Веретенников В.Г.
Синицын В.А.

Метод переменного действия (заметки)

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 531
ББК 22.21
В 31

Веретенников В.Г., Синицын В.А. **Метод переменного действия (заметки).** — 2-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 272 с. — ISBN 978-5-9221-0569-9.

В книге рассматриваются метод виртуального варьирования и метод переменного действия как дополняющие друг друга и составляющие общий аналитический подход, который является концептуальным для естествознания. На примере механических систем изучается изменение действия в результате применения виртуального варьирования, при котором из рассмотрения исключаются реакции идеальных связей. Таким образом, создаётся своего рода «инструмент», освоение которого необходимо для учёта ограничений при исследовании несвободных динамических систем.

Обосновываются и практически применяются новые и более общие формы принципов. В их числе: принцип освобождаемости и общее уравнение для несвободных динамических систем; принцип наименьшего отклонения, принцип изменяемого действия, включающий интегральный принцип равенства действия и противодействия, вириальный интегральный принцип, интегральный принцип для систем Четаева–Румянцева; принцип изменения нарушения симметрии, используемый при решении проблем инерционности движения и гравитации; принцип предикативности (логической и математической строгости) в механике.

Для студентов, аспирантов, научных сотрудников и преподавателей соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-0569-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

По предложению редакции весь прежний материал оставлен без изменений, но в некоторые заметки первого издания включены дополнительные пункты. Новые заметки вошли в главу IV «Решение прикладных задач», составили главу V «Принцип предикативности. Некоторые свойства гамильтоновых систем» и главу VI «Принцип инерционности».

На характере изложения и тематике заметок отразились новые впечатления от работ А. Пуанкаре, 150-лет со дня рождения которого отмечалось в 2004 году. А. Пуанкаре считал, что при кризисе всех основных принципов физики в начале XX века «пока остаётся вне сомнений принцип наименьшего действия... он является *более общим и неопределённым*» (курсив наш). С этими качествами связана предикативность понятий (правил, отношений, доказательств), что является существенным не только в логике, но, по-нашему мнению, и в теории механики. По-видимому, в математике первым рассматривал определимость и предикативность именно А. Пуанкаре. Одной из ключевых в механике и физике по-прежнему остаётся проблема инерционности и гравитации, но теперь принцип инерционности приобретает новую, более общую форму.

При работе над вторым изданием книги авторы имели финансовую поддержку в рамках научных программ ФЦП «Интеграция» и НП «Университеты России».

Посвящается памяти наших родителей

Предисловие к первому изданию

Книга написана в форме собрания заметок. В их число входят некоторые классические результаты с нашими комментариями, содержание ряда докладов, с которыми авторы выступали на конференциях и семинарах, а также статей в части, относящейся к рассматриваемым методам. Заметки логически связывает между собой близость тематики обсуждаемых вопросов, они сгруппированы по принадлежности к двум методам: виртуального варьирования и переменного действия. Эти методы образуют основу аппарата аналитической механики и используются также в небесной механике, механике сплошных сред, некоторых разделах теоретической физики, математической физики, ряда направлений математики и т. д.

В теоретической механике содержание работы было бы отнесено к разделам «Дифференциальные принципы механики» и «Интегральные принципы механики». Здесь мы рассматриваем метод виртуального варьирования и метод переменного действия как дополняющие друг друга и составляющие общий аналитический подход, который является концептуальным для естествознания. На примере механических систем изучается изменение действия в результате применения виртуального варьирования, при котором из рассмотрения исключаются реакции идеальных связей. Таким образом, создаётся своего рода «инструмент», освоение которого необходимо для учёта ограничений при исследовании несвободных динамических систем.

Надеемся, что наши «Заметки» будут полезны при изучении механики.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Интеграция» и Конкурса грантов по фундаментальным исследованиям в области технических наук.

Введение

Заметки объединяет аналитический подход, основанный на применении двух взаимосвязанных методов: метода виртуального варьирования и метода переменного действия. Основы этих методов являются составной частью содержания современных курсов теоретической механики [30, 39, 62].

Метод виртуального варьирования возник вместе с принципом «возможных» перемещений (принципом виртуальных скоростей Лагранжа (J.L. Lagrang)) и принципом Даламбера (J. d'Alembert) при объединении их в единый принцип Даламбера–Лагранжа, дающий общее уравнение аналитической механики. С использованием понятия «возможных перемещений» задаются реакции связей, в частности с помощью известного критерия идеальности связей. Принцип «возможных» перемещений вначале применялся при решении задач статики как необходимое условие равновесия. Достаточность принципа виртуальных скоростей для равновесия могла быть доказана только в теории, описывающей движение, так как «под виртуальной скоростью следует понимать скорость, которую тело, находящееся в равновесии, готово принять в тот момент, когда равновесие нарушено, т. е. ту скорость, какую тело фактически получило бы в первое мгновение своего движения...» [51]. Здесь мы вместо термина «возможное перемещение» предпочитаем пользоваться термином «виртуальное перемещение», чтобы избежать терминологического противоречия, указанного М.В. Остроградским [79]: при нестационарных связях виртуальные перемещения в общем случае не являются возможными в смысле физической реализации (иначе получилось бы, что «возможные перемещения» не являются возможными). Термин «виртуальные вариации» применяем, следуя авторам работ [74, 101], чтобы подчеркнуть, что варьирование производится в соответствии с требованиями, налагаемыми на виртуальные перемещения. Совокупность способов получения виртуальных вариаций, правила выбора множества последних и условия их применения составляют метод виртуального варьирования.

