Каленова В.И.
Морозов В.М.

Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 629.7.052
ББК 32.965.4
К 17

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 09-01-07099

Каленова В.И., Морозов В.М. **Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 208 с. — ISBN 978-5-9221-1231-4.

Книга посвящена исследованию различных вопросов анализа и синтеза линейных нестационарных систем. Изложены основы оригинальной теории проводимости линейных нестационарных систем, содержащих управления и наблюдения. На различных механических задачах (из гироскопии, инерциальной навигации, космической динамики и др.) демонстрируется эффективность применения изложенных теоретических результатов.

Книга будет полезной научным работникам, преподавателям, аспирантам, магистрам, и студентам вузов, занимающимся вопросами динамики, устойчивости и управления.

ISBN 978-5-9221-1231-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Работа посвящена вопросам анализа и синтеза нестационарных (неавтономных) линейных систем и их приложениям к различным задачам механики.

В настоящем издании проводится систематическое изложение методов исследования структурных свойств нестационарных линейных систем: устойчивости, управляемости, наблюдаемости. Помимо известных результатов книга содержит и оригинальные результаты, полученные авторами. Приведены теоремы об устойчивости многомерных линейных нестационарных систем второго порядка, и выделен специальный класс таких систем, имеющий прикладное значение. Излагается теория линейных нестационарных приводимых систем управления и оценивания. Изложение теоретических результатов сопровождается многочисленными методическими примерами. На задачах из теории гироскопов, инерциальной навигации, космической динамики и др. демонстрируется эффективность применения изложенных теоретических результатов.

Книга представляет собой расширенное и значительно дополненное издание монографии авторов [94]. Наиболее существенные и новые результаты содержатся в главах, посвященных разнообразным приложениям изложенной теории.

При написании разделов 6.3, 7.2, 12.4, 12.6, 13.1 использованы результаты, полученные П. М. Соболевским.

Книга будет полезной научным работникам, преподавателям, аспирантам, магистрам и студентам вузов, занимающимся вопросами динамики, устойчивости и управления объектами, моделями которых являются линейные нестационарные системы. Материалы издания могут быть использованы при разработке специальных курсов по теории устойчивости и управления движением на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова и в других университетах.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи механики и техники, в частности, задачи динамики и управления движущимися объектами приводят к необходимости исследования нестационарных нелинейных систем и их линеаризованных моделей. Для успешного решения этих задач необходимы эффективные, удобные в применении методы исследования процессов, протекающих в нестационарных линейных системах.

Объектом исследования предлагаемого читателям издания является динамическая система, поведение которой описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad z = C(t)x.$$

Здесь t — время, $x(t)$ — действительный n-мерный вектор-столбец, определяющий состояние системы (вектор фазовых координат), $u(t)$ — r-мерный вектор входных переменных (управлений или возмущений), $z(t)$ — m-мерный вектор выходных переменных (измерений или наблюдений), матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы с действительными непрерывными элементами соответствующих размерностей.

В частном случае, когда матрицы A, B, C постоянны, система называется стационарной.

Свойство стационарности линейной системы открывает теоретические и практические возможности для более глубокого ее исследования. Эти возможности были с успехом реализованы в создании законченной теории стационарных линейных систем, которая изложена во многих книгах (см., например, [6, 9, 23, 24, 54, 55, 58, 77, 81, 83, 84, 102, 110, 127, 136, 148, 172]), доступна инженерам и удобна в применении. Обзор журнальных публикаций по различным аспектам исследования стационарных линейных систем и соответствующую библиографию можно найти в [25, 26, 46, 114, 115, 170].

Иначе обстоит дело, когда рассматривается нестационарный линейный объект. Зависимость коэффициентов системы от времени вносит принципиальные трудности как в изучение структурных свойств системы (устойчивости, управляемости, наблюдаемости), так и в разработку алгоритмов управления и оценивания, простых и удобных в приложениях.

Конструктивная теория исследования структурных свойств нестационарных линейных систем общего вида пока не создана, поэтому естественное направление в анализе таких систем состоит в выделении имеющих практическое значение классов систем, для которых возможно получать более глубокие результаты.

