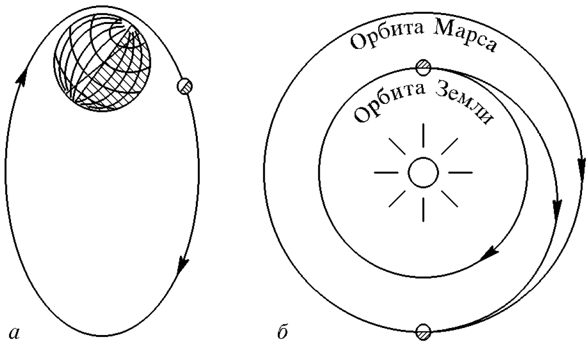

Рис. 1. Спутник на околоземной орбите (*а*). Автоматическая станция на пути к Марсу (*б*)

качестве тела отсчета. Движение космических аппаратов по околоземным орбитам удобно рассматривать относительно Земли, а при межпланетных полетах — относительно Солнца (рис. 1).

Чтобы указать положение движущегося тела и изменение этого положения со временем, т. е. описать механическое движение, необходимо уметь измерять промежутки времени и расстояния. Тело отсчета вместе с совокупностью приборов для измерения времени и расстояний называют *системой отсчета.*

Любое механическое движение рассматривается в какой-либо системе отсчета. Одно и то же движение можно рассматривать в разных системах отсчета. Относительность механического движения проявляется в том, что одно и то же движение с точки зрения

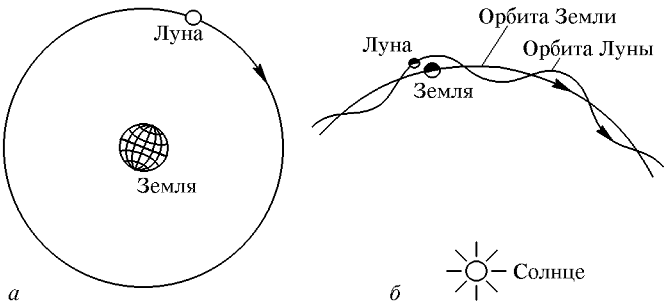

Рис. 2. Движение Луны относительно Земли (*а*). Движение Земли и Луны относительно Солнца (*б*)

разных систем отсчета происходит по-разному. Например, движение Луны относительно Земли (в так называемой геоцентрической системе отсчета) происходит по замкнутой почти круговой орбите. Но относительно Солнца (т. е. в гелиоцентрической системе отсчета) Луна движется по сложной незамкнутой орбите (рис. 2). Масштаб на рисунке не соблюден. В частности расстояние Луна—Земля сильно преувеличено. В действительности орбита Луны относительно Солнца везде (а не только в среднем) обращена в сторону от Солнца.

- Как вы думаете, чем следует руководствоваться при выборе той или иной системы отсчета для описания некоторого движения? Поясните свою мысль примерами.
- Мальчик в вагоне движущегося поезда подбрасывает вверх мячик и ловит его, не сходя с места. Каким представляется это движение мяча наблюдателю, стоящему на платформе железнодорожной станции, мимо которой проходит поезд?

△ **Объективное и субъективное в законах природы.** Физика изучает объективные закономерности окружающего мира, не зависящие от того, кто именно их изучает. Но описание механического движения требует некоторой системы отсчета, которую можно выбирать произвольно. Каждый исследователь может выбрать систему отсчета по-своему. Тем самым в изучение движения вносится некоторый субъективный момент. В действительности этот произвол ограничивается соображениями целесообразности и удобства: систему отсчета всегда следует выбирать так, чтобы изучаемое движение и его закономерности выглядели как можно проще. Например, в системе Коперника закономерности движения планет Солнечной системы оказываются значительно проще, чем в системе Птолемея, хотя для земного наблюдателя движение планет выглядит именно так, как оно описывается в системе Птолемея.

Отмеченное обстоятельство характерно для всех естественных наук, т. е. наук о природе. На первый взгляд кажется, что у природы можно непосредственно «выведать» гораздо больше, чем это возможно на самом деле. В действительности целый ряд понятий не познается, а *определяется* для познания природы. В частности, приходится вводить по определению систему отсчета, чтобы с ее помощью изучать объективные закономерности механического движения. ▲

- Как согласовать разный вид одного и того же механического движения в разных системах отсчета с объективным характером этого движения?
- Приведите известные вам примеры вводимых по определению понятий, которые используются для изучения объективных закономерностей физических явлений.

§ 3. Материальная точка. Поступательное движение

Любое тело имеет конечные размеры. Поэтому разные его части занимают разные положения в пространстве. Рассмотрим сначала простейший случай, когда достаточно указать положение лишь одной какой-либо точки тела. Когда же это возможно?

Во-первых, это возможно, когда размеры и форма тела в рассматриваемом движении несущественны и их можно не принимать во внимание. Например, при описании полета пули к мишени нет необходимости учитывать размеры пули. Ее можно считать одной «частицей», положение которой в пространстве задается как положение одной точки. Таким образом, мы приходим к понятию *материальной точки*, понимая под этим тело, размеры и форма которого в рассматриваемом явлении несущественны.

Одно и то же тело в одних условиях можно считать материальной точкой, а в других — нельзя. Например, при расчете движения космического корабля по орбите его считают материальной точкой, но при проведении маневров сближения с орбитальной станцией и стыковки с ней необходимо учитывать конечные размеры корабля (рис. 3).

В каких ситуациях размеры тела несущественны? Как правило, когда они малы по сравнению с другими характерными размерами, которые фигурируют в изучаемом явлении. При полете межпланетной станции к Марсу его можно считать материальной точкой, пока расстояние от станции до Марса велико по сравнению с его размерами. Но при подлете к Марсу и посадке станции на марсианскую поверхность размеры планеты уже не малы по сравнению с расстоянием до нее и уже не может быть и речи о том, чтобы считать Марс материальной точкой.

Другой случай, когда достаточно рассматривать лишь одну точку движущегося тела, — это так называемое *поступательное движение*, при котором все точки тела движутся одинаково и его пространственная ориентация остается неизменной. Например, при операции стыковки космического корабля с орбитальной станцией, когда корабль уже сориентирован и его пространственная ориентация поддерживается неизменной, все точки корабля движутся одинаково. Причаливающий корабль можно рассматривать как материальную точку, хотя его размеры отнюдь не малы по сравнению с другими характерными размерами — расстоянием до станции, ее габаритами и т. д.

