Волковыский Л.И.
Лунц Г.Л.
Араманович И.Г.

Сборник задач по теории функций комплексного переменного

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.53
ББК 22.16
В 67

Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. **Сборник задач по теории функций комплексного переменного.** — 4-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 312 с. — ISBN 978-5-9221-0264-3.

Сборник содержит 1425 задач. Наряду с чисто учебным материалом охвачены также вопросы, связанные с приложениями функций комплексного переменного. К некоторым задачам даны указания, а наиболее трудные задачи снабжены решениями.

Третье издание — 1975 г.

Для студентов высших учебных заведений.

Табл. 5. Ил. 137.

ISBN 978-5-9221-0264-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

“Сборник задач по теории функций комплексного переменного” (ТФКП) предназначается в основном для студентов механико-математических и физико-математических факультетов университетов, соответствующих отделений пединститутов и технических вузов с повышенной программой по математике. В “Сборнике” имеются также циклы задач, выходящих за рамки программы. Некоторые из них могут служить основой для курсовых студенческих работ и материалом для занятий на семинарах по ТФКП.

Авторы полагают также, что “Сборник” окажется полезным для лиц, специализирующихся по механике непрерывных сред (гидродинамика, теория упругости) и электротехнике, так как в нем содержится большое число задач либо по непосредственному применению ТФКП к указанным дисциплинам, либо по вопросам, представляющим их математическую основу (конформные отображения, гармонические функции, потенциалы, интегралы типа Коши и т. д.).

Нам кажется, что “Сборник” достаточно полно отражает основные разделы ТФКП, более или менее близкие к учебным планам.

Для удобства пользования “Сборником” в оглавлении, помимо названия глав и параграфов, иногда перечислены содержащиеся в них основные циклы задач (это касается главным образом основного учебного материала).

Предполагается, что пользующийся “Сборником” знаком с соответствующими разделами курса ТФКП (например, в объеме книги А. И. Маркушевича “Краткий курс теории аналитических функций”). Если привлекается дополнительный материал, то даются необходимые справочные сведения, а также ссылки на литературу. Для наиболее часто цитируемых книг введены обозначения:

[1] — *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций — 3-е изд. — М.:“Наука”, 1966.

[2] — *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций, Т. I, II. — 2-е изд. — М.:“Наука”, 1967, 1968, .

[3] — *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного — 2-е изд. — М.:“Физматгиз”, 1965.

[4] — *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного — 10-е изд. — М.:“Физматгиз”, 1960.

Все указания к решению задач приведены в основном тексте.

Наиболее трудные задачи, номера которых отмечены звездочками, снабжены решениями, помещенными в ответах.

При составлении “Сборника” были использованы имевшиеся в распоряжении авторов как русские, так и иностранные учебники, пособия, монографии.

Второе издание “Сборника” выходит в существенно переработанном виде. В связи с пожеланиями, высказанными при обсуждении “Сборника” сотрудниками кафедры теории функций и функционального анализа Московского университета, увеличено число задач по ряду разделов (особые точки многозначных функций, конформные отображения, связанные с элементарными функциями, целые функции и т. д.). В то же время исключены некоторые циклы задач, не связанные с обязательным курсом ТФКП (сингулярные интегралы, классы функций с неизолированными особенностями, нестационарные вихревые течения и некоторые другие). Исключена часть справочного материала — таблицы преобразований эллиптических функций и интегралов (их можно найти в вышедших в последние годы на русском языке справочных изданиях).

Произведена также перегруппировка всего материала; в частности, выделены в отдельную главу вопросы, связанные с обобщениями понятия аналитической функции. Исправлены погрешности, обнаруженные как в ответах, так и в условиях задач. В связи с этим авторы благодарны всем лицам, приславшим свои замечания. Мы особенно признательны А. А. Гольдбергу за ряд ценных советов и указаний.

Авторы

ГЛАВА I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В этой главе и вообще везде в этой книге, где не оговорено противное, приняты обозначения: $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $w = u + iv = \rho e^{i\theta}$ (x, y, u, v, r, ρ, φ и θ — действительные числа, $r \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$); $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, $|z| = r$, $\bar{z} = x - iy$. Если не сделано дополнительных указаний, то главное значение аргумента $\arg z$ выделяется неравенствами $-\pi < \arg z \leqslant \pi$; комплексную плоскость, точки которой изображают комплексные числа z, будем называть *z-плоскостью*; обычно термины "комплексное число z" и "точка z" употребляются как синонимы.

§ 1. Комплексные числа

Комплексные числа, геометрическая интерпретация

1.1. Выполнить указанные действия:

1) $\dfrac{1}{i}$; 2) $\dfrac{1-i}{1+i}$; 3) $\dfrac{2}{1-3i}$; 4) $(1+i\sqrt{3})^3$.

1.2. Найти модули и аргументы комплексных чисел (a и b — действительные числа):

1) $3i$; 2) -2; 3) $1+i$; 4) $-1-i$; 5) $2+5i$; 6) $2-5i$;
7) $-2+5i$; 8) $-2-5i$; 9) bi $(b \neq 0)$; 10) $a+bi$ $(a \neq 0)$.

1.3. Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}$ ($n \neq 2$ — натуральное число).

1.4. Найти все значения следующих корней и построить их:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 5) $\sqrt[8]{1}$;
6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 9) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

1.5. Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2-1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках -1, 1 и z, проведенной из вершины z.

1.6. Пусть m и n — целые числа. Показать, что $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ имеет $n/(n,m)$ различных значений, где (n,m) — общий наибольший делитель чисел m и n. Убедиться, что множества значений $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ и $\sqrt[n]{z^m}$

совпадают тогда и только тогда, когда $(n, m) = 1$, т. е. n и m взаимно просты.

1.7. Исходя из геометрических рассмотрений, доказать неравенства:

1) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; 2) $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$.

Доказать эти же неравенства алгебраическим путем. Выяснить в каждом случае, когда имеет место знак равенства.

1.8. Исходя из геометрических рассмотрений, доказать неравенства:

1) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leqslant |\arg z|$; 2) $|z - 1| \leqslant ||z| - 1| + |z||\arg z|$.

1.9. Доказать тождество

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

и выяснить его геометрический смысл.

1.10. Доказать тождество

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).$$

1.11. Доказать неравенство

$$|z_1 + z_2| \geqslant \frac{1}{2}\,(|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

1.12. Пусть z_1 и z_2 — произвольные комплексные числа, а a_1 и a_2 — действительные числа $(a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$. Доказать неравенства

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1^2 + z_2^2| \leqslant 2\,\frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1^2 + z_2^2|.$$

Указание. Ввести вспомогательный угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha = a_1/a_2$, представить оцениваемое выражение в виде $A + B\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha$ и найти его наибольшее и наименьшее значения.