Метод виртуального варьирования является непременной составной частью дифференциальных и интегральных принципов механики на основе интегралов, называемых «действие».

Исследование роли интегрального принципа стационарного действия в развитии физики имеется в работе [87]. Гамильтон (W.R. Hamilton), занимаясь задачей объединения оптики и механики в единой математической схеме, задачу динамики свёл к задаче отыскания и дифференцирования характеристической функции V движения системы (действия). «Уравнение, выражающее фундаментальный закон вариации V, мы назовём уравнением характеристической функции или *законом переменного действия*» (цитата по кн. [87]) (курсив наш). Приёмы и способы изменения действия с целью выявления свойств движения составляют метод переменного (варьируемого) действия. В частных случаях движения систем обнаруживается, что действие имеет стационарное значение и может иметь максимум или минимум. Тогда говорят о принципе стационарного действия или о принципе наименьшего действия.

В общем случае метод позволяет вскрыть важные свойства движений путём сравнения их не только с возможными, но и с *невозможными* (перефразированное высказывание Эддингтона в отношении принципа Гамильтона [87]). Такая широкая свобода сравнений открывает целый спектр направлений исследования интегральных свойств движения на базе современных методов неголономной механики [101], обратных методов аналитической динамики, движения систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу [24], конструктивного подхода к реализации связей [44] и других приложений математической теории в современном естествознании. Постоянно происходит расширение области применения метода. Он применяется для описания систем с распределёнными параметрами, используется в динамике систем с деформируемыми элементами, систем, обладающих термодинамическими свойствами, систем со случайными связями и т. д.

Процесс развития и применения рассматриваемых методов со времён Мопертюи и до наших дней сопровождается критическими высказываниями в их адрес. По поводу принципа наименьшего действия Пуассон (S. D. Poisson, 1838) писал: «Если сравнить принцип наименьшего действия с законом живых сил, с законом сохранения центра тяжести и законом площадей, то мы увидим, что принцип наименьшего действия является лишь правилом для составления дифференциальных уравнений, являющимся *ныне* бесполезным...» [87] (курсив наш). Ответ на критику Пуассона дала история, показав, что метод переменного действия даёт правило составления уравнений процессов и вне классической механики. Известны критические высказывания Герца, ошибка Линделёфа в составлении с помощью принципа Гамильтона модели движения системы при наличии дифференциальных связей. В последнее время критике подверглись некоторые математические модели механических систем с дифференциальными связями (модели, получаемые с помощью принципа Гамильтона) [126]. В частности, «неприемлемость» некоторых новых моделей механики в некоторой мере обусловлена неприятием представлений о «реализации связи». Здесь мы также изучим модели с различными способами «реализации связи» и заметим, что этот термин входит в состав «гипотезы о реализации допустимых связей» в формулировке достаточности принципа

Даламбера–Лагранжа [25]. Термин, оставляя возможность отвлечься от способа реализации в случае идеальных связей, наполняется новым содержанием при появлении новых моделей. В частности, модель системы с идеальными связями может быть получена как предел различных последовательностей моделей, в которых рассматриваются конкретные силовые поля, участвующие в создании сил, являющихся реакциями. Для «конструктивных» способов реализации связей [44] требуется обобщение представления о виртуальных перемещениях и расширение сферы применения изучаемых методов. Заметим, что известная [119] «некорректность Пуанкаре в постановке задачи о теории возмущений» также может быть устранена с помощью конструктивного построения физических моделей.

Отрицание новых результатов или неправильное понимание как старых, так и новых результатов, а также неоправданное ограничение развития понятий и т. д. часто имеют объяснение в сфере методологии. Возникает подобная критика из-за неприятия её авторами одной простой, но важной, по нашему мнению, методологической схемы развития естественнонаучного знания. По этой схеме некая первичная модель используется при обосновании более общей модели, в которой первичная является частным случаем (получаемым при некоторых условиях согласно принципу соответствия). Указанная схема может характеризовать взаимоотношение теорий (например, квантовой и классической механики). «Квантовая механика занимает очень своеобразное положение в ряду физических теорий: она содержит классическую механику как свой предельный случай и в то же время нуждается в этом предельном случае для самого своего обоснования» [54]. Связующим элементом этих механических теорий является «действие». Добавим также, что описанная ситуация является типичной.

В приведённую выше схему (в несколько более сложном варианте для физико-математических моделей, когда речь идёт как о физических свойствах, так и об их математическом описании) укладывается и развитие отдельных понятий. Уточнение смысла основных применяемых понятий дано в заметках первой главы работы. Дано обобщение понятия материальной точки (заметка 1), рассмотрены понятия скорости и ускорения (заметка 2), обсуждается соотношение виртуальных перемещений и вариаций, используемых в дифференциальных и интегральных принципах (заметка 3). Закон Ньютона о действии и противодействии получен как следствие принципа равновесия Даламбера и второго закона Ньютона. Прослеживается логическая цепь, соединяющая принцип равновесия Даламбера с уравнениями «даламберова равновесия», использующими понятие о силе инерции. Предложено описание взаимодействия в форме интегрального равенства (заметка 4). Обсуждаются аналоги теоремы об изменении кинетической энергии для реономных систем и место функции Гамильтона в уравнении энергии (заметка 5). Приводятся примеры функционалов и функций «действие» различного физического смысла (заметка 6).