- Можно ли считать материальной точкой тяжелый шар, подвешенный на упругой проволоке, если шар совершает: а) вертикальные колебания, при которых проволока слегка растягивается и укорачивается; б) крутильные колебания, при которых проволока закручивается на небольшой угол в одну и в другую сторону?

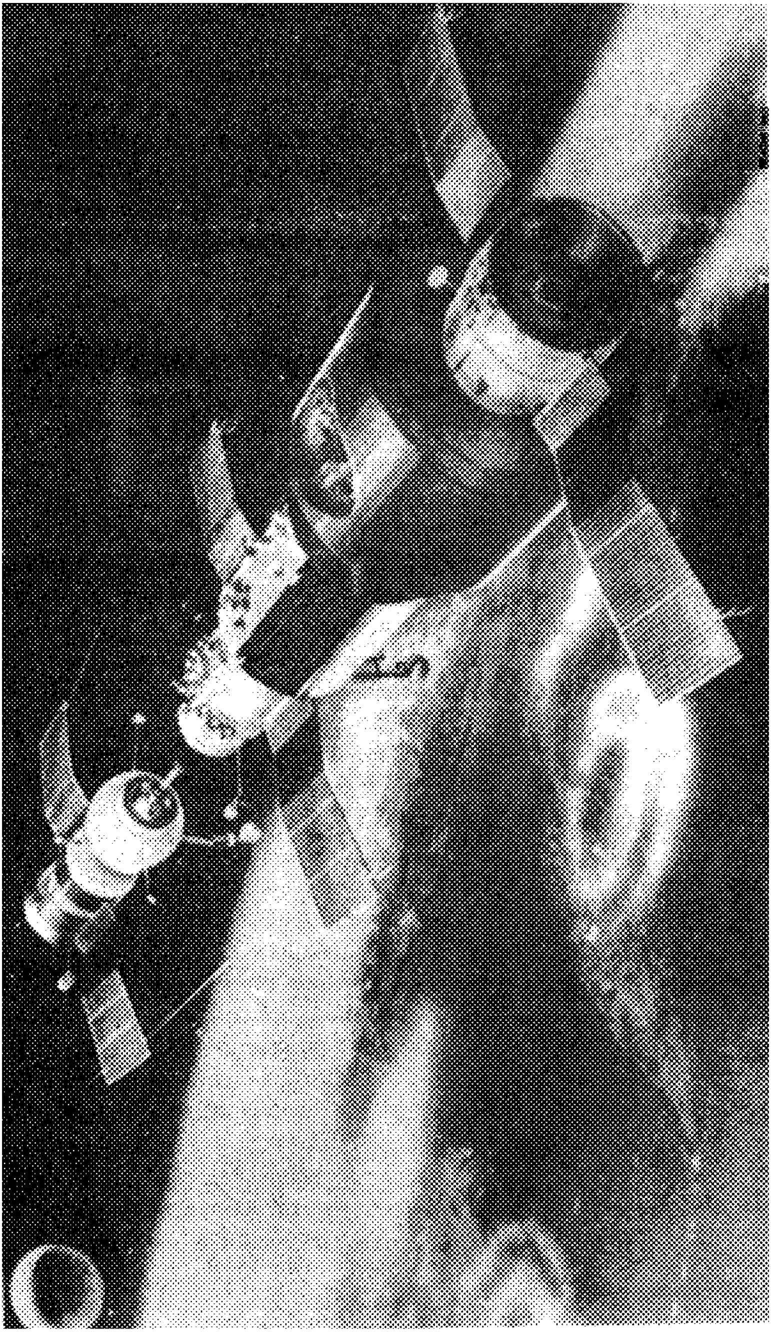

Рис. 3. Сближение космического корабля с орбитальной станцией

- Можно ли океанский лайнер считать материальной точкой: а) при прокладке его курса на штурманской карте; б) при маневрировании у входа в узкий шлюз?
- Можно ли считать материальной точкой санки, которые мальчик тянет за веревку?

△ **Физическая модель.** На примере понятия материальной точки мы впервые сталкиваемся с *физической моделью*. Из-за сложности физического мира, изучая реальное явление, мы всегда вынуждены упрощать его и вместо самого явления рассматривать некоторую идеализированную его модель, стремясь к тому, чтобы в выбранной модели сохранить самые характерные, наиболее важные черты явления. По образному выражению Я. И. Френкеля, физики фактически всегда рассматривают не само явление, а некоторую упрощенную схему, т. е. как бы карикатуру на него. При этом успех зависит от того, насколько удачна выбранная модель.

Материальная точка может служить простейшим примером физической модели в механике: вместо всего тела рассматривают движение одной его точки. В дальнейшем мы встретимся и с другими моделями — абсолютно твердым телом, идеальной жидкостью и т. д. Применимость той или иной физической модели зависит не только от свойств реальной системы, но и от характера поставленной задачи. В частности, используя понятие материальной точки, мы идеализируем не столько свойства самого тела, сколько условия его движения.

Развивая эту мысль дальше, можно прийти к выводу о том, что и само механическое движение является физической моделью, т. е. некоторой идеализацией явлений природы. Даже в таком классическом примере механических явлений, как столкновение биллиардных шаров, в игру вступают силы упругости, которые по сути представляют собой проявление электромагнитного взаимодействия между атомами, из которых построены сталкивающиеся шары. В этом смысле можно сказать, что чисто механических явлений в природе не существует. ▲

- Какие свойства тела не принимаются во внимание, когда для него используется модель материальной точки?
- В небесной механике движение планет Солнечной системы описывается на основе законов Ньютона и закона всемирного тяготения. Значит ли это, что такая механическая модель адекватна физической природе данного объекта и дает его исчерпывающее описание?

§ 4. Радиус-вектор. Перемещение

В выбранной системе отсчета положение материальной точки, которую для краткости будем называть *частицей*, можно задать направленным отрезком, проведенным из начала отсчета в ту точку пространства, где находится частица. Такой направленный отрезок называется *радиусом-вектором* частицы. Начало отсчета — это некоторая фиксированная точка тела отсчета, выбор которой произволен и определяется исключительно из соображений удобства (рис. 4).