Важным классом нестационарных линейных систем являются приводимые системы, причем не только однородные, но и включающие в себя управляющие воздействия и уравнения измерений (наблюдений).

Термин «приводимость» был введен впервые А. М. Ляпуновым в связи с задачей об устойчивости линейных однородных систем с периодическими коэффициентами [74].

Свойство приводимости нестационарных линейных систем позволяет применять для их исследования простые и хорошо разработанные методы анализа и синтеза систем с постоянными параметрами, в том числе классические частотные и временны́е методы теории устойчивости и управления.

Для построения стационарных моделей нестационарных систем используются различные приближенные приемы приведения, к которым относятся методы усреднения, методы «замораживания», метод гармонической стационаризации и т. п. [1, 13, 20, 21, 31, 76, 83, 84, 94, 103, 154]. Эти приемы отличаются по степени строгости и областям применимости.

С проблемой приводимости тесно связана задача нахождения решения линейной нестационарной системы в замкнутой форме [15, 27, 38, 39, 68, 93, 94, 154, 160, 162, 179–183, 186, 187]. Эта задача давно привлекала внимание исследователей и до сих пор является актуальной, очень трудной и далеко еще не решенной.

Методы анализа и синтеза нестационарных линейных систем можно условно разделить на две группы: временны́е методы (методы пространства состояний) и методы функциональных преобразований.

К первой группе относятся методы Ляпунова (первый и второй), качественные и асимптотические методы исследования дифференциальных уравнений, методы линейной теории управления, основанные на понятии пространства состояния. Этим методам посвящена обширная литература. Укажем лишь некоторые книги, имеющие непосредственное отношение к рассматриваемым вопросам: монографии и учебные пособия по теории устойчивости и качественным методам [1–3, 6–9, 11, 16, 22–24, 27, 30–32, 36, 39, 42, 43, 65, 69, 74, 77, 80, 81, 91, 92, 108, 116, 117, 124, 126–128, 130, 131, 134, 136, 138, 140, 141, 145, 151, 154, 171, 172, 176], книги по теории управления [6, 7, 19, 44, 55, 58, 66, 71, 83, 84, 102, 110, 134, 148, 176].

Ко второй группе относятся методы, основанные на использовании спектральной формы математического описания системы и связанные с преобразованиями Лапласа и Фурье. Этим методам посвящены монографии и учебные пособия [33, 83–85, 89, 90, 111, 119, 120, 123, 129].

В предлагаемом издании теория линейных нестационарных систем излагается в духе методов первой группы.

Книга состоит из двух частей. В первой части, состоящей из трех глав, излагаются теоретические результаты, связанные с вопросами интегрируемости, приводимости и устойчивости линейных нестационарных систем, как однородных, так и содержащих управления и наблюдения. Вторая часть, включающая в себя главы IV и V, посвящена применению теории линейных нестационарных систем к некоторым задачам механики. На примерах рассматриваемых задач демонстрируется эффективность применения изложенных теоретических результатов. Некоторые из представленных задач являются новыми и оригинальными, другие рассмотренные задачи — классические. Указаны точные решения ряда задач, для которых ранее были известны только приближенные решения. Следует отметить, что при рассмотрении конкретных механических систем используются лишь их упрощенные модели, так как здесь основной целью является демонстрация эффективности применения теоретических результатов, изложенных в части I.

Часть I

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В главе I вводятся основные понятия теории систем линейных дифференциальных уравнений, описаны основные классы систем, интегрируемых в замкнутой форме, и рассмотрены вопросы приведения однородных линейных нестационарных систем к стационарным системам.

В главе II рассматриваются вопросы устойчивости линейных нестационарных систем. Приведены основные определения и теоремы об устойчивости. Излагаются критерии устойчивости некоторых специальных классов и предложен новый подход к исследованию устойчивости линейных нестационарных систем. Приведены теоремы об устойчивости многомерных линейных нестационарных систем второго порядка и выделен специальный класс таких систем, имеющий прикладное значение.