Содержание второй и третьей глав составляет разработка двух взаимосвязанных методов: метода виртуального варьирования и метода переменного действия.

Виртуальное варьирование предполагает использование виртуальных перемещений, определяющих свойства реакций связей. Таким путём применение операций вариационного исчисления при варьировании функционала «действие» увязывается с физическим смыслом учитываемых ограничений. Вспомогательный характер имеет заметка 7 о дифференцировании функции при неявной зависимости от переменных и о вариационной производной. Способы синхронного, асинхронного варьирования и способ, применённый Гельмгольцем (и его расширение), а также варьирование в скользящих режимах реализации связей рассматриваются в заметке 8. В заметке 9 обсуждается составление уравнений для виртуальных вариаций неголономной связи; связи, представляющей огибающую; связи, зависящей от двух независимых параметров; неравенства для виртуальных перемещений при неудерживающих связях. В одном из пунктов заметки 10 полностью содержится (с нашим примечанием) двухстраничная работа М. В. Остроградского «Заметка о равновесии упругой нити», написанная им по поводу одной известной классической ошибки Лагранжа; в других пунктах рассматривается использование неопределённых множителей при представлении реакций связей. Некоторое ограничение множества виртуальных перемещений позволило сформулировать обобщение принципа наименьшей кривизны Герца для систем с нестационарными связями (заметка 11). Несвободное движение систем с параметрическими связями (заметка 12) изучается на основе принципа освобождаемости по Четаеву, сформулированному им в задаче о вынужденных движениях; составлено общее уравнение несвободных динамических систем, основные уравнения «немеханической» части которых имеют первый порядок (в отличие от механической части, основные уравнения которой второго порядка), предложено общее уравнение динамики систем со случайными параметрами. Центральное вириальное равенство (заметка 13) выводится с помощью центрального уравнения Лагранжа.

Практическое применение интегральных принципов происходит через составление интегральных равенств, получаемых методом переменного действия. Классические примеры таких равенств дают интегральный принцип Гамильтона–Остроградского и интегральные принципы для неголономных систем.

В методе переменного действия развивается подход, состоящий в использовании способов синхронного, асинхронного варьирования и варьирования по Гельмгольцу. Среди полученных интегральных равенств (заметки 14–17): центральное интегральное равенство, составленное на основе центрального уравнения Лагранжа при асинхронном варьировании; обоснование аналога принципа Гамильтона–Остроградского в теории реономных систем; новое обобщение принципа Гёльдера, интегральный вириальный принцип и принцип систем Четаева–Румянцева, содержащих так называемые термодинамические точки, и т. д. В заметке 18 приведены требования, полученные Э. и Ф. Коссера к форме евклидового действия деформации на изменяемую линию. Применению интегральных принципов при движениях с ударами и в неголономных системах посвящены заметки 19, 20.

В качестве примеров приложения разрабатываемой теории анализируются (гл. IV) модели механических систем, содержащих абсолютно твёрдое тело и одномерный деформируемый элемент (стержень, нить). Модели динамики конкретных механических систем составлены с учётом замечаний Э. и Ф. Коссера в отношении формы евклидового действия, замечаний М. В. Остроградского о применении неопределённых множителей при наличии условных уравнений и т. д.

Полученные результаты исследования динамики конкретных механических систем имеют, на наш взгляд, самостоятельный прикладной интерес. В задаче о движении системы «жёсткое колесо — деформируемый рельс» (заметка 21) обнаружено некое псевдоскольжение (на пройденном пути действительное число оборотов колеса меньше, чем геометрическое число оборотов). В отличие от известного классического крипа (*creep*) [136], обусловленного продольными деформациями основания и (или) периферии колеса, причиной псевдоскольжения является поперечная деформация изгиба. В динамике колеса с деформируемым ободом (заметка 22) наблюдается эффект диссипации, являющийся причиной сопротивления качению. Свойства деформируемого стержня изучаются в заметках 23–25. Рассматривается схема перспективного волнового редуктора.

Основные связующие темы сохранились и для дополнительного материала, включённого во второе издание. Кинетическая энергия, кинетический потенциал и действие применяются при исследовании динамики общих и специальных систем. В их числе: реономные системы (п. 5.5); динамические системы (п. 12.5) и системы Четаева (п. 17.3), (заметка 29); системы с неевклидовым действием (п. 18.3); системы с распределёнными параметрами — стержень в задаче об устойчивости его формы (п. 25.5) и развёртываемая центробежными силами в космосе поверхность (заметка 27); система с диссипацией энергии за счёт гистерезиса в опоре (заметка 28); система переменного состава (заметка 30); гамильтоновы системы (заметки 32–35); системы, включающие бесконечно удалённые гравитирующие массы со сферической симметрией и инерционные объекты, нарушающие общую симметрию (заметки 36, 37); система, состоящая из релятивистской частицы и её собственного поля (заметка 38).