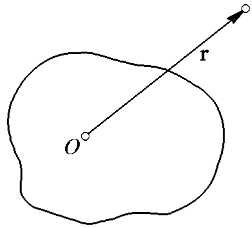

Рис. 4. Начало отсчета (точка O) и радиус-вектор материальной точки

Траектория. При движении частицы, т. е. при изменении ее положения, конец радиуса-вектора перемещается в пространстве вместе с частицей. Вычерчиваемая им при этом воображаемая линия называется *траекторией* частицы. В некоторых случаях траекторию движения можно наблюдать непосредственно: в голубом небе часто отчетливо виден белый инверсионный след реактивного самолета; быстро мчащийся

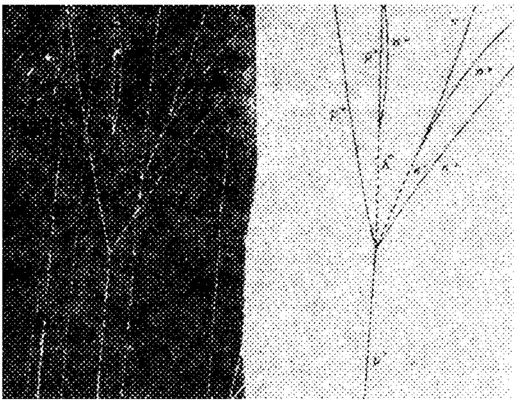

Рис. 5. Треки частиц в камере Вильсона

катер оставляет пенистый след на поверхности воды; заряженная частица оставляет за собой цепочку капелек тумана в камере Вильсона (рис. 5).

Отметим, что в выбранной системе отсчета радиус-вектор движущейся частицы изменится, если изменить начало отсчета. Однако траектория частицы, т. е. вычерчиваемая ею воображаемая линия, при этом не изменится.

Пусть в некоторый момент времени t_1 положение частицы задается радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$, а в более поздний момент t_2 — радиусом-вектором $\mathbf{r}_2$ (рис. 6). Направленный отрезок, проведенный из конца радиуса-вектора $\mathbf{r}_1$ в конец радиуса-вектора $\mathbf{r}_2$, называется *перемещением* частицы за промежуток времени $t_2 - t_1$.

В еще более поздний момент времени t_3 положение частицы определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}_3$. В соответствии с введенным определением перемещением частицы за промежуток времени

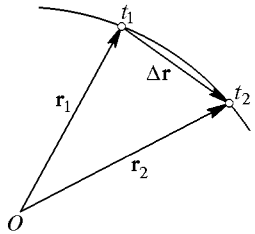

Рис. 6. Перемещение частицы за промежуток времени $t_2 - t_1$

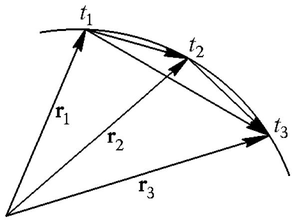

Рис. 7. Перемещение частицы за промежутки времени $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$ и $t_3 - t_1$

$t_3 - t_2$ будет направленный отрезок, проведенный из конца радиуса-вектора $\mathbf{r}_2$ в конец радиуса-вектора $\mathbf{r}_3$. Аналогично, перемещением за весь промежуток времени $t_3 - t_1$ будет направленный отрезок, проведенный из конца $\mathbf{r}_1$ в конец $\mathbf{r}_3$ (рис. 7).

Сложение векторов. Как связаны между собой перемещения частицы за указанные промежутки времени? Будем говорить, что перемещение за весь промежуток времени $t_3 - t_1$ равно сумме перемещений на составляющих его промежутках $t_2 - t_1$ и $t_3 - t_2$. Из рис. 7

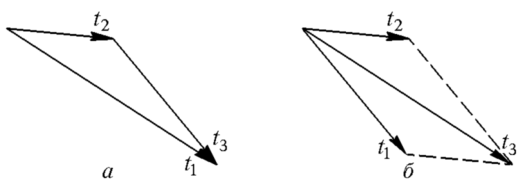

Рис. 8. Правило сложения перемещений (*а*). Сложение векторов по правилу параллелограмма (*б*)

видно, что соответствующие направленные отрезки образуют треугольник. Этот треугольник показан отдельно на рис. 8. Он иллюстрирует *правило сложения перемещений*. В математике по такому закону складываются величины, называемые *векторами*. Вектор характеризуется своим *модулем*, равным длине соответствующего направленного отрезка, и *направлением* в пространстве.

Сложение векторов можно выполнять как по правилу треугольника (рис. 8*а*), когда начало второго вектора примыкает к концу первого, а сумма замыкает образуемый ими треугольник, так и по правилу параллелограмма (рис. 8*б*), построенного на складываемых векторах. В этом случае сумма изображается диагональю параллелограмма. Для выполнения сложения по правилу параллелограмма второй из складываемых векторов нужно изобразить выходящим из той же точки, что и первый, сохранив его модуль и направление. Правило треугольника особенно удобно применять, когда приходится последовательно складывать большое число векторов. В этом случае достаточно лишь соединить начало первого из складываемых векторов с концом последнего (рис. 9).

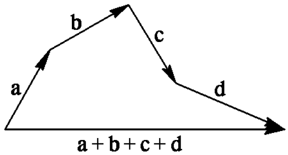

Рис. 9. Сложение большого числа векторов

Итак, перемещение — это вектор: два последовательных перемещения частицы эквивалентны одному перемещению, равному их векторной сумме. Рассчитать модуль и направление результирующего перемещения можно по известным правилам геометрии. Векторы обозначаются стрелкой над соответствующей буквой либо набираются жирным шрифтом. Модуль вектора обозначается той же буквой без стрелки либо тонким (обычным) шрифтом.

- Вы делаете три шага на север, а затем четыре шага на восток. Чему равен модуль результирующего перемещения, т. е. сумма этих семи шагов?
- Докажите, что модуль суммы двух перемещений не превосходит суммы модулей составляющих перемещений. В каком случае модуль суммы равен сумме модулей слагаемых перемещений?
- Как найти сумму трех последовательных перемещений? Обобщите сложение векторов по правилу треугольника на случай нескольких перемещений.
- Докажите, что результат сложения перемещений не зависит от последовательности, в которой происходят эти перемещения.

§ 5. Одновременные перемещения. Сложение перемещений

Мы знаем, как складываются перемещения, происходящие последовательно. А как складываются перемещения, когда тело одновременно участвует в нескольких движениях? Рассмотрим следующий пример. Паром переправляет пассажиров с одного берега фиорда на другой. Стоящий в его левом углу пассажир совершает вместе с паромом перемещение **а** относительно берегов и попадает из точки A в точку A_1 (рис. 10*а*). Если бы паром стоял на месте, а человек пересек бы его наискосок, то он совершил бы относительно берегов перемещение **b** и попал бы из точки A в точку A_2 (рис. 10*б*). А теперь рассмотрим такую ситуацию: паром пересекает фиорд, а человек в это время пересекает паром наискосок.