Глава III содержит изложение основ теории приведения линейных нестационарных систем, содержащих управления и наблюдения, к стационарным системам. Формулируются основные понятия теории наблюдаемости и управляемости линейных систем. Рассматриваются условия приводимости линейных систем, нестационарных по управлению и наблюдению, как в пространстве состояний, так и в пространстве управлений (наблюдений). Описывается класс нестационарных систем, которые допускают приведение путем невырожденного преобразования к стационарным системам того же порядка, что и исходная система, а также выделяется класс систем, допускающих такое приведение путем расширения пространства состояний. Исследуются вопросы наблюдаемости и управляемости для приводимых систем и описаны некоторые алгоритмы управления и оценивания.

Глава I

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Решение уравнений состояния линейных систем

1.1. Основные свойства переходной матрицы

1.1.1. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t). \tag{1.1}$$

Здесь $y = \|y_1 y_2 \ldots y_n\|^{\mathrm{T}}$ — $(n \times 1)$-вектор состояния системы, $y \in R^n$, R^n — n-мерное евклидово пространство, $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ — $(n \times n)$-матрица с элементами $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, являющимися действительными непрерывными функциями времени t на промежутке $I = [t_0, \infty)$ $(t_0 \geqslant 0)$; $f(t) = \|f_1(t) \ldots f_n(t)\|^{\mathrm{T}}$ — $(n \times 1)$-вектор внешних воздействий, элементы которого $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — кусочно-непрерывные функции t $(t \in I)$. Далее будем использовать обозначение $\dot{y} \equiv \dfrac{dy}{dt}$.

Для линейной системы (1.1) справедлива

Теорема 1.1 (существования и единственности решений) [см., например, 107]. *Для любых* $t_0 \in I$ *и* $y_0 \in R^n$ *существует решение* $y = y(t)$ *системы* (1.1), *определенное для всех* $t \in I$ *и удовлетворяющее начальному условию* $y(t_0) = y_0$, *причем решение с такими свойствами единственно на интервале* I.

Однородная линейная система, соответствующая системе (1.1), имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{1.2}$$

Фундаментальной системой решений уравнения (1.2) называется произвольная система n решений $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, линейно независимых для любого $t \in I$. Квадратная $(n \times n)$-матрица $X(t)$ со столбцами $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ называется фундаментальной матрицей уравнения (1.2) $(\det X(t) \neq 0)$. Легко убедиться, что $X(t)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t). \tag{1.3}$$

Любое решение системы (1.2) может быть записано в виде

$$x(t) = X(t)c,$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (1.2), c — некоторый постоянный $(n \times 1)$-вектор.

Если решение $x(t)$ удовлетворяет начальному условию $x = x(t_0)$, то

$$x(t) = \Phi(t,\, t_0)x(t_0),$$

где $\Phi(t,\, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ — переходная матрица системы (1.2) (матрица Коши).

Переходная матрица $\Phi(t,\, t_0)$ обладает следующими свойствами [2, 3, 6, 32, 105]:

1) матрица $\Phi(t,\, t_0)$ не зависит от выбора фундаментальной матрицы $X(t)$;

2) $\Phi(t_0,\, t_0) = E_n$, E_n — единичная $(n \times n)$-матрица;

3) матрица $\Phi(t,\, t_0)$ удовлетворяет матричному уравнению (1.3) с начальным условием $\Phi(t_0,\, t_0) = E_n$:

$$\dot{\Phi}(t,\, t_0) = A(t)\Phi(t,\, t_0),\ \Phi(t_0,\, t_0) = E_n;$$

4) $\Phi^{-1}(t,\, t_0) = \Phi(t_0,\, t)$;

5) имеет место формула Лиувилля–Якоби

$$\det \Phi(t,\, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau\right) \quad \left(\operatorname{Sp} A(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t)\right);$$

6) $\Phi(t,\, t_1)\Phi(t_1,\, t_0) = \Phi(t,\, t_0)$.