Общими являются вопросы учёта ограничений и взаимодействий. Предложен принцип освобождаемости от связей для динамических систем (п. 12.5), включающих в себя как частный случай системы Четаева. Распространение классического принципа освобождаемости соответствует последовательному включению: классические механические системы — системы Четаева (механическая часть и «немеханическая» часть) — динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Свойство идеальности связей формулируется как результат расширенного применения гипотезы Гаусса о мыслимых движениях механической системы (и виртуального варьирования по Лагранжу–Остроградскому). Применение принципа и свойство идеальности продемонстрированы на примере построения периодического решения системы с малым параметром (динамическая система Лоренца, преобразованная к форме системы Четаева, при наложении связей) (заметка 29). Неголономной связью является релятивистское ограничение скорости (сочетание свойств «свободная релятивистская» частица противоречиво).

Тесно связаны проблема инерционности и проблема гравитации, становящаяся всё более злободневной по мере её осознания. Предложение Э. Маха [64] по расширению аксиоматики Ньютона за счёт бесконечно удалённых масс учитывается при исследовании инерционности механического движения в форме принципа, названного принципом изменения нарушения симметрии (заметка 36) (аналог известного «спонтанного нарушения симметрии» при наблюдениях массы элементарных частиц). Нарушение симметрии — исходная посылка появления так называемого гравитационного парадокса [75]. Обсуждается задача вычисления энергоресурса бесконечно удалённых масс, из которых при наличии закона тяготения Ньютона в мысленных экспериментах формируется тело конечных размеров (шар) (заметка 37). Составлен кинетический потенциал системы: релятивистская частица — собственное поле, обладающее инерционными свойствами (заметка 38).

Может показаться, что заметка 31 не относится к рассматриваемому методу. Однако это только на первый взгляд. Более того, рекомендуем ознакомиться с заметкой 31 прежде, чем с остальными, так как в ней обсуждается предикативность понятий (правил, отношений, доказательств) — свойств, универсальных для логики, математики и естествознания. В заметке содержатся практически весь доклад А. Пуанкаре [91], наши комментарии и примечания, представляющие собой размышления и попытку лучше понять требования научной строгости на примерах. Механика весьма подходящий предмет для выработки отношение к научным результатам, получаемым в мысленных экспериментах с бесконечно удалёнными массами, с применением виртуального варьирования, интегральных принципов и интегральных инвариантов. Первооткрыватель интегральных инвариантов — А. Пуанкаре — широко пользовался принципом наименьшего действия и внёс свой вклад в его развитие. В то же время он высказывал и свою неудовлетворённость формой принципа: «Самая формулировка принципа наименьшего действия имеет в себе нечто, неприятно поражающее наш ум. При переходе от одной точки к другой материальная частица, не подверженная действию какой-либо силы, но подчинённая условию не сходить с некоторой поверхности, движется по геодезической линии, т. е. по кратчайшему пути. Эта частица как будто бы знает ту точку, куда её желают привести, предвидит время, которое она затратит, следуя по тому или иному пути, и наконец, выбирает путь, наиболее подходящий. В такой формулировке принципа частица представлена нам как бы одушевлённым существом, обладающим свободой воли. Ясно, что следовало бы заменить эту формулировку другой, более подходящей, в которой, выражаясь языком философа, конечные причины не становились бы явным образом на место причин действующих» [94].

Очевидно, что это не критика принципа изменяемого действия, а скорее, желание его усовершенствовать.

Заметки могут читаться независимо друг от друга, имеющиеся ссылки на формулы из других заметок снабжены двойной нумерацией.

Заметки дополняют тематику учебных пособий, написанных с участием авторов [13, 108, 114].

Глава I

ЗАМЕТКИ О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЯХ

1. Развитие понятия материальной точки в моделях механики

В истории механики можно выделить исследования, в которых вводятся расширения классического понятия материальной точки: точка комплексной массы, точка переменной массы, термодинамическая точка. Для объяснения свойств последней здесь предлагается использовать гипердействительные числа.

Известно, что объекты (в том числе идеальные, являющиеся математическими моделями) проявляются только через отношения (в виде физических взаимодействий, установленных качественно и количественно с помощью математики). Отношения же и свойства зависят от системы, в которую объект входит как элемент [50]. Реальные физические системы и отношения изучает физика, а идеальные свойства описываются на языке математики (аналогичная ситуация имеет место и в других естественных науках). Поэтому возникновение (и развитие) научного понятия сопровождается, условно говоря, созданием (и обновлением) «словарей» (терминологических и толковых), которые позволяют осуществлять «переводы» результатов физических экспериментов и наблюдений на язык математики и обратно. В качестве примера обсудим развитие понятия материальной точки в дискретных механических системах (неквантовых, нерелятивистских).

1.1. Классическое понятие материальной точки. Понятие материальной точки в классической механике сохранилось со времён Галилея и Ньютона до наших дней практически в неизменном виде: положение определяется геометрической точкой в трёхмерном евклидовом пространстве (пространстве R^3), а масса описывается с помощью трёхстолбцового словаря (см. табл.) [137].

В процессе развития понятия записи в «словаре» могут уточняться, таблица может расширяться за счёт столбцов, где указывалась бы система, в которой используется модель материальной точки, а также решаемая задача (проводимое исследование). Даже условие «изолированности» материальной точки в законе инерции Галилея (первый закон Ньютона) предполагает упоминание об инерциальной системе отсчёта, что указывает на возможность пополнения словаря информацией о новых физических явлениях, соответствующих математическим моделям пространства и времени (в последнее время открыты реликтовое излучение, являющееся наилучшим из известных ныне приближений к инерциальной системе координат, и атомные эталоны

Таблица

Наименование понятия	Математические понятия	Физические понятия
1	2	3
Масса	Положительное число (m)	Количество вещества в теле. Мера сопротивления тела изменению скорости. Мера способности тела гравитационно притягивать другое тело.