1.13. Доказать тождества:

1) $(n-2)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant k<s\leqslant n} |a_k + a_s|^2$;

2) $n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 - \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant k<s\leqslant n} |a_k - a_s|^2$.

1.14. Доказать:

1) если $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в единичную окружность;

2) если $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$, то точки z_1, z_2, z_3, z_4 либо являются вершинами прямоугольника, либо попарно совпадают.

1.15. Найти вершины правильного n-угольника, если его центр находится в точке $z = 0$, а одна из вершин z_1 известна.

1.16. Точки z_1 и z_2 — смежные вершины правильного n-угольника. Найти вершину z_3, смежную с z_2 $(z_3 \neq z_1)$.

1.17. Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3. Найти четвертую вершину z_4, противоположную вершине z_2.

1.18. При каком условии три попарно не совпадающие точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой?

1.19. При каком условии четыре попарно не совпадающие точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой?

1.20. Точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежат по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат. Доказать, что аналогичным свойством обладают точки $1/z_1, 1/z_2, \ldots, 1/z_n$ (указать, относительно какой прямой) и что

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

1.21. Доказать, что если $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$, то любая прямая, проходящая через начало координат, разделяет точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$, если только эти точки не лежат на этой прямой.

1.22. Доказать, что любая прямая, проходящая через центр тяжести системы материальных точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ с массами m_1, $m_2, \ldots, m_n$, разделяет эти точки, если только они не лежат на этой прямой.

В задачах 1.23–1.34 требуется выяснить геометрический смысл указанных соотношений.

1.23. $|z - z_0| < R$; $|z - z_0| > R$; $|z - z_0| = R$.

1.24. $|z - 2| + |z + 2| = 5$. **1.25.** $|z - 2| - |z + 2| > 3$.

1.26. $|z - z_1| = |z - z_2|$. **1.27.** 1) $\operatorname{Re} z \geqslant C$; 2) $\operatorname{Im} z < C$.

1.28. $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$.

1.29. $\alpha < \arg z < \beta$; $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ $(-\pi < \alpha < \beta \leqslant \pi)$.

1.30. $|z| = \operatorname{Re} z + 1$. **1.31.** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.

1.32. $\operatorname{Im} \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = 0$; $\operatorname{Re} \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = 0$. **1.33.** $|2z| > |1 + z^2|$.

1.34. 1) $|z| < \arg z$, если $0 \leqslant \arg z < 2\pi$;

2) $|z| < \arg z$, если $0 < \arg z \leqslant 2\pi$.

В задачах 1.35–1.38 требуется определить семейства линий в z-плоскости, заданных соответствующими уравнениями.

1.35. 1) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = C$; 2) $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = C$ $(-\infty < C < \infty)$.

1.36. 1) $\operatorname{Re} z^2 = C$; 2) $\operatorname{Im} z^2 = C$ $(-\infty < C < \infty)$.

1.37. $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda$ $(\lambda > 0)$.

1.38. $\arg \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \alpha$ $(-\pi < \alpha \leqslant \pi)$.

1.39. 1) Семейство линий в z-плоскости задано уравнением

$$|z^2 - 1| = \lambda \quad (\lambda > 0).$$

Для каких значений λ линии семейства будут состоять из одной простой кривой и для каких — распадаться?

2) Выяснить те же вопросы для семейства

$$|z^2 + az + b| = \lambda \quad (\lambda > 0).$$

1.40. Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек заданной линии $(a > 0)$:

1) $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = a$; 2) $\left|z + \dfrac{b}{z}\right| = a$.

1.41. Функция $\arg z$ определена однозначно во всякой точке $z \neq 0$, если положить $|z| - 2\pi < \arg z \leqslant |z|$. Каково геометрическое место точек, в которых нарушается непрерывность определенной таким образом функции $\arg z$?

1.42. Каково геометрическое место точек, в которых нарушается непрерывность функции $\arg z$, однозначно определенной при любом $z \neq 0$ неравенствами $\ln|z| - 2\pi < \arg z \leqslant \ln|z|$?

1.43. Первоначальное значение $\operatorname{Arg} f(z)$ при $z = 2$ принято равным 0. Точка z делает один полный оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $\operatorname{Arg} f(z)$ изменяется непрерывно при движении точки z, указать значение $\operatorname{Arg} f(2)$ после указанного оборота, если:

1) $f(z) = \sqrt{z - 1}$; 2) $f(z) = \sqrt[3]{z - 1}$; 3) $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$;

4) $f(z) = \sqrt{z^2 + 2z - 3}$; 5) $f(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$.

Стереографическая проекция

1.44. Вывести формулы стереографической проекции, выражающие координаты (ξ, η, ζ) точки P сферы с диаметром 1, касающейся z-плоскости в начале координат, через координаты (x, y) соответствующей точки z. Выразить также x и y через ξ, η, ζ (оси ξ и η предполагаются совпадающими соответственно с осями x и y).

Примечание. В задаче 1.44 осуществляется соответствие между точками комплексной плоскости и сферы радиуса $1/2$, касающейся этой плоскости. Встречается и иной способ соответствия, при котором сфера имеет радиус, равный 1, а z-плоскость проходит через ее центр. См., например, [1; гл. I, п. 4].

1.45. Каковы на сфере образы точек 1, -1, i, $(1-i)/\sqrt{2}$?

1.46. Каков на плоскости образ параллели с широтой $\beta(-\pi/2 < \beta < \pi/2)$? Чему соответствуют “южный” и “северный” полюсы?

1.47. Найти на сфере образы:

1) лучей $\arg z = \alpha$; 2) окружностей $|z| = r$.

1.48. Каково на сфере взаимное расположение пары точек, взаимно симметричных:

1) относительно точки $z = 0$;
2) относительно действительной оси;
3) относительно единичной окружности?

1.49. При каком условии точки z_1 и z_2 являются стереографическими проекциями двух диаметрально противоположных точек сферы?

1.50. При каком преобразовании сферы образ точки z переходит в образ точки $1/z$?

1.51. Найти на сфере образы областей, определенных неравенствами:

1) $\operatorname{Im} z > 0$; 2) $\operatorname{Im} z < 0$; 3) $\operatorname{Re} z > 0$;

4) $\operatorname{Re} z < 0$; 5) $|z| < 1$; 6) $|z| > 1$.

1.52. Что соответствует на сфере семейству параллельных прямых на плоскости?