Решение системы неоднородных уравнений (1.1), как следует из метода вариации произвольных постоянных, представляется в виде

$$y(t) = \Phi(t,\, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\, \tau)f(\tau)\, d\tau. \tag{1.4}$$

Система, сопряженная системе (1.2), имеет вид

$$\dot{z}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)z(t). \tag{1.5}$$

Пусть $\Phi(t,\, t_0)$ — переходная матрица системы (1.2), $\Psi(t,\, t_0)$ — переходная матрица для сопряженной системы (1.5); $x(t)$ и $z(t)$ — любые решения уравнений (1.2) и (1.5), тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} &\Psi(t,\, t_0) = \Phi^{\mathrm{T}}(t_0,\, t), \\ &x^{\mathrm{T}}(t)z(t) = x^{\mathrm{T}}(t_0)z(t_0) = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.1.2. Напомним некоторые свойства функций от матриц, необходимые в дальнейшем. Пусть S — квадратная $(n \times n)$-матрица. Под экспоненциалом квадратной матрицы S понимается матричная функция

$$\exp S = e^S = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{S^p}{p!}.$$

Рассмотрим экспоненциал более общего вида e^{St}, где t — числовой множитель. Соответствующий ряд имеет вид

$$e^{St} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(St)^p}{p!}. \tag{1.7}$$

Отметим некоторые свойства экспоненциала матрицы.

1) $e^{S(t+\tau)} = e^{St}e^{S\tau} = e^{S\tau}e^{St}$, где t, τ — некоторые числовые множители. Полагая $\tau = -t$, будем иметь $e^{St}e^{-St} = E_n$, т. е. матрица e^{St} всегда невырождена.

Пусть A и B — квадратные матрицы одной размерности. Тогда равенство $e^A e^B = e^{A+B}$ имеет место в том и только том случае, когда матрицы A и B перестановочны (коммутативны) ($AB = BA$).

2) Ряд (1.7) сходится абсолютно и равномерно, поэтому его можно почленно дифференцировать по t:

$$\frac{d}{dt}(e^{St}) = \frac{d}{dt}\left(E_n + St + \frac{S^2t^2}{2!} + \ldots\right) = S + S^2t + \frac{S^3t^2}{2!} + \ldots = Se^{St} = e^{St}S. \tag{1.8}$$

Если матрица $R(t)$ перестановочна со своей производной ($R\dot{R} = \dot{R}R$), то имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}\left[e^{R(t)}\right] = e^{R(t)}\dot{R} = \dot{R}e^{R(t)}. \tag{1.9}$$

3) Если A — некоторая квадратная $(n \times n)$-матрица и Q — некоторая неособенная квадратная матрица той же размерности, то

$$e^{Q^{-1}AQ} = Q^{-1}e^A Q. \tag{1.10}$$

1.2. Системы с постоянными коэффициентами

1.2.1. Рассмотрим систему (1.2) в том случае, когда A — постоянная $(n \times n)$-матрица

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.11}$$

Из формулы (1.8) следует, что матрица $X(t) = e^{At}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = E_n$$

и, значит, является фундаментальной матрицей системы (1.11). Тогда общее решение системы (1.11) можно представить в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0). \tag{1.12}$$

Задача о нахождении решений линейной системы с постоянными коэффициентами тесно связана со структурой матрицы этой системы.

Пусть Q — матрица, приводящая матрицу A к жордановой форме

$$J = Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\|J_1(\lambda_1),\ \ldots,\ J_m(\lambda_m)\|, \tag{1.13}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения матрицы A (среди которых могут быть и равные), отвечающие различным клеткам Жордана [28, 78]:

$$\underset{(k_j \times k_j)}{J_j(\lambda_j)} = \left\| \begin{array}{ccccc} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{array} \right\|; \tag{1.14}$$

k_j — порядок клетки, определяемый степенью элементарного делителя $(\lambda - \lambda_j)^{k_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$, $\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n$.

Если все $k_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, то матрица J — диагональная, а подобная ей матрица A называется матрицей простой структуры.

Проведя в системе (1.11) замену переменных

$$x = Qy, \tag{1.15}$$

получим

$$\dot{y} = Jy. \tag{1.16}$$

Матрица J имеет блочно-диагональную структуру, поэтому система (1.16) распадается на m независимых подсистем

$$\dot{y}^{(j)} = J_j(\lambda_j) y^{(j)}, \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{1.17}$$

где $y = \|y^{(1)\mathrm{T}} \ldots y^{(m)\mathrm{T}}\|^{\mathrm{T}}$; $y^{(j)}(k_j \times 1)$.