времени). В первом столбце таблицы также неявно фигурирует гипотеза о тождестве инерционной и тяготеющей масс. Схему словаря для классического понятия материальной точки примем за основу, отмечая новые свойства более общих терминов.

1.2. Модели точки комплексной массы и точки переменной массы. Потребность в понятиях *точка комплексной массы* и *точка переменной массы* возникла при решении конкретных задач динамики некоторых механических систем.

Примером применения комплексных чисел для описания массы является представление нецентрального гравитационного поля в задаче о движении искусственного спутника [33]. Классическая задача двух центров в небесной механике (Эйлер, Н. Е. Жуковский [38]) в случае комплексных масс двух притягивающих центров принимает обобщённую трактовку. Отметим, что комплексные массы вводятся одновременно для двух точек и используется комплексное пространство C^3, в котором для вычисления «расстояния» принято эрмитово скалярное произведение. Ограничения на комплексные числа выводятся из требования, чтобы силовая функция

$$U = \frac{\mu m_1}{r_1} + \frac{\mu m_2}{r_2},$$

где μ — гравитационная постоянная Гаусса ($\mu = fm$, f — универсальная гравитационная постоянная), m_1 и m_2 — массы неподвижных притягивающих центров M_1 и M_2, а r_1 и r_2 — расстояния от них до пассивно гравитирующей массы m, имела действительные значения. Для этого массы притягивающих центров представляются комплексными сопряжёнными числами, а «расстояния» от них до точки с массой m имеют вид

$$r_i = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_i)^2}\,, \quad i = 1{,}2.$$

Здесь c_1 и c_2 — комплексные сопряжённые числа.

Точка переменной массы (A. Cayley, И. В. Мещерский) — термин, используемый для определения некоторых моделей систем переменного состава. История развития этого направления динамики рассмотрена в работах Г. К. Михайлова (см., например, [69]). Заметим, что даже при малых размерах системы, когда её положение может быть задано одной геометрической точкой, определение «*материальная* точка переменной массы» может служить источником ошибочного учёта внешних сил. Если силы приложены к материальной точке, то они аксиоматически эквивалентны одной равнодействующей. Однако для точки переменной массы такой вывод в общем случае сделать нельзя, так как внешние силы могут быть приложены к разным материальным точкам, составляющим точку переменной массы (например, «уходящей» и «остающейся»), даже если эти материальные точки представлять находящимися в одном и том же геометрическом месте. Анализ подобных моделей имеется в работе [13].

Для описания массы материальной точки в рассматриваемых системах служат математические понятия: комплексное число и функция времени.

1.3. Модель термодинамической точки. Сразу же отметим, что при формировании понятия термодинамической точки отношение механики и термодинамики принимается в некотором смысле противоположным традиционному. Обычно термодинамические системы рассматриваются состоящими из материальных точек. «Точки», о которых идёт речь, ввёл Н. Г. Четаев при формулировке своего принципа [128], наделив их термодинамическими свойствами. Затем В. В. Румянцев, обосновывая принцип Четаева, отметил, что изучается физическая система, которая «состоит из совокупности физически малых материальных частиц («точек»), рассматриваемых как термодинамические системы, для каждой из которых определены механические понятия о положении и движении и физические понятия о внутреннем состоянии, характеризуемые конечным числом величин, задаваемых числами — определяющими параметрами» [103]. Для краткости каждую такую «физически малую материальную частицу» будем называть термодинамической точкой.

Полагается, что каждая термодинамическая точка обладает свойствами материальной точки, и кроме того, характеризуется внутренней энергией, способностью к теплообмену (абсолютной температурой, энтропией). Системы из термодинамических точек (названные в работе [14] системами Четаева–Румянцева) удобны для аналитического исследования и являются обобщением чисто механических систем, в которых тепловые процессы несущественны. Несмотря на имеющееся внешнее оправдание существования таких объектов, нельзя считать удовлетворительной суть данного понятия. Дело в том, что в нём присутствуют противоречивые свойства: детерминированное однозначное определение положения точки и её вероятностные термодинамические свойства (описываемые энтропией). Последние невозможно математически описать без раскрытия внутренней структуры термодинамической точки. Разъяснение возникшего противоречия даёт, на наш взгляд, представление положения точки в пространстве, координатами которого являются гипердействительные числа.

Основа противоречия состоит в том, что положение точки детерминированно и однозначно определено в том случае, если используется пространство, координаты которого — действительные числа. В настоящее время в математике интенсивно развивается так называемый нестандартный анализ (см., например, [119]). Один из его вариантов основывается на рассмотрении поля гипердействительных чисел R^*, представляющего собой неархимедово расширение поля действительных чисел R. (Напомним аксиому Архимеда: если $|x| < 1/n$, для любого натурального n, то $x = 0$.) Поле R этой аксиоме удовлетворяет, а поле R^* — нет. Разница состоит в том, что, например, отрезки $[0, 1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющие лишь единственное общее действительное число 0, содержат бесконечно много общих гипердействительных чисел (которые все называются бесконечно малыми: $0 < \lambda < 1/n$ для любого натурального n). «Числами» являются формальные ряды вида

$$a_1\lambda^{\rho_1} + a_2\lambda^{\rho_2} + \ldots,$$

где a_1, ρ_1, a_2, $\rho_2, \ldots$ — действительные числа; последовательность $\rho_1, \rho_2, \ldots$ — неограниченно возрастающая. К каждому действительному числу поле гипердействительных чисел добавляет, как образно говорят, «ореол» из бесконечно малых чисел. Отмеченные выше противоречия снимаются, поскольку появляются новые математические объекты для описания внутренней структуры и дополнительных физических свойств «точки».