1.53. Доказать, что при стереографической проекции окружности, расположенные на сфере, проектируются в окружности или в прямые на плоскости. Какие окружности на сфере соответствуют прямым?

1.54. Пусть K — окружность на плоскости, сответствующая окружности K' на сфере, N — северный полюс сферы, S — вершина конуса, касающегося сферы вдоль K' (предполагается, что K' не является большим кругом). Доказать, что центр окружности K лежит на луче NS. Рассмотреть случай, когда K' — большой круг.

1.55. Доказать, что при стереографической проекции углы между кривыми на сфере равны углам между их образами на плоскости.

1.56. Найти длину $k(z, a)$ хорды, соединяющей точки сферы, соответствующие точкам z и a. Рассмотреть также случай, когда a — бесконечно удаленная точка.

1.57. Даны две точки z_1 и z_2 (одна из них может быть бесконечно удаленной). Найти геометрическое место точек z-плоскости, которому на сфере соответствует окружность, равноудаленная от образов данных точек.

§ 2. Элементарные трансцендентные функции

По определению

$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

1.58. Пользуясь определением e^z, доказать, что:

1) $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; 2) $e^{z+2\pi i} = e^z$;

3) если $e^{z+\omega} = e^z$ при всяком z, то

$$\omega = 2\pi k i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Соотношение $\exp i\varphi = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (формула Эйлера) позволяет вместо тригонометрической формы записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ пользоваться показательной формой $z = re^{i\varphi}$. В дальнейшем под φ обычно понимается главное значение аргумента, т. е. $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

1.59. Представить в показательной форме числа 1, -1, i, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

1.60. Найти $e^{\pm\pi i/2}$, $e^{k\pi i}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1.61. Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел e^{2+i}; e^{2-3i}; e^{3+4i}; e^{-3-4i}; $-ae^{i\varphi}$ $(a > 0,\ |\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{-i\varphi}$ $(|\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi)$.

1.62. Найти суммы:

1) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;

2) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;

3) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$;

4) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$;

5) $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx$.

1.63. Найти суммы:

1) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta)$;

2) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta)$.

1.64. Исходя из определения соответствующих функций, доказать:

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\sin z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$;

3) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;

4) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2$;

5) $\operatorname{tg} 2z = \dfrac{2\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$; 6) $\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

1.65. Доказать, что если $\cos(z+\omega) = \cos z$ при всяком z, то $\omega = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1.66. Доказать, что:

1) $\sin iz = i \operatorname{sh} z$; 2) $\cos iz = \operatorname{ch} z$; 3) $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$;

4) $\operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z$.

1.67. Выразить через тригонометрические и гиперболические функции действительного аргумента действительные и мнимые части, а также модули следующих функций:

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{th} z$.

1.68. Найти действительные и мнимые части следующих значений функций:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $\operatorname{tg}(2-i)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$; 5) $\operatorname{cth}(2+i)$; 6) $\operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right)$.

1.69. Для каждой из функций e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{cth} z$ найти множество точек z, где она принимает:
1) действительные значения;
2) чисто мнимые значения.

1.70. Найти все значения z, для которых:

1) $|\operatorname{tg} z| = 1$; 2) $|\operatorname{th} z| = 1$.

По определению $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi + 2\pi i k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\ln z = \ln r + i\varphi$ $(-\pi < \varphi \leqslant \pi)$ ($\ln z$ называется *главным значением* величины $\operatorname{Ln} z$).

1.71. Вычислить:

1) $\operatorname{Ln} 4$, $\operatorname{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$;

3) $\operatorname{Ln} \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $\operatorname{Ln}(2-3i)$, $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.

1.72. Найти ошибку в рассуждениях, приводящих к парадоксу И. Бернулли: $(-z)^2 = z^2$, поэтому $2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z$, следовательно, $\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z$.

1.73. Первоначальное значение $\operatorname{Im} f(z)$ при $z = 2$ принято равным нулю. Точка z делает один полный оборот против часовой стрелки по окружности с центром в точке $z = 0$ и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $f(z)$ изменяется непрерывно при движении точки z, указать значение $\operatorname{Im} f(z)$ после указанного оборота, если:

1) $f(z) = 2\operatorname{Ln} z$; 2) $f(z) = \operatorname{Ln}\frac{1}{z}$;

3) $f(z) = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln}(z+1)$; 4) $f(z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln}(z+1)$.

По определению для любых комплексных чисел $a \neq 0$ и α

$$a^\alpha = \exp\{\alpha \operatorname{Ln} a\}, \tag{1}$$

или, если под e^z по-прежнему [1]) понимать $\exp z$, то $a^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} a}$.

1.74. Найти все значения следующих степеней:

1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; 3) 2^i; 4) 1^{-i}; 5) i^i;

6) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; 7) $(3-4i)^{1+i}$; 8) $(-3+4i)^{1+i}$.

1.75. Показать, что в случае рационального показателя степени $(\alpha = m/n)$ общее определение степени z^α совпадает с обычным определением:

$$z^{m/n} = (\sqrt[n]{z})^m$$

(см. также задачу 1.6).

1.76. Совпадают ли множества значений $a^{2\alpha}$, $(a^\alpha)^2$, $(a^2)^\alpha$?

По определению, равенство $w = \operatorname{Arccos} z$ эквивалентно равенству $z = \cos w$. Аналогично определяются функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ и обратные гиперболические функции $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$.

1.77. Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):

1) $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$;

2) $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2-1})$;

3) $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{i+z}{i-z} = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{1+iz}{1-iz}$;

4) $\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z-i}{z+i}$; 5) $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$;

6) $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$; 7) $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1+z}{1-z}$;

8) $\operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z+1}{z-1}$.

1.78. Доказать, что для любого значения $\operatorname{Arccos} z$ можно подобрать такое значение $\operatorname{Arcsin} z$, чтобы сумма этих значений была равна $\pi/2$. Доказать аналогичное утверждение для $\operatorname{Arctg} z$ и $\operatorname{Arcctg} z$.

Примечание. Равенствам $\operatorname{Arcsin} z + \operatorname{Arccos} z = \pi/2$ и $\operatorname{Arctg} z + \operatorname{Arcctg} z = \pi/2$ всегда придается смысл, указанный в настоящей задаче.

[1]) Согласно (1) $e^z = \exp\{z \operatorname{Ln} e\} = \exp\{z(1+2\pi i k)\}$. Однако, если не оговорено противное, мы будем считать $k=0$ т. е. по-прежнему $e^z = \exp z$.