Фундаментальная матрица системы (1.17) имеет вид $Y_j(t) = \exp(J_j(\lambda_j)t)$, $t_0 = 0$. Обозначим далее $\nu = k_j$. Для матрицы $J_j(\lambda_j)$ имеет место представление

$$J_j(\lambda_j) = \lambda_j E_\nu + I_\nu, \qquad \underset{(\nu \times \nu)}{I_\nu} = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

(E_ν — единичная $(\nu \times \nu)$-матрица).
Тогда $Y_j(t) = e^{\lambda_j t} e^{I_\nu t}$, и так как $I_\nu^p = 0$ при $p \geqslant \nu$, то

$$e^{I_\nu t} = E_\nu + I_\nu t + \frac{1}{2!} I_\nu^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{(\nu - 1)!} I_\nu^{\nu-1} t^{\nu-1}.$$

Это означает, что фундаментальная матрица $Y_j(t)$ представима в виде

$$Y_j(t) = e^{J_j(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t} \begin{Vmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \ldots & \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{\nu-2}}{(\nu-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1.18}$$

Тогда фундаментальная матрица системы (1.11) принимает вид

$$X(t) = e^{At} = QY(t)Q^{-1}, \tag{1.19}$$

где $Y(t) = \operatorname{diag}\|Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_m(t)\|$ — фундаментальная матрица системы (1.16).

В системе (1.11) матрица A — действительная, поэтому матрица e^{At} должна быть действительной. Если все собственные значения матрицы A действительны, то матрицы $J_j(\lambda_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ и матрица Q также действительны. В этом случае фундаментальная матрица системы (1.11), вычисленная по формуле (1.19), является действительной.

Если среди собственных значений матрицы A есть комплексно сопряженные $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$, то им соответствуют клетки Жордана $J_j(\lambda_j)$ и $J_j(\overline{\lambda}_j)$ размерности $(k_j \times k_j)$. Рассмотрим диагональный блок матрицы J размерности $(2k_j \times 2k_j)$, содержащий эти клетки:

$$\underset{2\nu\times 2\nu}{G} = \begin{Vmatrix} J_\nu(\lambda_j) & 0_\nu \\ 0_\nu & J_\nu(\overline{\lambda}_j) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} J_\nu(\alpha_j) + i\beta_j E_\nu & 0_\nu \\ 0_\nu & J_\nu(\alpha_j) - i\beta_j E_\nu \end{Vmatrix}$$
$$(\nu = k_j).$$

При помощи преобразования [3]

$$\underset{2\nu\times 2\nu}{S} = \begin{Vmatrix} E_\nu & iE_\nu \\ E_\nu & -iE_\nu \end{Vmatrix}, \quad \underset{2\nu\times 2\nu}{S^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} E_\nu & E_\nu \\ -iE_\nu & iE_\nu \end{Vmatrix}$$

приведем матрицу G к действительной форме

$$\widetilde{G} = S^{-1}GS = \begin{Vmatrix} J_\nu(\alpha_j) & -\beta_j E_\nu \\ \beta_j E_\nu & J_\nu(\alpha_j) \end{Vmatrix}. \tag{1.20}$$

В результате аналогичных преобразований, примененных к каждой паре клеток, соответствующих комплексно сопряженным собственным значениям матрицы A, получим действительную матрицу

$$\widetilde{J} = Q_0^{-1}AQ_0 = \operatorname{diag}\|J_1(\lambda_1), \ldots, J_l(\lambda_l), \widetilde{G}_{l+1}, \ldots, \widetilde{G}_s\| \quad (l + 2s = m). \tag{1.21}$$

Здесь матрицы J_p $(p = 1, \ldots, l)$, соответствующие действительным собственным значениям λ_p, имеют вид (1.14); матрицы

$\widetilde{G}_q$ $(q = l+1, \ldots, s)$, соответствующие комплексно сопряженным собственным значениям $\lambda_q = \alpha_q \pm i\beta_q$, имеют вид (1.20).