В число определяющих параметров термодинамической точки, кроме массы, координат радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v}$, могут входить переменные параметры μ_i и физические постоянные [103]. Изменение определяющих параметров в функции времени представляет собой некоторый процесс, включающий и механическое движение. В определение термодинамической точки входит также описание возможных состояний и процессов, обусловленное её взаимодействиями с другими телами.

Представление о массе, находящейся не только в точке, заданной действительным числом, но и «размазанной» по бесконечно малой окрестности (по её «ореолу»), расширяет понятие классической материальной точки. Геометрическое пространство R^{*3} для задания положений массы позволяет более полно представить пространственные свойства понятий точки переменой массы и термодинамической точки и даёт возможность применения их в математических моделях механики (и других физических систем).

2. О понятиях скорости и ускорения материальной точки

Для формирования понятий скорости и ускорения был необходим метод исчисления бесконечно малых, связанный с именами Ньютона и Лейбница. Ньютон применяет его в важнейшем из своих произведений — «Principia» — только в неявной форме, и лишь спустя полвека анализ позволил Л. Эйлеру систематически изложить механику в работе «Механика, т. е. наука о движении, изложенная аналитическим методом», Петербург, 1736 г. (см. [132]). Современные представления требуют для этих понятий ещё более сложного математического описания.

2.1. Скорость материальной точки и производная по времени её радиуса-вектора. С помощью производной переменного радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки в современных учебниках по теоретической механике вводится вектор скорости точки:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1}$$

Сравним производную (1) с определением скорости, которое дал Эйлер: «О всяком теле, которое движется, говорят, что оно имеет быстроту или скорость, и эта скорость измеряется тем расстоянием, которое тело, двигаясь равномерно, проходит в данное время» (определение 5, [132]). Далее Эйлер описывает условия мысленного эксперимента для измерения скорости: «Скорость, которую имеет движущееся неравномерно тело в какой-либо точке проходимого пути, должна измеряться тем расстоянием, которое *могло бы* пройти в данное время тело, движущееся равномерно с этой же скоростью» (следствие 2, [132]; курсив наш). Курсивом выделено указание Эйлера на виртуальность событий [1]), происходящих в последующие моменты времени.

Физический смысл, содержащийся в определении Эйлера, в формуле (1) отсутствует. Эта формула может быть использована только для движений, траектории которых являются кривыми класса C^1 ($\mathbf{r}$ — непрерывные дифференцируемые функции времени). Для нахождения скорости в данный момент времени требуется информация об однозначном положении точки в момент времени $t + dt$, т. е. фактически в «будущем». Задача прогнозирования будущего положения точки полагается фактически решённой в линейном приближении на элементарном промежутке времени.

[1]) Событие в классической механике характеризуется совокупностью определяющих координат и временем [137].

Отмеченные недостатки лишают скорость (1) статуса самостоятельной характеристики (независимой от действительного изменения положения и изменения времени) [1]).

Модификация определения (1) с помощью понятия об односторонних производных пригодна для некоторых движений, траектории которых содержат угловые точки. Односторонние производные позволяют описывать движение, при котором в изолированных точках траектории происходят удары (в числе основных аксиом теории стереомеханического удара — аксиома о конечном изменении скорости при ударе). Однако уже в задаче о соударении двух тел при наличии сухого трения в месте контакта для описания изменения скорости (при фиксированном времени) составляются дифференциальные уравнения относительно скорости $\mathbf{v}(N)$ как функции монотонно возрастающего импульса нормальной составляющей реакции в месте контакта (N) (см., например, [113]).

В моделях точки переменной массы (системы переменного состава) рассматриваются «непрерывные удары». При этом вектор относительной скорости «присоединяющейся» и (или) «отделяющейся частицы» представляет собой усреднение по некоторому промежутку времени. Точнее говоря, усредняется импульс, а это значит, что усреднение происходит не только по времени, но и по пространственному распределению массы этих «частиц».

Современные представления о физическом смысле скорости материальной точки, используемые в понятиях кинетической и потенциальной энергии, действия и других, требуют сопоставления им математических объектов, называемых обобщёнными функциями (распределениями) [99, 135]. Так, например, в интегральных принципах, использующих выражение кинетической энергии, скорости $\mathbf{v}(t)$ — функции, интегрируемые не менее чем с квадратом, т. е. принадлежащие пространству распределений L^2 [2]). Если кинетическая энергия является локально интегрируемой функцией, то ей однозначно сопоставляется (в случае её существования) обобщённая функция.

2.2. Об ускорении материальной точки. После замечаний в отношении скорости становятся понятными трудности поиска [85] «ускорения — физической величины, характеризующей изменение скорости»

---

[1]) Этот вопрос, по-видимому, относится к проблеме неопределённости в классической механике [124] (подобной принципу неопределённости Гейзенберга в квантовой механике).