1.79. Показать, что все значения $\operatorname{Arccos} z$ содержатся в формуле

$$\operatorname{Arccos} z = \pm i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

где под $\sqrt{z^2 - 1}$ понимается какое-нибудь одно его значение.

1.80. 1) Для каких z все значения функций $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arcsin} z$ и $\operatorname{Arctg} z$ действительны?

2) Для каких z функция $\operatorname{Arsh} z$ принимает чисто мнимые значения?

1.81. Найти все значения следующих функций:

1) $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{Arccos} 2$; 4) $\operatorname{Arcsin} i$;

5) $\operatorname{Arctg}(1 + 2i)$; 6) $\operatorname{Arch} 2i$; 7) $\operatorname{Arth}(1 - i)$.

1.82. Найти все корни следующих уравнений:

1) $\sin z + \cos z = 2$; 2) $\sin z - \cos z = 3$;

3) $\sin z - \cos z = i$; 4) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$;

5) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$; 6) $2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i$.

1.83. Найти все корни следующих уравнений:

1) $\cos z = \operatorname{ch} z$; 2) $\sin z = i \operatorname{sh} z$; 3) $\cos z = i \operatorname{sh} 2z$.

§ 3. Последовательности и числовые ряды

1.84. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и $|\arg c_n| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, то ряд сходится абсолютно.

1.85. Пусть сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$. Доказать, что если $\operatorname{Re} c_n \geqslant 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ будет также сходящимся.

1.86. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ обладает тем свойством, что четыре его части, состоящие каждая из членов, содержащихся в одном и том же замкнутом квадранте плоскости, сходятся. Доказать, что данный ряд сходится абсолютно.

1.87. Доказать формулу (преобразование Абеля)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n,$$

где $1 \leqslant m \leqslant n$, $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k \geqslant 1)$, $S_0 = 0$.

1.88. Доказать, что для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где $b_n > 0$, достаточно, чтобы частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ были ограничены и последовательность чисел $\{b_n\}$ монотонно стремилась к нулю (признак Дирихле).

Указание. Воспользоваться преобразованием Абеля.

1.89. Доказать, что для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где b_n — действительные числа, достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, а последовательность $\{b_n\}$ была мотонной и ограниченной (признак Абеля).

1.90. Доказать, что для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ достаточно выполнения следующих условий:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, b_n = 0$; 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,|b_n - b_{n+1}|$ сходится;

3) последовательность $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничена.

1.91. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = q$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится (абсолютно), если $q < 1$, и расходится, если $q > 1$.

1.92. Убедиться на примерах рядов

$$1 + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \ldots \quad (1 < \alpha < \beta),$$
$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \ldots \quad (0 < \alpha < \beta < 1),$$

что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ может сходиться и тогда, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$.

1.93. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$, то для абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ достаточно, чтобы $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| - 1\right) < -1$ (признак Раабе).

1.94. Доказать признак Гаусса: если $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, где a не зависит от n и $a < -1$, то ряд сходится абсолютно.

В задачах 1.95–1.104 исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

1.95. $c_n = \dfrac{n}{(2i)^n}$. **1.96.** $c_n = \dfrac{n!}{(in)^n}$. **1.97.** $c_n = e^{in}$.

1.98. $c_n = \dfrac{e^{in}}{n}$. **1.99.** $c_n = \dfrac{e^{in\varphi}}{n}$. **1.100.** $c_n = \dfrac{e^{in}}{n^2}$.

1.101. $c_n = \dfrac{1}{n}\, e^{\pi i/n}$.

1.102. $c_n = \dfrac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}$ (гипергеометрический ряд), $\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 0$.

1.103. $c_n = \dfrac{\cos in}{2^n}$. **1.104.** $c_n = \dfrac{n \sin in}{3^n}$.

1.105. Найти предельные точки множеств:

1) $z = 1 + (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$;

2) $z = \dfrac{1}{m} + \dfrac{i}{n}$ (m, n — произвольные целые числа);

3) $z = \dfrac{p}{m} + i\,\dfrac{q}{n}$ (m, n, p, q — произвольные целые числа);

4) $|z| < 1$.

1.106. Доказать, что из бесконечной ограниченной последовательности точек $\{z_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

1.107. Доказать следующие предложения:

1) сходимость последовательности $\{z_n = x_n + iy_n\}$ эквивалентна одновременной сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$;

2) для того чтобы существовал предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$ и (при подходящем определении $\arg z_n$) $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ не является отрицательным числом, то можно, например, считать, что $-\pi < \arg z_n \leqslant \pi$.

В каких случаях сходимость последовательности $\{z_n\}$ эквивалентна сходимости только последовательности $\{|z_n|\}$?

1.108. На основе утверждений задачи 1.107 доказать:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right)\right] = \ln r + i\varphi + 2\pi ik$ $(k = 0, 1, 2, ...)$.

§ 4. Функции комплексного переменного

Комплексные функции действительного переменного

В задачах 1.109–1.115 требуется определить линии, заданные указанными уравнениями.

1.109. $z = 1 - it, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2.$ **1.110.** $z = t + it^2, \quad -\infty < t < \infty.$

1.111. $z = t^2 + it^4, \ -\infty < t < \infty.$

1.112. $z = a(\cos t + i \sin t), \ \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{3\pi}{2}, \ a > 0.$

1.113. $z = t + \dfrac{i}{t}, \ -\infty < t < 0.$

1.114. 1) $z = t + i\sqrt{1 - t^2}, \ -1 \leqslant t \leqslant 1;$

2) $z = -t + i\sqrt{1 - t^2}, \ -1 \leqslant t < 0$ (берется арифметическое значение корня).

1.115. 1) $z = a(t + i - ie^{-it}), \ -\infty < t < \infty, \ a > 0;$

2) $z = ia + at - ibe^{-it}, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \ a > 0, \ b > 0.$

Функции комплексного переменного

1.116. Для отображения $w = z^2$ требуется:

1) найти образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;

2) найти прообразы (на z-плоскости) линий $u = C$, $v = C$ $(w = u + iv)$.

1.117. Для отображения $w = 1/z$ найти:

1) образы линий $x = C, \ y = C, \ |z| = R, \ \arg z = \alpha, \ |z - 1| = 1;$
2) прообразы линий $u = C, \ v = C.$

1.118. Для отображений $w = z + \dfrac{1}{z}$ и $w = z - \dfrac{1}{z}$ найти образы окружностей $|z| = R$.

1.119. Для преобразования $w = z + \dfrac{1}{z}$ найти на z-плоскости прообраз прямоугольной сетки $(u = C, v = C)$ плоскости w.