Следует отметить, что матрица Q_0 преобразования, приводящего действительную матрицу A к действительной канонической форме $\widetilde{J}$ (1.21), всегда может быть выбрана действительной.

Фундаментальная матрица системы (1.11) в этом случае может быть представлена в виде

$$X(t) = e^{At} = Q_0 e^{\widetilde{J}t} Q_0^{-1} = \\ = Q_0 \operatorname{diag} \| \; e^{J_1(\lambda_1)t}, \;\ldots,\; e^{J_l(\lambda_l)t}, \;\; e^{\widetilde{G}_{l+1}t}, \;\ldots,\; e^{\widetilde{G}_s t} \; \| Q_0^{-1}. \quad (1.22)$$

Здесь матрицы $e^{J_p(\lambda_p)t}$ имеют вид (1.18), а матрицы $e^{\widetilde{G}_q t}$ имеют вид

$$e^{\widetilde{G}_q t} = \left\| \begin{matrix} e^{J_\nu(\alpha_q)t} & 0_\nu \\ 0_\nu & e^{J_\nu(\alpha_q)t} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} E_\nu \cos\beta_q t & -E_\nu \sin\beta_q t \\ E_\nu \sin\beta_q t & E_\nu \cos\beta_q t \end{matrix} \right\|.$$

1.2.2. Приведем необходимые выражения для норм векторов и матриц [3, 28]:

Пусть $x = \|x_1, \ldots, x_n\|^{\mathrm{T}}$ — n-мерный вектор. Тогда в качестве его нормы могут быть приняты следующие выражения:

$$\|x\|_{\mathrm{I}} = \max_j |x_j|; \quad \|x\|_{\mathrm{II}} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|; \quad \|x\|_{\mathrm{III}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$

Соответствующие выражения для нормы матрицы $A = \|a_{ij}\|$ имеют вид

$$\|A\|_{\mathrm{I}} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|; \quad \|A\|_{\mathrm{II}} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|;$$

$$\|A\|_{\mathrm{III}} = \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} \equiv \{\mathrm{Sp}[A^{\mathrm{T}} A]\}^{1/2}.$$

Оценим норму матричной экспоненты e^{At}. Используя выражения (1.10), (1.22), получим оценку

$$\|e^{At}\| \leqslant \|Q\| \|e^{\widetilde{J}t}\| \|Q^{-1}\| \leqslant \|Q\| \|Q^{-1}\| \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\exp(J_j(\lambda_j)t)\|.$$

Пусть $\alpha = \max\limits_j \operatorname{Re} \lambda_j$, $(j = 1, \ldots, m)$. Из выражения (1.18) следует

$$\|\exp(J_j(\lambda_j)t)\| \leqslant e^{\alpha t} \|\exp(J_j(0)t)\|.$$

Элементами матрицы $\|\exp(J_j(0)t)\|$ являются многочлены от t степени не выше $\nu - 1$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная C_ε, что имеет место оценка $\|\exp(J_j(0)t)\| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon t}$. В самом деле,

$\|\exp(J_j(0)t)\| = \|\exp(J_j(0)t)\| e^{-\varepsilon t} e^{\varepsilon t}$, откуда для постоянной C_ε имеем соотношение

$$C_\varepsilon = \max_{t \geqslant 0} \|\exp(J_j(0)t)\| e^{-\varepsilon t}. \tag{1.23}$$

Тогда для оценки матричной экспоненты e^{At} получим

$$\|e^{At}\| \leqslant C_\varepsilon e^{(\alpha+\varepsilon)t}, \quad t \geqslant 0 \tag{1.24}$$

Если матрица A имеет простые собственные числа, то оценка (1.24) может быть записана в виде

$$\|e^{At}\| \leqslant M e^{\alpha t}, \quad t \geqslant 0. \tag{1.25}$$

1.2.3. Рассмотрим теперь линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{dy}{dt} + \alpha_n y = 0, \quad \alpha_k = \mathrm{const} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{1.26}$$

Вводя замену переменных $x_1 = y$, $x_2 = \dfrac{dy}{dt}$, ..., $x_n = \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$, представим уравнение (1.26) в виде системы линейных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = A_0 x, \quad A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_1 \end{Vmatrix}. \tag{1.27}$$

Матрица A_0 называется сопровождающей матрицей. Для ее написания требуется лишь знание коэффициентов α_k характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$. Таким образом, любое линейное уравнение n-го порядка (1.26) можно записать в виде системы (1.27) с матрицей A_0. Очевидно и обратное: всякую систему линейных уравнений (1.27) с матрицей A_0 можно представить в виде одного уравнения n-го порядка.