[2]) Пространство L^2 можно рассматривать как наименьшее полное пространство (пополнение относительно L^2-нормы), содержащее пространство $C^{(2)}$ ($C^{(2)}$ — пространство непрерывных квадратично интегрируемых функций) [99].

в виде производной по времени от (1):

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{2}$$

Историку не удалось найти ни у Галилея, ни у А. М. Ампера, ни у Лагранжа ускорение в форме (2). В своём исследовании формирования понятия ускорения И. Б. Погребысский отмечает: «Что касается картезианской механики, то она вообще обошлась без ускорения, оперируя возрастанием импульса или скорости», а «введение понятия ускорения как понятия «sui generis», подготовленное Галилеем, каково бы оно ни было, осуществилось только после Лагранжа. И так как было уже привычно понятие *ускоряющей силы*, то это прошло почти незамечено, в процессе исследований, можно сказать само собой» (курсив наш).

Этот результат, по нашему мнению, не случаен, так как без *ускоряющих сил* в динамике *физический смысл* ускорения неясен. Формула (2) даёт чисто кинематическое представление об изменении «скорости» (1) в случае траекторий, принадлежащих кривым класса C^2.

Модели механического движения, в которых траектория не является кривой класса C^2, не единичны. Так, в динамике несвободных систем рассматриваются последовательности моделей, в которых связь реализуется бесконечно возрастающими силами (движение в «скользящем режиме»). Приведём примеры моделей, в которых возникают такие режимы.

При бесконечном возрастании коэффициента жёсткости потенциальные упругие силы могут обеспечить условие голономной связи.

Движение с ограничением в виде уравнения, линейного относительно скорости, может рассматриваться как движение относительно некоторой гипотетической проницаемой сплошной среды [67].

Как известно, в моделях гидромеханики [49] к воздействиям среды на тело относят вязкие силы сопротивления движению и сопротивление изменению ускорения путём учёта инерционных свойств идеальной жидкости с помощью присоединённых масс. Поэтому в качестве сил, обеспечивающих условие связи, могут использоваться диссипативные силы вязкого трения при бесконечно возрастающем коэффициенте вязкого трения, а также присоединённые массы, возрастающие до бесконечности [44].

В первом способе реализации связи при отклонении положения точки от поверхности, заданной уравнением связи, создаются упругие силы; во втором способе силы вязкого трения противодействуют «скорости деформации связи»; наличие присоединённых масс эквивалентно действию сил, линейно зависящих от ускорения, поэтому третьим способом реализации связи обеспечивается противодействие «ускорению деформации связи». Эти способы можно использовать в некоторых сочетаниях. В результате движения принимают вид соответствующих скользящих режимов [121], обеспечивающих заданную точность выполнения условий связи лишь на конечном интервале времени.

Вместо уравнения движения материальной точки в скользящем режиме имеем дифференциальное включение [13]

$$m\mathbf{w} \in \Phi, \tag{3}$$

где m — масса материальной точки; Φ — множество допустимых векторов $(\mathbf{F}+\mathbf{R})$, $\mathbf{F}$ — равнодействующая активных сил, а $\mathbf{R}$ — равнодействующая сил реакции, приложенных к материальной точке.

Например, пусть в течение бесконечно малых промежутков времени Δt_1 и Δt_2 попеременно создаются ускорения $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$. Тогда одним из способов выбора $\mathbf{w}$ является доопределение следующего вида (рис. 2.1):

$$\mathbf{w} = \gamma\mathbf{w}_1 + (1-\gamma)\,\mathbf{w}_2,$$

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \quad \gamma = \lim\frac{\Delta t_1}{\Delta t}, \quad \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2, \quad \Delta t \to 0,$$

где коэффициент γ находится из условия выполнения уравнения связи.

Рис. 2.1

Рис. 2.2

П р и м е р. Одномерная консервативная система двух материальных точек (рис. 2.2) движется в потенциальном силовом поле с энергией

$$\Pi = \frac{1}{2}\,c(x_1 - x_2 - l)^2,$$

где c и l — константы.

Изменение разности координат точек происходит по закону

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 = l + \sqrt{\frac{2E}{c}}\,\sin\sqrt{\frac{c}{\mu}\,(t-t_0)}\,, \\ E = T + \Pi = \text{const}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}. \end{gathered} \tag{4}$$

Из (4) следует, что при $c \to \infty$ потенциальные силы «реализуют» связь $|x_1 - x_2| = l$, а относительная скорость точек и относительное ускорение равны нулю в среднем на периоде.

3. К обоснованию принципа Гамильтона

3.1. Из истории «силы» и «действия». В 1744 году Мопертюи для объяснения некоторых оптических и механических явлений сформулировал «принцип наименьшего действия», в котором термин «действие» используется в смысле «деятельности», и измеряется это действие произведением mvs, где m — масса, v — скорость, s — путь, пройденный телом. Суждение, расширяющее представление о действии, было высказано Даламбером в связи с происходившим в то время спором о том, что считать «силой» (производящей «действие») при движении тела: импульс $m\mathbf{v}$ или живую силу Лейбница mv^2? «Вся трудность... сводится к тому, чтобы определить, следует ли измерять силу числом препятствий или суммой сопротивлений этих препятствий. Может показаться более естественным измерять силу именно последним способом... И тем не менее, поскольку в слове *сила* не содержится никакого ясного и точного смысла, помимо соответствующего ей *действия*, я полагаю, что нужно каждому предоставить свободу решать данный вопрос по его усмотрению» [32] (курсив наш).