1.120. Во что преобразуется окружность $|z| = 1$ при отображении $w = z/(1 - z)^2$?

1.121. Для отображения $w = e^z$ найти:

1) образы линий $x = C, \ y = C, \ x = y;$
2) прообразы линии $\rho = \theta \ \ (0 \leqslant \theta < \infty).$

1.122. Найти преобразование прямоугольной сети ($x = C$, $y = C$) плоскости z с помощью функции:

1) $w = z^2 + z$; 2) $w = \operatorname{cth} z$; 3) $w = e^{z^2}$.

1.123. Во что преобразуются с помощью функции $w = e^z + z$ отрезки прямых $x = C$ и прямые $y = C$, лежащие в полосе $0 \leqslant y \leqslant \pi$?

1.124. Что соответствует в z-плоскости полярной сетке $|w| = R$, $\arg w = \alpha$ при преобразованиях: 1) $w = e^{1/z}$; 2) $w = e^{z^2}$?

Непрерывность

1.125. Функция $f(z)$, определенная в окрестности точки z_0, называется *непрерывной по Гейне* в точке z_0, если для любой последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к z_0, выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$; эта же функция называется *непрерывной по Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Доказать эквивалентность обоих определений (см., например, [1, гл. I, п. 3.6]).

1.126. Функции $\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\dfrac{z}{|z|}$, $\dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$, $\dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ определены для $z \neq 0$. Какие из них могут быть доопределены в точке $z = 0$ так, чтобы они стали непрерывными в этой точке?

1.127. Будут ли функции:

1) $1/(1 - z)$; 2) $1/(1 + z^2)$;

непрерывны внутри единичного круга ($|z| < 1$)? Будут ли они равномерно непрерывны?

1.128. 1) Доказать, что функция $e^{-1/z}$ равномерно непрерывна в круге $|z| \leqslant R$ с выколотой точкой $z = 0$.

2) Будет ли равномерно непрерывна в этой же области функция e^{-1/z^2}?

3) Будет ли функция e^{-1/z^2} равномерно непрерывна в секторе $0 < |z| \leqslant R$, $|\arg z| \leqslant \pi/6$?

1.129. Функция $w = e^{-1/z}$ определена всюду, кроме точки $z = 0$. Доказать, что:

1) в полукруге $0 < |z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \pi/2$ эта функция ограничена, но не непрерывна;

2) внутри этого же полукруга функция непрерывна, но не равномерно;

3) в секторе $0 < |z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ функция равномерно непрерывна.

1.130. Функция $f(z)$ равномерно непрерывна в круге $|z| < 1$. Доказать, что для любой точки ζ на окружности $|z| = 1$ и любой последовательности $z_n \to \zeta$, $|z_n| < 1$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$. Доказать также, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{z_n\}$ и что функция, доопределенная на границе круга при помощи предельного перехода, будет непрерывна во всем замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

§ 5. Аналитические и гармонические функции

Условия Коши–Римана

1.131. Проверить выполнение условий Коши–Римана для функций z^n, e^z, $\cos z$, $\operatorname{Ln} z$ и доказать, что

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

1.132. Найти постоянные a, b, c, при которых функция $f(z)$ будет аналитической:

1) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$;

2) $f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$.

1.133. Найти области, в которых функция

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$

будет аналитической.

1.134. $f(z) = u + iv = \rho e^{i\theta}$ — аналитическая функция. Доказать, что если одна из функций u, v, ρ, θ тождественно равна постоянной, то и функция $f(z)$ постоянна.

1.135. Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$. Записать уравнения Коши–Римана в полярных координатах.

1.136. Доказать, что если $f(z) = u + iv$ — аналитическая функция и $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$ — перпендикулярные векторы, причем поворот от вектора $\mathbf{s}$ к вектору $\mathbf{n}$ на прямой угол совершается против часовой стрелки, то

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

($\partial/\partial s$ и $\partial/\partial n$ — производные от функций двух действительных переменных по соответствующему направлению).

1.137. Доказать, что функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

1.138. Доказать, что функция $w = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$; найти $w'(0)$.

1.139. Доказать, что для функции $f(z) = \sqrt{|xy|}$ в точке $z = 0$ выполняются условия Коши–Римана, но производная не существует.

1.140. Доказать следующие утверждения:

1) если у функции $w = f(z)$ в точке z существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left[\operatorname{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right],$$

то частные производные u_x и v_y существуют и равны между собой;

2) если существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left[\operatorname{Im}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right]$, то существуют частные производные u_y и v_x, причем $u_y = -v_x$;

3) если заранее предположить, что функции u и v дифференцируемы, то существование любого из пределов, указанных в пп. 1) и 2), обеспечивает существование другого и, следовательно, дифференцируемость функции $f(z)$.

1.141. Функция $w = f(z)$ обладает в точке z следующими свойствами:

1) u, v дифференцируемы; 2) существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|$.

Доказать, что либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ дифференцируема в точке z.

1.142. Функция $w = f(z)$ обладает в точке z следующими свойствами:

1) функции u, v дифференцируемы; 2) существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\arg\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$.

Доказать, что $f(z)$ дифференцируема в точке z.

1.143. Пусть $w = f(z) = u + iv$ и $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке z. Доказать, что множество всевозможных предельных значений отношения $\Delta w/\Delta z$ при $\Delta z \to 0$ есть либо точка, либо окружность.

Формальные производные по Коши

Если в соотношении

$$w = w(z) = f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = \varphi(z, \bar{z})$$

рассматривать z и $\bar{z}$ как независимые переменные, то производные по этим переменным будут равны

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

В дальнейшем приняты обозначения $\dfrac{\partial w}{\partial z} = w_z$, $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = w_{\bar{z}}$ и т. д.

1.144. Доказать следующие соотношения:

1) $dw = w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}$; 2) $w_z = \dfrac{1}{2}\left[(u_x + v_y) + i(-u_y + v_x)\right]$;

3) $w_{\bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\right]$.

1.145. Доказать, что уравнения Коши–Римана эквивалентны уравнению $w_{\bar{z}} = 0$.

1.146. Доказать, что уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ можно записать в виде $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}} = 0$.

1.147. Доказать, что $\overline{dw} = d\bar{w}$, $\bar{w}_z = \overline{w_{\bar{z}}}$, $\bar{w}_{\bar{z}} = \overline{w_z}$ (большая черточка означает, что переход к сопряженному значению совершается после дифференцирования).