Поставим более общий вопрос: можно ли любую систему дифференциальных уравнений (1.11) с произвольной постоянной матрицей A записать в виде одного линейного дифференциального уравнения n-го порядка? Этот вопрос эквивалентен следующему: существует ли линейное невырожденное преобразование $y = Tx$ ($\det T \neq 0$), приводящее линейную систему с произвольной матрицей A в линейную систему с матрицей заданного вида A_0 ($TAT^{-1} = A_0$)?

Известно [28, 76], что для подобия матриц A и A_0 необходимо и достаточно совпадения их элементарных делителей. Элементарные делители матрицы A_0 имеют вид $(\lambda - \lambda_1)^{k_1}$, ..., $(\lambda - \lambda_p)^{k_p}$. Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — различные корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A_0) = 0$ матрицы A_0, $k_1, \ldots, k_p$ — их кратности, причем $\sum\limits_{j=1}^{p} k_j = n$. Таким образом, матрица A_0 имеет ту особенность, что величины λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_p как корни элементарных делителей и как корни характеристического уравнения имеют одинаковую кратность, т. е. матрица A_0 не может иметь кратных собственных чисел с простыми элементарными делителями.

Отсюда следует, что система линейных уравнений (1.11) с матрицей A, у которой кратность корня элементарного делителя не совпадает с его кратностью как корня характеристического уравнения, не может быть приведена при помощи невырожденного преобразования к системе с матрицей A_0 и, следовательно, не может быть преобразована в одно дифференциальное уравнение n-го порядка.

Это обстоятельство играет важную роль в теории управления линейными системами, так как в системах, эквивалентных одному дифференциальному уравнению n-го порядка (и только в них), можно добиться цели управления при помощи одного скалярного управляющего воздействия.

Пример 1.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}. \tag{1.28}$$

Характеристическое уравнение системы (1.28): $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $\alpha_2 = \lambda_1\lambda_2$ и, следовательно, сопровождающая матрица $A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{Vmatrix}$.

Пусть T — матрица преобразования матрицы A в матрицу A_0: $TAT^{-1} = A_0$. Легко показать, что $T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{Vmatrix}$. Это преобразование невырождено ($\det T \neq 0$), только если $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Таким образом, если $\lambda_1 = \lambda_2$, то систему (1.28) нельзя представить в виде одного дифференциального уравнения второго порядка, так как матрица имеет кратное сотственное значение $\lambda = \lambda_1$ с простыми элементарными делителями $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_1$. □

1.3. Линейные системы второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнения движения линейных механических систем могут быть представлены в виде [41, 56, 81, 82, 127]

$$M\ddot{x} + (D + G)\dot{x} + (C + P)x = 0, \tag{1.29}$$

где x и $\dot{x}$ — $(n \times 1)$-векторы обобщенных координат и скоростей механической системы; M, D, G, C, P — квадратные $(n \times n)$-матрицы.

Поясним механический смысл слагаемых, входящих в уравнение (1.29) [81, 82].

Матрица M — симметрическая положительно определенная матрица, определяемая кинетической энергией системы. Силы $D\dot{x}$, зависящие от скоростей, изменяют количество энергии в системе. Этим силам ставится в соответствие функция Рэлея $F = \frac{1}{2}\,\dot{x}^{\mathrm{T}} D\dot{x}$, где D — симметрическая матрица ($D^{\mathrm{T}} = D$). Если F — неотрицательная квадратичная форма, то F называется диссипативной функцией. Гироскопические силы $G\dot{x}$ не производят работы при любом движении системы, G — кососимметрическая матрица ($G^{\mathrm{T}} = -G$). Потенциальные силы Cx, производные от потенциальной энергии системы $\Pi = \frac{1}{2}\,x^{\mathrm{T}} Cx$, где C — симметрическая матрица ($C^{\mathrm{T}} = C$). Неконсервативные позиционные силы Px, P — кососимметрическая матрица ($P^{\mathrm{T}} = -P$).