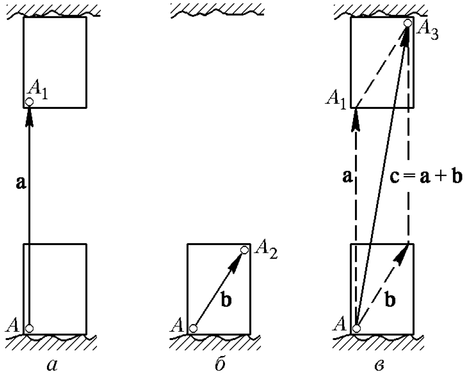

Рис. 10. Пример сложения одновременных перемещений (переправа на пароме)

Где он окажется в результате одновременного участия в этих двух движениях? Опыт показывает, что человек попадет в точку A_3, т. е. совершит относительно берегов перемещение **c**, равное сумме векторов **a** и **b**: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 10*в*). В физике это утверждение иногда называют принципом независимости перемещений.

Независимость перемещений. Такой же результат получится и в случае, когда сначала паром пересечет фиорд и только после его причаливания пассажир пересечет паром наискосок, и в случае, когда сначала человек пересечет наискосок неподвижный паром и только затем паром переправит его на другой берег. Во всех этих случаях человек попадет в одну и ту же точку A_3. Его результирующее перемешение относительно берегов будет одним и тем же независимо от последовательности выполнения отдельных составляющих перемещений. С математической точки зрения это означает, что векторное сложение перемещений коммутативно — его результат не зависит от порядка слагаемых: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Задача

Переправа на пароме. Ширина фиорда $s = 300$ м. Квадратный паром со стороной $l = 40$ м переправляется поперек фиорда. За время переправы пассажир, двигаясь из точки A (рис. 11) наискосок парома, успевает дойти до его середины. Найдите перемещение пассажира относительно берегов.

Решение. Если бы паром стоял на месте, то перемещение пассажира изображалось бы вектором **b**, проведенным из угла A квадрата в его центр (рис. 11). Очевидно, что он направлен под углом 45° к берегу, а его модуль равен $l/\sqrt{2}$. Перемещение самого парома изображается вектором **a**, перпендикулярным берегу. Его модуль $a = s - l$.

Результирующее перемещение пассажира изображается вектором **c**, проведенным по диагонали параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**. Из рис. 11 видно, что его модуль проще находить не как длину диагонали, а как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $l/2$ и $a + l/2 = s - l/2$. По теореме Пифагора

$$c = \sqrt{(l/2)^2 + (s - l/2)^2} \approx 280{,}7 \text{ м}$$

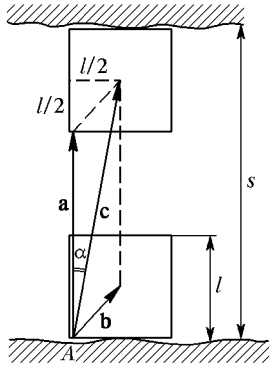

Рис. 11. Сложение перемещений при переправе на пароме

Направление вектора **c** можно определить, вычислив значение синуса угла α (рис. 11), образуемого вектором **c** и перпендикуляром к береговой линии:

$$\sin\alpha = \frac{l/2}{c} = 0{,}07.$$

Поскольку $\sin\alpha \ll 1$, то его значение приближенно совпадает с самим углом α в радианной мере. Умножая это значение на $180°/\pi$, находим $\alpha = 4°$.

- Приведите примеры сложения перемещений, когда тело одновременно участвует в нескольких движениях.
- Зависит ли результат сложения трех и большего числа перемещений от последовательности, в которой производится их сложение? Проверьте ваш ответ на каком-либо конкретном примере.

△ **Геометрия и опыт**. Зачем нужна была ссылка на опыт при утверждении, что результирующее перемещение тела, участвующего в двух движениях, равно векторной сумме составляющих перемещений? Разве это не очевидно с самого начала? Когда мы говорим о сложении векторов, то имеем в виду правила действий, определяемые в евклидовой геометрии. Опыт, о котором идет речь, фактически служит проверкой того, что геометрия реального физического пространства является евклидовой.

Нужно ли проверять на опыте справедливость евклидовой геометрии? Правильность математической теории, в частности геометрии Евклида, определяется ее внутренней непротиворечивостью, устанавливаемой чисто логическим путем. Ссылки на опыт здесь не нужны. В противоположность «чистой» математике, где величины по определению обладают теми свойствами, которые им произвольно приписаны, в физике необходимо не приписывать, а экспериментально открывать отдельные объективно существующие свойства.

Физические величины определяются прежде всего по тем признакам, по которым мы распознаем их, сталкиваясь с ними при наблюдении окружающего мира. Вместо абстрактных геометрических понятий точки, прямой линии и т. д. в физике приходится иметь дело с их материальными воплощениями. Например, прямой линии сопоставляется луч света — узкий световой пучок.

Геометрические представления имеют для физики принципиальное значение. С ними связан вопрос о физических свойствах реального мира: можно ли в физических измерениях предполагать, что справедливы аксиомы и теоремы евклидовой геометрии? Такой вопрос не возникал, пока геометрия Евклида была единственной известной геометрией и ее применимость к физическому пространству считалась самоочевидной. Однако уже в XIX веке выяснилось, что возможно существование и других геометрий, основанных на наборах аксиом, отличных от аксиом, на которых зиждется геометрия Евклида.

Искривленное пространство. Для того чтобы понять, в чем могут заключаться отличия геометрии пространства от евклидовой геометрии, вообразим себе, каким представлялся бы мир гипотетическим разумным двумерным существам, живущим во вселенной, которая представляет собой поверхность шара. Трехмерное пространство, в котором находится этот шар, им так же трудно себе представить, как нам — четырехмерное пространство.

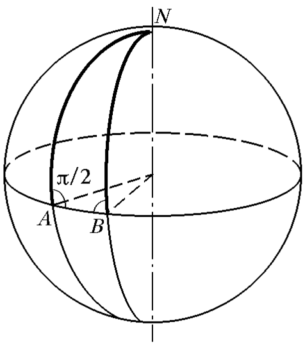

Рис. 12. В сферическом треугольнике NAB сумма углов превышает π

Что представляет собой геометрия искривленного двумерного пространства, в котором они живут? Аналогом прямых линий служат дуги больших кругов, так как именно они реализуют кратчайшее расстояние на поверхности шара между двумя ее точками: вообразим себе нить, натянутую между двумя точками на глобусе. Из таких «прямых» можно строить треугольники. Легко убедиться в том, что сумма углов в таких треугольниках всегда больше π. Проще всего это увидеть для треугольника, одна из сторон которого представляет собой часть экватора (AB на рис. 12), а две другие стороны — части меридианов.