1.148. Доказать, что для функции $z(w)$, обратной по отношению к $w(z)$,

$$dz = \frac{\bar{w}_z}{|w_z|^2 - |w_z|^2}\,dw + \frac{-w_z}{|w_z|^2 - |w_z|^2}\,d\bar{w}.$$

1.149. Доказать, что якобиан преобразования $w(z)$ равен

$$J_{w/z} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2.$$

1.150. Доказать следующие равенства:

1) $\dfrac{dw}{dz} = w_z + w_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}$, где $\alpha = \arg dz$;

2) $\max\limits_{\alpha} \left|\dfrac{dw}{dz}\right| = |w_z| + |w_{\bar{z}}|$; 3) $\min\limits_{\alpha} \left|\dfrac{dw}{dz}\right| = ||w_z| - |w_{\bar{z}}||$.

1.151. Доказать, что если $\alpha = \arg dz$, $\alpha' = \arg dw$, то:

1) $\dfrac{d\alpha'}{d\alpha} = \dfrac{J_{w/z}}{(u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha)^2 + (v_x \cos\alpha + v_y \sin\alpha)^2} = \left|\dfrac{dz}{dw}\right|^2 \dfrac{1}{J_{z/w}}$;

2) $\max \dfrac{d\alpha'}{d\alpha} = p$, $\min \dfrac{d\alpha'}{d\alpha} = \dfrac{1}{p}$, где $p = \dfrac{\max\left|\dfrac{dw}{dz}\right|}{\min\left|\dfrac{dw}{dz}\right|} = \dfrac{|w_z| + |w_z|}{||w_z| - |w_z||}$.

Гармонические функции

Функция $u(x,y)$, обладающая в некоторой области непрерывными частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

называется *гармонической функцией*. Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные уравнениями Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называются *сопряженными*.

1.152. Доказать следующие предложения:

1) Линейная комбинация гармонических функций $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i(x,y)$ есть функция гармоническая.

2) Если аргументы гармонической функции $u(x,y)$ подвергнуть преобразованию инверсии $x = \dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $y = \dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$, то преобразованная функция будет гармонической.

3) Если аргументы гармонической функции $u(x,y)$ подвергнуть преобразованию $x = \varphi(\xi,\eta)$, $y = \psi(\xi,\eta)$, где φ и ψ — сопряженные гармонические функции, то преобразованная функция будет гармонической. (Отсюда, в частности, следует предыдущее утверждение.)

4) Пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — сопряженные гармонические функции и якобиан $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ в некоторой области отличен от нуля. Тогда обратные функции $x(u,v)$ и $y(u,v)$ также будут гармоническими и сопряженными.

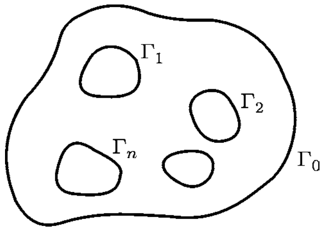

Рис. 1

1.153. 1) Доказать, что всякая гармоническая в односвязной области G функция $u(x,y)$ имеет семейство сопряженных гармонических функций, отличающихся друг от друга на постоянное слагаемое

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C.$$

2) Доказать, что если область G многосвязна и ограничена внешним контуром Γ_0 и внутренними контурами Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n (каждый из которых может вырождаться в точку; рис. 1), то функция $v(x,y)$ может оказаться многозначной и общая формула для ее значений будет иметь вид

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \sum_{k=1}^{n} m_k\pi_k + C.$$

Интеграл берется по пути, лежащему в области G, m_k — целые числа и

$$\pi_k = \int\limits_{\gamma_k} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy,$$

где γ_k — простые замкнутые контуры, каждый из которых содержит внутри себя одну связную часть границы (Γ_k) (числа π_k называются *периодами интеграла* или *циклическими постоянными*).

Для однозначности функции $v(x,y)$ необходимо и достаточно, чтобы все числа π_k были равны нулю.

Примечание. Контур Γ_0 может и отсутствовать, если только функция $u(x,y)$ гармонична в бесконечно удаленной точке. По определению это означает, что функция $U(\xi,\eta)$, полученная из функции $u(x,y)$ преобразованием инверсии (см. задачу 1.152, 2), будет гармонической в начале координат. Можно доказать, что в этом случае $\sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k = 0$.

1.154. Предполагая известным, что аналитическая функция бесконечно дифференцируема, доказать следующие теоремы:

1) действительная и мнимая части аналитической функции $f(z) = u + iv$ являются сопряженными гармоническими функциями;

2) производные (любого порядка) гармонической функции также являются функциями гармоническими.

1.155. 1) Будет ли гармонической функция u^2, если u — гармоническая функция?

2) Пусть u — гармоническая функция. Для каких функций f функция $f(u)$ будет тоже гармонической?

1.156. Будут ли функции $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\ln|f(z)|$ гармоническими, если $f(z)$ — аналитическая функция?

1.157. Преобразовать оператор Лапласа $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ к полярной системе координат (r,φ) и найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, зависящее только от r.

1.158. Выписать для $n = 1, 2, 3, 4$ гармонические многочлены $p_n(x,y)$ и $q_n(x,y)$, определяемые равенством $z^n = p_n + iq_n$. Записать в общем виде p_n и q_n в полярной системе координат.

Пользуясь формулами задачи 1.153, в задачах 1.159–1.163 найти функции, сопряженные с данными гармоническими функциями в указанных областях.

1.159. $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

1.160. $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $0 < |z| \leqslant \infty$.

1.161. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$:

а) в области, полученной из плоскости удалением полуоси: $y = 0$, $-\infty < x \leqslant 0$;

б) в плоскости с выколотым началом координат: $0 < |z| < \infty$.

1.162. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\{\ln(x^2+y^2) - \ln[(x-1)^2+y^2]\}$:

а) в плоскости с выколотыми точками $z = 0$ и $z = 1$;

б) в плоскости с удаленным отрезком действительной оси: $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

в) в плоскости с удаленным лучом: $y = 0$, $1 \leqslant x < \infty$.

1.163. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \ln\left[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2\right]$:

а) в плоскости с выкинутыми точками $z_1, z_2, ..., z_n$ $(z_k = x_k + iy_k$, $z_i \neq z_j)$;

б) в плоскости с удаленной простой (т. е. без самопересечений) ломаной линией, соединяющей данные точки.

1.164. Существует ли аналитическая функция $f(z) = u + iv$, для которой:

1) $u = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$; 2) $v = \ln(x^2+y^2) - x^2 + y^2$; 3) $u = e^{y/x}$?

В задачах 1.165–1.168 найти аналитические функции $f(z) = u + iv$ по заданной действительной или мнимой части.

1.165. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

1.166. $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$.