Приведенная классификация является общепринятой и используется при изучении влияния сил различной структуры на характер устойчивости положения равновесия механической системы [56, 70, 81, 82, 127, 143].

Решение уравнения (1.29) ищем в виде $x = e^{\lambda t} c$, где $\underset{(n\times 1)}{c} = \mathrm{const}$. Тогда параметр λ должен удовлетворять характеристическому уравнению

$$\Delta(\lambda) = \det(M\lambda^2 + (D+G)\lambda + C + P) = 0, \tag{1.30}$$

которое является уравнением степени $2n$ относительно параметра λ.

В зависимости от структуры матриц системы уравнение (1.30) может иметь действительные, чисто мнимые и комплексные корни. В частности, если матрицы D, G, P равны нулю, то система (1.29) описывает движение консервативной механической системы и принимает вид

$$M\ddot{x} + Cx = 0. \tag{1.31}$$

При помощи невырожденного преобразования $x = Ty$ система (1.31) приводится к виду

$$\ddot{y} + \Lambda y = 0, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\,\|\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n\|. \tag{1.32}$$

Переменные $y_1,\ \ldots,\ y_n$ называются нормальными координатами.

Если матрица C является положительно определенной, то все значения $\lambda_k > 0$ ($k = 1,\ \ldots,\ n$) и общее решение системы (1.31) носит колебательный характер. Представим решение системы (1.31) в виде

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha),$$

где a — неизвестный постоянный вектор, ω и α — неизвестные параметры (частота и фаза).

Вектор a определяется из системы линейных однородных уравнений

$$(M\lambda - C)a = 0, \quad \lambda = \omega^2.$$

Система имеет решение $a \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\det(M\lambda - C) = 0. \tag{1.33}$$

Это характеристическое уравнение порядка n относительно неизвестной λ называется уравнением частот. Уравнение (1.33) имеет только положительные корни.

Системами вида (1.31) не исчерпывается класс линейных колебательных систем. Можно показать [41], что характеристическое уравнение линейной гироскопической системы

$$M\ddot{x} + G\dot{x} + Cx = 0$$

(где M, C — положительно определенные, а G — кососимметрическая матрицы) также имеет положительные корни, т. е. решение систем такого вида тоже носит колебательный характер.

§ 2. Нестационарные системы, интегрируемые в замкнутой форме

Поисками типов линейных систем с переменной матрицей $A(t)$, для которых можно построить общее решение в замкнутой форме, занимались многие исследователи (см., например, [15, 39, 92–94, 154–156, 179–181, 183, 186, 187]). Приведем наиболее важные классы линейных нестационарных систем, интегрируемых в замкнутой форме, которые имеют нетривиальные приложения к задачам механики.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{2.1}$$

где x — $(n \times 1)$-вектор состояния, $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ — $(n \times n)$-матрица с элементами $a_{ij}(t)$, являющимися непрерывными функциями при $t \in I$.

Некоторые случаи, когда система (2.1) имеет решение в замкнутой форме, общеизвестны: 1) $A(t)$ — постоянная матрица ($A = \mathrm{const}$); 2) $A(t)$ — диагональная, 3) $A(t)$ — треугольная, 4) $A(t)$ — скалярная ($A(t) = \alpha(t)A_0$, $A_0 = \mathrm{const}$). Известны также и некоторые другие виды матриц $A(t)$, для которых удается найти общее решение.

2.1. Диагональные, треугольные и эйлеровы системы

Диагональные и треугольные системы представляют собой самый простой и в то же время важный класс линейных систем. Во-первых, они допускают полное интегрирование, во-вторых, как будет указано ниже, всякая линейная система может быть приведена к треугольному виду без нарушений свойств ее решений.

1) Диагональная система:

$$\dot{x}(t) = A(t)x, \quad A(t) = \mathrm{diag}(a_1(t),\ \ldots,\ a_n(t)). \tag{2.2}$$