Могут ли наши воображаемые существа установить отличие геометрии своего двумерного мира от евклидовой, не «выходя» за его пределы, т. е. в трехмерное пространство? Ответ очевиден: конечно, могут, для этого им достаточно выполнить тщательное измерение углов какого-либо треугольника и убедиться, что сумма этих углов не равна π.

В геометрии искривленного двумерного мира сумма двух последовательных перемещений зависит от порядка слагаемых. Например, на глобусе из некоторой точки экватора пройдем расстояние, равное одной пятой части меридиана, сначала на север, а затем на восток. Если же сначала пройти такое расстояние на восток, а потом повернуть на север, то в итоге мы попадем в совершенно другую точку глобуса.

Трехмерное пространство, как и рассмотренное двумерное, также может быть искривленным, описываемым неевклидовой геометрией. Поэтому только на опыте может быть решен вопрос о том, какова геометрия реального трехмерного физического пространства. Первым это осознал гениальный немецкий ученый Карл Фридрих Гаусс, который еще в 1821—1823 гг. предпринял попытки с помощью геодезических приборов найти сумму углов треугольника, образованного удаленными вершинами трех гор. Ни в этих, ни во всех последующих экспериментах отклонения геометрии физического пространства от евклидовой не было обнаружено.

- Будет ли для прямоугольного треугольника на двумерной искривленной поверхности справедлива теорема Пифагора?
- При каких условиях нашим двумерным существам было бы трудно обнаружить на опыте искривление своего пространства?
- Мы живем на поверхности земного шара, т. е. фактически в тех же условиях, что и наши воображаемые двумерные существа. Как же мы можем утверждать, что геометрия реального физического пространства евклидова? ▲

§ 6. Средняя скорость

Вернемся к рис. 6, где было введено понятие радиуса-вектора и траектории. Видно, что радиус-вектор $\mathbf{r}_2$, соответствующий положению частицы в момент времени t_2, равен векторной сумме радиуса-вектора $\mathbf{r}_1$, соответствующего положению частицы в момент t_1, и вектора перемещения за промежуток времени $t_2 - t_1$. Обозначив это перемещение через $\Delta\mathbf{r}$, можем написать

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}. \qquad (1)$$

С равенствами, содержащими в качестве своих членов векторы, можно обращаться по тем же правилам, что и с равенствами, содержащими обычные числа. В частности, отдельные слагаемые можно переносить в другую часть равенства, изменяя перед ними знак на противоположный. Знак «минус» перед обозначением некоторого вектора (т. е. умножение на -1) означает, что его направление изменяется на противоположное.

Вектор средней скорости. Перенесем в равенстве (1) $\mathbf{r}_1$ в левую часть. Тогда

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}.$$

Таким образом, перемещение $\Delta\mathbf{r}$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ можно рассматривать как разность радиусов-векторов частицы в моменты t_2 и t_1. Отношение перемещения $\Delta\mathbf{r}$ к промежутку времени Δt, в течение которого оно произошло, называется *средней скоростью* на промежутке Δt:

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (2)$$

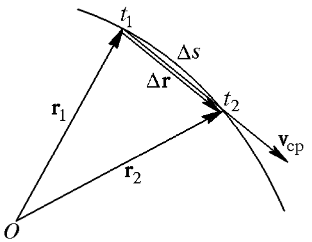

Рис. 13. Вектор средней скорости за промежуток времени $t_2 - t_1$

Вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ направлен в ту же сторону, что и перемещение $\Delta\mathbf{r}$, так как $\Delta t > 0$ — момент времени t_2 по определению более поздний, нежели t_1. Длина отрезка, изображающего вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ на рис. 13, никак не связана с длиной вектора $\Delta\mathbf{r}$. Эти физические величины, как говорят, имеют разную *размерность*, и длины соответствующих векторов измеряются в совершенно разных единицах: $\Delta\mathbf{r}$ — в метрах, а $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ — в метрах в секунду. Поэтому и масштабы для изображения длин и скоростей выбираются независимо.

Средняя скорость характеризует быстроту, с которой совершается перемещение. Эта характеристика движения относится к определенному промежутку времени. Поэтому даже для одного и того же движения она может быть совершенно различной, если выбирать разные промежутки времени. Например, средняя скорость бегуна на длинную дистанцию равна нулю, если ее определять за время пробегания целого круга стадиона, и отлична от нуля за половину круга. Так будет и в том случае, когда спортсмен бежит равномерно.

Пройденный путь. Обращение в нуль средней скорости за целое число кругов связано с векторным характером этой физической величины. Наряду с ней рассматривают и среднюю скорость прохождения траектории. Будем называть пройденным частицей *путем* длину Δs отрезка траектории между двумя ее последовательными положениями. Путь — это скалярная положительная величина.

Сравним между собой пройденный за некоторый промежуток времени путь Δs с модулем перемещения Δr за то же время. В случае *криволинейной* траектории путь больше модуля соответствующего перемещения, так как длина дуги всегда больше длины стягивающей ее хорды (рис. 13). Путь и модуль перемещения совпадают только при прямолинейном движении в одном направлении.

Средняя скорость прохождения пути определяется как отношение пройденного пути к соответствующему промежутку времени:

$$(v_s)_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Именно эту физическую величину имеют в виду, когда говорят, например, что спортсмен пробежал дистанцию со средней скоростью 6,5 м/с.

Задачи

1. *Средняя скорость на всем пути.* Первую половину пути автомобиль прошел со средней скоростью $v_1 = 40$ км/ч, вторую половину пути — со средней скоростью $v_2 =$ 60 км/ч. Чему равна средняя скорость за весь путь?

Решение. Первым побуждением может быть желание сложить эти средние скорости и поделить сумму пополам, что дало бы значение 50 км/ч. Однако это неверно! По определению (3) для нахождения $(v_s)_{\text{ср}}$ нужно весь путь s поделить на полное время движения t:

$$(v_s)_{\text{ср}} = \frac{s}{t}.$$

Автомобиль по-разному движется на двух одинаковых половинах пути и потому проходит их за разные промежутки времени t_1 и t_2. Полное время движения $t = t_1 + t_2$. Очевидно, что t_1 и t_2 можно выразить через средние скорости v_1 и v_2 прохождения первой и второй половин пути:

$$t_1 = \frac{s/2}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s/2}{v_2}.$$

Подставляя полное время движения в исходное выражение для средней скорости, находим

$$(v_s)_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 48 \text{ км/ч}.$$

2. *Средняя скорость за все время.* В течение первого часа движения средняя скорость автомобиля составила $v_1 = 40$ км/ч, а в течение второго часа $v_2 = 60$ км/ч. Чему равна средняя скорость за все время движения?