1.167. $v = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$.

1.168. $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$.

В задачах 1.169–1.176 выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (отличные от постоянной), и в случае существования найти их.

1.169. $u = \varphi(x)$.

1.170. $u = \varphi(ax+by)$ (a и b — действительные числа).

1.171. $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. **1.172.** $u = \varphi(xy)$. **1.173.** $u = \varphi(x^2+y^2)$.

1.174. $u = \varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$. **1.175.** $u = \varphi(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

1.176. $u = \varphi(x^2+y)$.

В задачах 1.177–1.180 доказать существование и найти аналитические функции $f(z)$ по заданному модулю или аргументу.

1.177. $\rho = (x^2+y^2)e^x$. **1.178.** $\rho = e^{r^2\cos 2\varphi}$.

1.179. $\theta = xy$. **1.180.** $\theta = \varphi + r\sin\varphi$.

1.181. Доказать: чтобы семейство линий $\varphi(x,y) = C$, где φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, было семейством линий уровня некоторой гармонической функции, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\Delta\varphi/(\operatorname{grad}\varphi)^2$ зависело только от φ.

Указание. Предварительно установить, что искомая гармоническая функция имеет вид $u = f[\varphi(x,y)]$.

В задачах 1.182–1.186 найти аналитические функции, у которых вдоль любой линии соответствующего семейства сохраняет постоянное значение либо действительная часть, либо мнимая часть, либо модуль, либо аргумент.

1.182. $x = C$. **1.183.** $y = C$. **1.184.** $y = Cx$.

1.185. $x^2 + y^2 = C$. **1.186.** $x^2 + y^2 = Cx$.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

1.187. Отображение совершается с помощью функций $w = z^2$ и $w = z^3$. Найти угол поворота (ϑ) направления, выходящего из точки z_0, и коэффициент растяжения (k) в следующих точках:

1) $z_0 = 1$; 2) $z_0 = -1/4$; 3) $z_0 = 1 + i$; 4) $z_0 = - - 3 + 4i$.

1.188. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией:

1) $w = z^2$; 2) $w = z^2 + 2z$; 3) $w = 1/z$;

4) $w = e^z$; 5) $w = \ln(z - 1)$?

1.189. Область G отображается с помощью функции $f(z)$ конформно и взаимно однозначно на область G'. Указать формулы для вычисления площади S области G' и длины L дуги, на которую отображается некоторая дуга l, принадлежащая области G.

1.190. Найти длину L спирали, на которую с помощью функции e^z отображается отрезок $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

1.191. Найти площадь области, на которую с помощью функции e^z отображается прямоугольник $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.

1.192. Найти область D, на которую функция e^z отображает прямоугольник $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 8$. Вычислить площадь области D с помощью формулы, полученной при решении задачи 1.189, и объяснить, почему эта формула дает неправильный результат.

ГЛАВА II

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

§ 1. Линейные функции

Целые линейные функции

2.1. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, i на подобный ему треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$.

2.2. Найти целое линейное преобразование с неподвижной точкой $1+2i$, переводящее точку i в точку $-i$.

2.3. Для указанных преобразований найти конечную неподвижную точку z_0 (если она существует), угол поворота вокруг нее ϑ и коэффициент растяжения k. Привести эти преобразования к каноническому виду $w - z_0 = \lambda(z - z_0)$:

1) $w = 2z + 1 - 3i$; 2) $w = iz + 4$; 3) $w = z + 1 - 2i$;

4) $w - w_1 = a(z - z_1)$ $(a \neq 0)$; 5) $w = az + b$ $(a \neq 0)$.

2.4. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:

1) верхнюю полуплоскость на себя;

2) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;

3) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость;

4) правую полуплоскость на себя.

Показать, что во всех случаях преобразование однозначно определяется заданием одной пары соответственных внутренних точек или двух пар граничных.

2.5. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:

1) полосу $0 < x < 1$ на себя;

2) полосу $-2 < y < 1$ на себя;

3) полосу, ограниченную прямыми $y = x$ и $y = x - 1$, на себя.

Выяснить, какие пары точек могут при этих отображениях соответствовать друг другу и в каком случае это соответствие будет однозначно определять отображение.

2.6. Найти целую линейную функцию $w(z)$, отображающую полосу, заключенную между данными прямыми, на полосу $0 < u < 1$ при указанной нормировке:

1) $x = a$, $x = a + h$; $w(a) = 0$;

2) $x = a$, $x = a + h$; $w\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w\left(a + \dfrac{h}{2} + i\right) < 1$;

3) $y = kx$, $y = kx + b$; $w(0) = 0$;

4) $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$; $w(b_1) = 0$.

2.7. Найти целую линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на круг $|w - w_0| < R$ так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол α.

Дробно-линейные функции

2.8. Для функции $w = 1/z$ найти образы следующих линий:
1) семейства окружностей $x^2 + y^2 = ax$;
2) семейства окружностей $x^2 + y^2 = by$;
3) пучка параллельных прямых $y = x + b$;
4) пучка прямых $y = kx$;
5) пучка прямых, проходящих через заданную точку $z_0 \neq 0$;
6) параболы $y = x^2$.

2.9. Выяснить, во что функция $w = \dfrac{1}{z - z_0} + h$ переводит:

1) прямоугольную сетку $x = C$, $y = C$;

2) полярную сетку $|z - z_0| = R$, $\arg(z - z_0) = \alpha$.

2.10. Дана функция $w = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$.

1) Доказать, что прообразом семейства $|w| = \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$ является семейство окружностей (окружности Аполлония). Для данного λ найти радиус и положение центра соответствующей окружности в z-плоскости.

2) Найти прообразы лучей $\arg w = \theta$.

3) Построить сетку в z-плоскости, соответствующую полярной сетке в w-плоскости.

4) Найти область z-плоскости, соответствующую полукругу $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

В задачах 2.11–2.15 выяснить, во что преобразуются указанные области при заданных отображающих функциях.

2.11. Квадрант $x > 0$, $y > 0$; $w = \dfrac{z - i}{z + i}$.

2.12. Полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; $w = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$.

2.13. Угол $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$; $w = \dfrac{z}{z - 1}$.

2.14. Полоса $0 < x < 1$: 1) $w = \dfrac{z-1}{z}$; 2) $w = \dfrac{z-1}{z-2}$.

2.15. Кольцо $1 < |z| < 2$; $w = \dfrac{z}{z-1}$.