Эйлер, пользуясь равенством

$$mv\,ds = mv^2\,dt, \tag{1}$$

т. е. при $ds = v\,dt$, показал, «что для кривой, описываемой брошенным телом, сумма всех живых сил, находящихся в теле в отдельные моменты времени, будет наименьшей» [133]. И как отклик на тогдашние споры, Эйлер в этой же работе отметил: «...таким образом ни те, кто полагает, что силы следует оценивать по самим скоростям, ни те, кто — по квадратам скоростей, не найдут здесь ничего неприемлемого».

Примечание. Термин «сила» в контексте приведённых цитат классиков по своему смыслу отличается от современного применения этого термина. Однако можно отметить уместность его в данном тексте и, что немаловажно, согласованность с понятием о действии. Данную ситуацию можно сравнить (по этому поводу см. замечания Бертрана [51]) с применением термина «сила» Лагранжем для обозначения ставших общепринятыми понятий обобщённых сил (набор которых составляет ковектор для выбранного вектора обобщённых координат).

Пусть движение материальной точки происходит в потенциальном силовом поле. Обозначим

$$H = T + \Pi, \tag{2}$$

где $T = mv^2/2$ — кинетическая энергия; Π — потенциальная энергия.

Перенесём слагаемое из правой части (1) в левую часть и воспользуемся равенством (2):

$$mv\,ds - (T - \Pi)\,dt = H\,dt.$$

Обозначив через L функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi, \tag{3}$$

имеем

$$mv\,ds - L\,dt = H\,dt, \tag{4}$$

или

$$mv\,ds - H\,dt = L\,dt. \tag{5}$$

После интегрирования равенства (5) на фиксированном промежутке времени $[t_0,\, t_1]$ имеем

$$\int (mv\,ds - H\,dt) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt. \tag{6}$$

Интеграл в левой части (6) является криволинейным по траектории (в пространстве координат–времени) из начального положения в конечное. Интегралы в равенстве (6) называют действием по Гамильтону:

$$\text{а)}\quad S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt, \qquad \text{б)}\quad S = \int (mv\,ds - H\,dt). \tag{7}$$

Если при движении сохраняется полная механическая энергия, т. е.

$$H = T + \Pi = h = \mathrm{const}, \tag{8}$$

то из (7) с учётом (8) имеем также

$$S = -h(t_1 - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\,dt, \qquad S = -h(t_1 - t_0) + \int\limits_{s_0}^{s_1} mv\,ds. \tag{9}$$

Интегралы

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\,dt = \int\limits_{s_0}^{s_1} mv\,ds \tag{10}$$

называются действием по Лагранжу. Исторически они использовались раньше, чем было обосновано применение действия по Гамильтону (7) в неконсервативном случае. Однако здесь нами принята иная последовательность с целью показать соотношения между действием по Лагранжу и действием по Гамильтону в виде равенств (9). Заметим, что при выводе первого из этих равенств с помощью интеграла энергии (8) в выражении функции Лагранжа произведена замена потенциальной энергии П. Выражая кинетическую энергию, получим

$$S = -h(t_1 - t_0) - \int_{t_0}^{t_1} 2\Pi\,dt. \tag{11}$$

Последнее равенство показывает, почему Лагранж не называл свой принцип принципом наименьшего действия: «рассматриваемый принцип сводится собственно к тому, что сумма живых сил всех тел от момента, когда они выходят из заданных точек, до того момента, когда они приходят в другие заданные точки, является максимумом или минимумом. Следовательно, его с большим основанием можно было бы назвать *принципом наибольшей или наименьшей живой силы*; эта формулировка имела бы то преимущество, что она была бы общей как для движения, так и для равновесия; ... мы видели, что при прохождении положения равновесия живая сила всегда бывает наибольшей или наименьшей» [51].

Принцип, будучи пригодным к задаче о равновесии, полезен, очевидно, и в случае квазистатических процессов, настолько медленных, что можно пренебречь кинетической энергией, как, например, в задаче о квазистатическом нагружении стержня скользящей нагрузкой (см. заметку 23).

Для системы материальных точек, положение которой задаётся обобщёнными координатами q_i (пространство конфигураций), в переменных Лагранжа q_i, t, $\dot{q}_i$ ($\dot{q}_i$ — обобщённые скорости) действие по Гамильтону имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q_i, t, \dot{q}_i)\,dt, \quad q = (q_1, \ldots, q_n). \tag{12}$$

При использовании переменных Гамильтона q_i, t, p_i (p_i — обобщённые импульсы):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{13}$$

интеграл (7 б) примет следующую форму:

$$S = \int \left(\sum_i p_i\,dq_i - H\,dt \right). \tag{14}$$

Интегралы, называемые «действие», используются в двух направлениях: для описания свойств движения и при составлении уравнений движения [51]. Интересна роль действия в теориях, граничащих с классической механикой. Например, в обосновании взаимоотношения классической и квантовой физики [54] действие используется как математический объект, позволяющий проводить квантование, а в перспективе — и вторичное квантование [106]. Понятие о действии является основой утверждений в форме принципов.