Решение. Средняя скорость и здесь, разумеется, определяется той же формулой (3): $(v_s)_{\text{ср}} = s/t$. Но в данном случае время движения на каждом участке одинаково и составляет половину полного времени движения t. Пути s_1 и s_2, проходимые автомобилем, будут различными:

$$s_1 = v_1 \frac{t}{2}, \quad s_2 = v_2 \frac{t}{2}.$$

Подставляя в выражение для средней скорости полный путь $s = s_1 + s_2$, находим

$$(v_s)_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 50 \text{ км/ч}.$$

В этом случае значение средней скорости оказывается равным среднему арифметическому скоростей на отдельных участках.

- Сформулируйте правило, по которому геометрически можно находить разность двух векторов.
- В каком случае при прямолинейном движении пройденный путь не будет совпадать с модулем перемещения? Которая из этих величин при этом больше? Во сколько раз могут они отличаться?

Задачи для самостоятельного решения

1. Десятую часть пути автомобиль прошел со средней скоростью 40 км/ч, а остальной путь — со средней скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость за весь путь.

2. Полчаса автомобиль двигался со средней скоростью 40 км/ч, а следующие полтора часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость за все время движения.

3. Десятую часть пути автомобиль прошел за полчаса, а оставшиеся 45 км — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля за весь путь.

§ 7. Скорость

Средняя скорость частицы характеризует быстроту ее движения за конечный промежуток времени. Неограниченно уменьшая этот промежуток, мы придем к физической величине, характеризующей быстроту движения в данный момент времени. Такая величина называется *мгновенной скоростью* или просто *скоростью*:

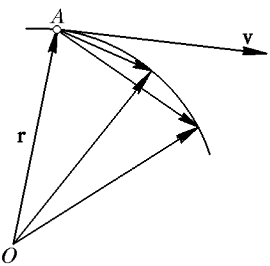

Рис. 14. Вектор скорости в точке A направлен по касательной к траектории

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Символ lim обозначает математическую операцию перехода к пределу. Под этим символом записывается условие, при котором выполняется данный предельный переход; в рассматриваемом случае это стремление к нулю промежутка времени Δt: $\Delta t \to 0$.

При вычислении скорости по этому правилу мы убедимся, что уменьшение промежутка времени Δt приводит к тому, что на некотором этапе получаемые очередные значения средней скорости будут все меньше и меньше отличаться друг от друга. Поэтому на практике при нахождении скорости можно остановиться на конечном значении Δt, достаточно малом для получения требуемой точности значения скорости.

Вектор скорости и траектория. Рассматриваемый предельный переход имеет ясный геометрический смысл. Поскольку вектор перемещения $\Delta\mathbf{r}$ направлен по хорде, соединяющей две точки траектории, то при сближении этих точек, происходящем при $\Delta t \to 0$, он принимает положение, соответствующее касательной к траектории в данной точке. Это значит, что вектор скорости направлен *по касательной* к траектории. Так будет в любой точке траектории (рис. 14). При прямолинейной траектории движения вектор скорости направлен вдоль этой прямой.

Скорость прохождения пути. Аналогичным переходом определяется мгновенная *скорость прохождения пути*:

$$v_s = \lim_{\Delta t \to 0} (v_s)_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Для плавной кривой, каковой является траектория любого непрерывного механического движения, длина дуги тем меньше отличается от длины стягивающей ее хорды, чем короче эта дуга. В пределе эти длины совпадают. Поэтому при $\Delta t \to 0$ можно считать, что $\Delta s \to \Delta r$. Это означает, что скорость v_s прохождения пути равна модулю мгновенной скорости v: $v_s = v$. Движение, при котором модуль скорости остается неизменным, называется равномерным. В случае прямолинейной траектории при равномерном движении вектор скорости постоянен, а в случае криволинейной траектории изменяется только его направление.

Сложение скоростей. Если тело одновременно участвует в нескольких движениях, то его скорость равна векторной сумме скоростей каждого из этих движений. Это непосредственно следует из правила сложения перемещений: так как $\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2$, то после деления на Δt получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \qquad (3)$$

Иногда бывает удобно представить некоторое сложное движение как суперпозицию, т. е. наложение двух простых движений. В этом случае равенство (3) можно трактовать как правило разложения вектора скорости на составляющие.

Задачи

1. *Переправа через реку*. Скорость течения в реке с параллельными берегами всюду одинакова и равна v_1. Ширина реки l (рис. 15). Катер может плыть со скоростью v_2 относительно воды. На какое расстояние s снесет катер вниз по течению реки, если при переправе нос катера направить строго поперек берегов?

Решение. Катер участвует одновременно в двух движениях: со скоростью v_2, направленной поперек течения, и вместе с водой со скоростью v_1, которая направлена параллельно берегу. В соответствии с правилом сложения скоростей (3) полная скорость $\mathbf{v}$ катера относительно берегов равна векторной сумме $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ (рис. 16). Очевидно, что движение катера происходит по прямой AC, направленной вдоль вектора $\mathbf{v}$. Искомое расстояние s, на которое снесет катер при переправе, можно найти из подобия треугольника ABC треугольнику, образованному векторами скоростей:

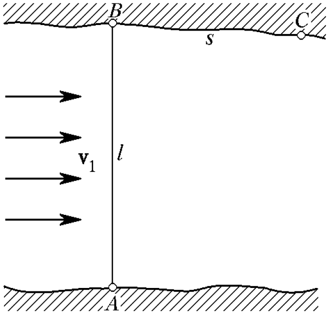

Рис. 15. Переправа через реку, скорость течения которой всюду равна v_1

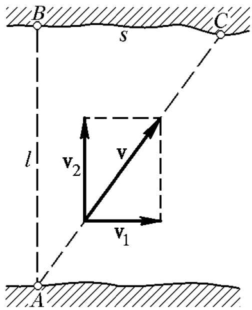

Рис. 16. Сложение скоростей при переправе через реку

$$\frac{s}{l} = \frac{v_1}{v_2},$$

откуда

$$s = l\,\frac{v_1}{v_2}.$$

Эту задачу легко решить и не прибегая к сложению векторов скоростей. Очевидно, что расстояние s равно произведению скорости течения v_1 на время t, в течение которого катер пересекает реку: $s_1 = v_1 t$. Это время можно найти, разделив ширину реки l на скорость v_2 движения катера поперек реки: $t = l/v_2$. Таким образом, находим

$$s = v_1 t = l\,\frac{v_1}{v_2}.$$

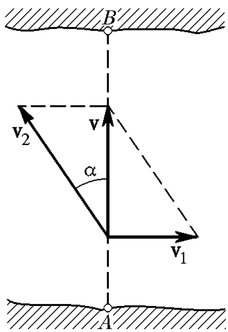

Рис. 17. Сложение скоростей при переправе поперек реки

В этой простой задаче второй способ решения предпочтительнее, так как он проще. Однако уже при небольшом усложнении условия задачи становятся отчетливо видны преимущества первого способа, основанного на сложении векторов скоростей.