2.16. Отобразить на вертикальную полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$:
1) полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ с выкинутым кругом $\left|z - \dfrac{d}{2}\right| \leqslant \dfrac{d}{2}$;
2) двуугольник, заключенный между окружностями

$$\left|z - \frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2}, \quad \left|z - \frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2} \quad (d_1 < d_2);$$

3) внешность кругов $\left|z + \dfrac{d_1}{2}\right| = \dfrac{d_1}{2}$, $\left|z - \dfrac{d_2}{2}\right| = \dfrac{d_2}{2}$ так, чтобы $w(d_2) = 0$.

2.17. Найти дробно-линейные функции, переводящие точки -1, i, $1+i$ соответственно в точки: 1) 0, $2i$, $1-i$; 2) i, ∞, 1.

2.18. Найти дробно-линейные функции, переводящие точки -1, ∞, i соответственно в точки:

1) i, 1, $1+i$; 2) ∞, i, 1; 3) 0, ∞, 1.

2.19. Найти дробно-линейные функции по следующим условиям:

1) точки 1 и i неподвижны, а точка 0 переходит в точку -1;
2) точки $\dfrac{1}{2}$ и 2 неподвижны, а точка $\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}i$ переходит в ∞;
3) точка i является двойной неподвижной точкой, а точка 1 переходит в ∞.

2.20. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки -1, 0, 1 соответственно в точки 1, i, -1, и выяснить, во что при этом отображении переходит верхняя полуплоскость.

2.21. Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего:
1) верхнюю полуплоскость на себя;
2) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;
3) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

2.22. Найти отображение верхней полуплоскости на себя при указанной нормировке:

1) $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$; 2) $w(0) = 1$, $w(i) = 2i$.

Примечание. Об отображении верхней полуплоскости на себя при другой нормировке см. задачу 2.34.

2.23. Найти функцию $w(z)$, отображающую круг $|z| < R$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, что $w(R) = 0$, $w(-R) = \infty$, $w(0) = 1$. Каков при этом отображении образ верхнего полукруга?

Две точки P_1, P_2 называются *симметричными относительно окружности* K с центром O и радиусом R, если они лежат на одном и том же луче, выходящем из O, и

$$OP_1 \cdot OP_2 = R^2.$$

2.24. Найти точки, симметричные с точкой $2+i$ относительно окружностей: 1) $|z| = 1$; 2) $|z-i| = 3$.

2.25. Найти симметричный образ относительно единичной окружности следующих линий:

1) $|z| = \dfrac{1}{2}$; 2) $|z-1| = 1$; 3) $y = 2$;

4) $|z - z_0| = |z_0|$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$;

5) $|z - z_0| = \sqrt{|z_0|^2 - 1}$ $(|z_0| > 1)$; 6) гиперболы $x^2 - y^2 = 1$;

7) границы прямолинейного треугольника с вершинами z_1, z_2, z_3 $(z_i \neq 0)$.

2.26. Доказать, что для симметрии точек P_1 и P_2 относительно K необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий:

1) всякая окружность K_1, проходящая через точки P_1, P_2, ортогональна к K;

2) $\dfrac{MP_1}{MP_2} = \mathrm{const}$ для всех точек M окружности K (т. е. K является окружностью Аполлония относительно точек P_1 и P_2).

2.27. Функция $w = e^{i\alpha}\dfrac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}$ $(\beta = a+ib,\ b > 0)$ отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг:

1) найти $\arg w(x) = \theta(x)$; 2) найти $w'(\beta)$;

3) выяснить, какая часть верхней полуплоскости при этом отображении сжимается и какая растягивается.

2.28. Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы:

1) $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$; 2) $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$;

3) $w(a+bi) = 0$, $\arg w'(a+bi) = \theta$ $(b > 0)$.

2.29. Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w - w_0| < R$ так, чтобы точка i перешла в центр круга, а производная в этой точке была положительной.

2.30. Отобразить круг $|z| < 2$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, чтобы $w(0) = 1$, $\arg w'(0) = \pi/2$.

2.31. Отобразить круг $|z - 4i| < 2$ на полуплоскость $v > u$ так, чтобы центр круга перешел в точку -4, а точка окружности $2i$ — в начало координат.

2.32. Найти общий вид дробно-линейной функции $w(z)$, отображающей круг $|z| < 1$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, чтобы $w(z_1) = 0$, $w(z_2) = \infty$, где z_1, z_2 — заданные точки на окружности $|z| = 1$ такие, что $\arg z_1 < \arg z_2$.

Построить семейство линий в круге $|z| < 1$, соответствующих полярной сетке в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$.

Указание. Воспользоваться общей формой дробно-линейного преобразования для трех пар соответственных точек и найти $\arg \dfrac{e^{i\varphi} - z_1}{e^{i\varphi} - z_2}$.

2.33. Найти центр w_0 и радиус R окружности, на которую функция $w = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ отображает действительную ось ($\operatorname{Im} z_2 \neq 0$).

2.34. Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на себя так, что $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ ($\operatorname{Im} a > 0$, $\operatorname{Im} b > 0$).

Указание. Отобразить предварительно оба экземпляра полуплоскости на единичный круг с соответствующей нормировкой.

2.35. Отобразить верхнюю полуплоскость на нижнюю так, чтобы $w(a) = a$ и $\arg w'(a) = -\dfrac{\pi}{2}$ ($\operatorname{Im} a > 0$).

2.36. Для функции $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ ($|a| < 1$), отображающей единичный круг на себя:

1) найти $\arg w(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi)$; 2) найти $w'(0)$ и $w'(a)$;

3) выяснить, какая часть единичного круга при этом отображении сжимается и какая растягивается;

4) найти $\max\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ и $\min\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ для $|z| \leqslant 1$.

2.37. Отобразить круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы:

1) $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$; 2) $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

3) $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\dfrac{\pi}{2}$; 4) $w(a) = a$, $\arg w'(a) = \alpha$.

2.38. Отобразить круг $|z| < R_1$ на круг $|w| < R_2$ так, чтобы $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ ($|a| < R_1$, $|b| < R_2$).

2.39. Отобразить круг $|z| < 1$ на круг $|w - 1| < 1$ так, чтобы $w(0) = 1/2$ и $w(1) = 0$.

2.40. Отобразить круг $|z - 2| < 1$ на круг $|w - 2i| < 2$ так, чтобы $w(2) = i$ и $\arg w'(2) = 0$.

2.41. Найти общий вид дробно-линейной функции $w(z)$, отображающей круг $|z| < R$ на себя при следующих условиях:

1) $w(a) = 0$ ($|a| < R$); 2) $w(a) = b$ ($|a| < R$, $|b| < R$);

3) $w(\pm R) = \pm R$.