2. *Переправа поперек реки*. Предположим, что теперь нам нужно переправиться на катере через ту же реку точно поперек, т. е. попасть в точку B, лежащую напротив начальной точки A (рис. 17). Как нужно направить нос катера при переправе? Сколько времени займет такая переправа?

Решение. В рассматриваемом случае полная скорость $\mathbf{v}$ катера относительно берегов, равная векторной сумме скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, должна быть направлена поперек реки. Из рис. 17 сразу видно, что вектор $\mathbf{v}_2$, вдоль которого и смотрит нос катера, должен отклоняться на некоторый угол α вверх по течению реки от направления AB. Синус этого угла равен отношению модулей скоростей течения и катера относительно воды:

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2}. \tag{4}$$

Переправа поперек реки без сноса возможна только в том случае, когда скорость катера v_2 относительно воды больше скорости течения v_1. Это сразу видно либо из треугольника скоростей на рис. 17 (гипотенуза всегда больше катета), либо из формулы (4) (синус угла α должен быть меньше единицы).

Время переправы t найдем, разделив ширину реки l на полную скорость катера v: $t = l/v$. Для v по теореме Пифагора имеем $v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$. Таким образом,

$$v = \frac{l}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

3. ***Снос при быстром течении.*** Предположим теперь, что скорость катера относительно воды меньше скорости течения: $v_2 < v_1$. В таком случае переправа без сноса невозможна. Как следует направить нос катера при переправе, чтобы снос получился минимальным? На какое расстояние $s_{\min}$ при этом снесет катер?

Решение. Полная скорость $\mathbf{v}$ катера относительно берегов во всех рассматриваемых случаях дается формулой (3). Однако теперь нагляднее выполнить сложение векторов v_1 и v_2 по правилу треугольника (рис. 18): пер-

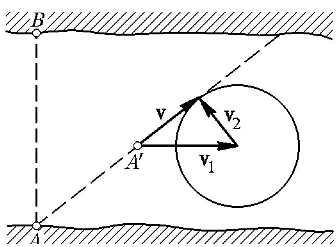

Рис. 18. Сложение скоростей при переправе с минимальным сносом

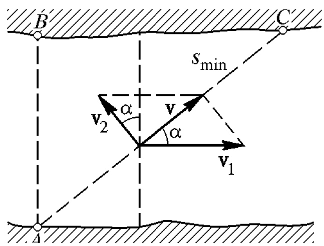

Рис. 19. Определение курса катера (направление вектора $\mathbf{v}_2$) для переправы с минимальным сносом

вым изображаем вектор $\mathbf{v}_1$, для которого мы знаем и модуль и направление, а затем к его концу пристраиваем начало вектора $\mathbf{v}_2$, для которого известен только модуль, а направление еще предстоит выбрать. Этот выбор нужно сделать так, чтобы вектор результирующей скорости $\mathbf{v}$ как можно меньше отклонялся от направления AB поперек реки.

Конец вектора $\mathbf{v}_2$ при любом его направлении должен лежать на окружности радиуса v_2, центр которой совпадает с концом вектора $\mathbf{v}_1$. Эта окружность показана на рис. 18. Так как по условию задачи $v_2 < v_1$, то точка A', соответствующая началу вектора $\mathbf{v}_1$, лежит вне этой окружности. Из рисунка видно, что вектор $\mathbf{v}$ образует с прямой AB наименьший угол тогда, когда он направлен по касательной к окружности. Следовательно, вектор $\mathbf{v}_2$ перпендикулярен вектору $\mathbf{v}$, а треугольник скоростей — прямоугольный.

Таким образом, для переправы с минимальным сносом нос катера следует направлять вверх по течению под углом α к линии AB (рис. 19). Синус этого угла дается выражением

$$\sin\alpha = \frac{v_2}{v_1}.$$

Траектория катера направлена вдоль вектора $\mathbf{v}$, т. е. она перпендикулярна направлению, в котором смотрит нос катера. Это значит, что по своей траектории катер движется боком. На другом берегу реки катер причалит в точке C, расстояние $s_{\min}$ до которой можно найти из подобия треугольников:

$$\frac{s_{\min}}{l} = \frac{v}{v_2}.$$

Модуль скорости v находится по теореме Пифагора: $v = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}$. В результате получаем

$$s_{\min} = l\,\frac{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_2} = l\,\sqrt{(v_1/v_2)^2 - 1}\,.$$

4. *Лодка на тросе.* Лодку подтягивают к берегу за привязанный к ее носу трос, наматывая его на равномерно вращающийся барабан (рис. 20). Барабан

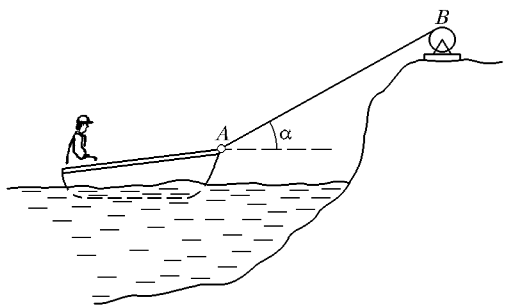

Рис. 20. Подтягивание к берегу с помощью троса

установлен на высоком берегу. С какой скоростью v движется лодка в тот момент, когда трос образует угол α с горизонтом? Трос выбирается барабаном со скоростью v_1.

Решение. Точка A троса, где он привязан к лодке, движется с той же скоростью, что и лодка. Эта скорость $\mathbf{v}$ направлена горизонтально. Чтобы связать ее со скоростью выбирания троса, нужно сообразить, что движение троса сводится к повороту вокруг точки B, где он касается барабана, и скольжению вдоль собственного направления, т. е. прямой AB. Поэтому естественно разложить скорость $\mathbf{v}$ точки A на две составляющие $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, направленные вдоль и поперек троса (рис. 21): $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Скорость $\mathbf{v}_2$, направленная поперек, связана с поворотом троса. Модуль скорости $\mathbf{v}_1$, направленной вдоль троса, — это и есть данное в условии задачи значение скорости

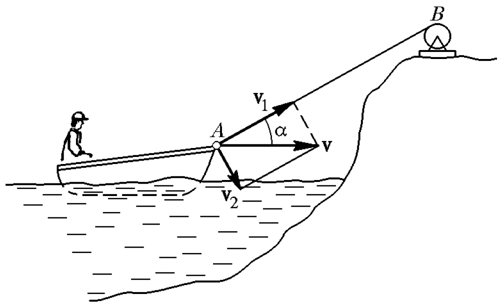

Рис. 21. Разложение скоростей точки A на составляющие

выбирания троса. Из рисунка видно, что $v \cos \alpha = v_1$, откуда $v = v_1/\cos \alpha$.

По мере приближения лодки к берегу угол α становится больше. Это значит, что $\cos \alpha$ убывает и искомая скорость v возрастает.

Задача для самостоятельного решения

Человек находится в поле на расстоянии l от прямолинейного участка шоссе. Слева от себя он замечает движущийся по шоссе автомобиль. В каком направлении следует бежать к шоссе, чтобы выбежать на дорогу впереди автомобиля и как можно дальше от него? Скорость автомобиля u, скорость человека v.

- Объясните, почему вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории.
- В некоторых случаях траектория движения частицы может иметь изломы. Приведите примеры таких движений. Что можно сказать о направлении скорости в точках, где траектория имеет излом?
- В случае непрерывного механического движения вектор скорости не испытывает скачков ни по модулю, ни по направлению. Появление скачков скорости всегда связано с некоторой идеализацией реального процесса. Какие идеализации присутствовали в приведенных вами примерах траекторий с изломами?

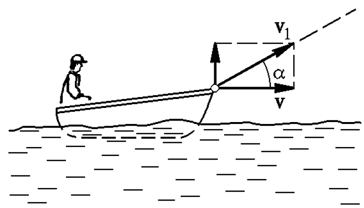

Рис. 22. Разложение скорости троса на горизонтальную и вертикальную составляющие

- Найдите ошибку в приводимом ниже решении задачи 4. Разложим скорость $\mathbf{v}_1$, точки A троса на вертикальную и горизонтальную составляющие (рис. 22). Горизонтальная составляющая $\mathbf{v}$ — это и есть искомая скорость лодки. Поэтому $v = v_1 \cos \alpha$ (неверно!).

△ **Скорость как производная.** Вернемся к выражению (1) для мгновенной скорости. При движении частицы ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ изменяется, т. е. является некоторой функцией времени: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Перемещение $\Delta\mathbf{r}$ за промежуток времени Δt представляет собой разность радиусов-векторов в моменты времени $t + \Delta t$ и t:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

Поэтому формулу (1) можно переписать в виде

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \qquad (5)$$

В математике такую величину называют производной от функции $\mathbf{r}(t)$ по времени t. Для нее используют следующие обозначения:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \qquad (6)$$

Последнее обозначение (точка над буквой) характерно именно для производной по времени. Отметим, что в данном случае производная представляет собой вектор, так как получается в результате дифференцирования векторной функции по скалярному аргументу.

Для модуля мгновенной скорости в соответствии с (2) справедливо выражение

$$v = v_s = \frac{ds}{dt}. \ \blacktriangle$$

§ 8. Ускорение

Только при прямолинейном равномерном движении частицы ее скорость v остается неизменной. Во всех остальных случаях вектор скорости изменяется. При прямолинейном неравномерном движении изменяется модуль скорости. При криволинейном равномерном движении изменяется направление скорости. В общем случае неравномерного криволинейного движения изменяется и модуль, и направление скорости. Физическая величина, которая характеризует быстроту изменения скорости, называется *ускорением.*

Пусть за промежуток времени Δt вектор скорости изменяется от значения $\mathbf{v}_1$ до значения $\mathbf{v}_2$. Отношение изменения скорости $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ к промежутку времени Δt называется *средним ускорением* за этот промежуток:

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Ускорение — вектор. Среднее ускорение представляет собой вектор, направленный вдоль $\Delta\mathbf{v}$. Он характеризует быстроту изменения скорости за определенный конечный промежуток времени. Неограниченно уменьшая этот промежуток, приходим к физической величине, характеризующей быстроту изменения скорости в данный момент времени. Эта величина называется *ускорением*:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{2}$$

В отличие от вектора скорости, который всегда направлен по касательной к траектории, вектор ускорения может иметь составляющие, направленные как по касательной, так и по нормали к траектории.

Направление ускорения. Вектор ускорения направлен вдоль траектории только тогда, когда эта траектория прямолинейная. Если частица ускоряется, т. е. модуль ее скорости растет, то вектор $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ направлен вдоль траектории вперед. Такое же направление имеет и вектор ускорения. Если движение частицы замедляется, т. е. модуль ее скорости убывает, то вектор ускорения направлен вдоль траектории назад.

Вектор ускорения направлен строго поперек траектории только при равномерном движении по криволинейной траектории, когда модуль скорости неизменен. Если вектор скорости по модулю не меняется, то все его изменение сводится к повороту. При этом, разумеется, векторы скорости для разных моментов времени изображаются выходящими из одной точки, хотя эти векторы соответствуют разным точкам траектории (рис. 23). Видно, что вектор $\Delta\mathbf{v}$, а следовательно, и вектор ускорения направлены в сторону вогнутости траектории.

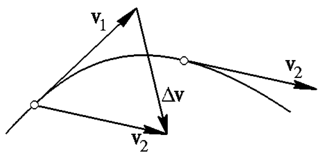

Рис. 23. Приращение скорости $\Delta\mathbf{v}$ при равномерном движении по криволинейной траектории

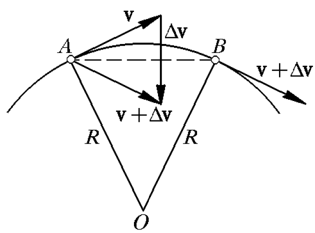

Рис. 24. Приращение скорости при равномерном движении по окружности

Рассмотрим частный случай движения по криволинейной траектории — равномерное движение по окружности радиуса R (рис. 24). В этом случае вектор ускорения в любой точке траектории направ-