Герасимчук В.С.
Васильченко Г.С.
Кравцов В.И.

Курс классической математики в примерах и задачах

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК [512.64+514.12+517](075.8)
ББК 22.161я73
Г 37

Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.И. **Курс классической математики в примерах и задачах.** В 3 т. Т.1. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 672 с. — ISBN 978-5-9221-0889-8.

Пособие соответствует программе курса высшей математики для студентов инженерно-технических специальностей и представляет собой достаточно полное и доступное руководство к решению задач и примеров традиционного курса высшей математики. Пособие построено по принципу проведения практических занятий — каждый параграф соответствует определенной теме и включает краткую сводку основных теоретических положений, большое число детально решенных типовых задач и примеров, определенное количество задач и примеров для самостоятельной работы и контрольные вопросы, которые предполагают глубокое понимание теоретического материала.

Допущено Министерством образования и науки РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по техническим специальностям.

ISBN 978-5-9221-0889-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

“Могущество математического анализа, используемого для описания явлений природы, столь велико, что позволяет предвидеть такие особенности, о существовании которых мы и не помышляли”.

П. Девис. Суперсила. Поиски единой теории природы. М.: Мир.1989.

Предисловие

Учебное пособие представляет собой руководство по практической части курса высшей математики, подготовленное в соответствии с требованиями учебной программы для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Цель пособия — дать студентам наиболее доступный способ приобретения новых знаний и умений на примере решения типовых задач и примеров.

Пособие построено по принципу «решебника» и содержит подборку задач и примеров, достаточно полно иллюстрирующих традиционный курс высшей математики. В нем с достаточной строгостью и полнотой изложены практически все основные понятия и методы математического анализа и основ аналитической геометрии. Поэтому его можно непосредственно использовать как по прямому назначению, в качестве учебного пособия, так и для самостоятельного ознакомления с курсом высшей математики. Оно может быть полезным и при выборочном изучении определенных тем или разделов.

Пособие имеет следующую структуру. В начале каждого параграфа дается сводка основных определений и теоретических положений, на которые следует опираться при решении заданий данной темы. Затем подробно излагаются стандартные методы решения типовых примеров. Внутри каждой темы задания расположены по степени возрастания их сложности. Для закрепления основных теоретических положений и навыков решения задач в качестве самоконтроля читателю предлагаются задачи для самостоятельного решения и контрольные вопросы. Все задачи снабжены ответами. В ряде случаев в контрольные задания включены проблемные вопросы, что, по мнению авторов, должно побудить читателя обратиться и к другим учебным изданиям по высшей математике.

Поскольку издание рассчитано в первую очередь на студентов высших технических учебных заведений, то при подборе и анализе задач авторы стремились продемонстрировать прикладной характер используемых математических методов и полученных решений, выяснить физический и геометрический смысл рассматриваемых вопросов. По этой же причине авторы сознательно избегали задач, представляющих чисто академический интерес.

Пособие отражает многолетний опыт работы его авторов в инженерно-техническом вузе и практикуемые методические приемы подачи учебного материала в наиболее компактной и доступной форме. Оно может удовлетворить потребности как студентов, так и преподавателей, особенно технических вузов, где вопросы тесной взаимосвязи фундаментальных и технических наук наиболее актуальны.

Настоящее пособие является первой частью трехтомного издания и соответствует курсу высшей математики первого семестра, принятому в технических вузах в соответствии с существующими учебными программами.

Мы признательны своим коллегам по кафедре высшей математики, общение с которыми стимулировало работу над пособием.

Авторы выражают особую благодарность чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцеву за полезные обсуждения теоретической части материала и ценные замечания, научному редактору доц. Е. В. Марковской и доц. А. Е. Скворцову, замечания и советы которых способствовали улучшению пособия.

Глава 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия — это раздел математики, использующий аналитический метод (посредством формул) решения задач геометрического содержания. В основе этого метода лежит *метод координат*, позволяющий привлекать для изучения геометрических форм и объектов методы алгебры и математического анализа.

§ 1.1. Уравнения прямой линии на плоскости

Если на прямой указано направление, начальная точка O и единица масштаба, то говорят, что на этой прямой введена *декартова система координат*. При этом сама прямая называется *координатной осью*, а точка O — *началом координат*.

Всякой точке M, принадлежащей прямой, в выбранной системе координат ставится в соответствие определенное вещественное число x, называемое *координатой* точки M и равное величине направленного отрезка $\overline{OM}$: $x = OM$.

Рис. 1.1.

Величиной направленного отрезка оси называется его длина, взятая со знаком «плюс», если направление отрезка совпадает с направлением выбранной оси, и со знаком «минус», если это направление противоположно направлению оси. Символ $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x.

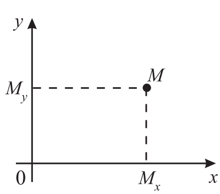


Рис. 1.2.

На плоскости задана декартова прямоугольная система координат, если заданы пара взаимно перпендикулярных осей (называемых *осями координат*) и единичный (масштабный) отрезок. Точку O пересечения осей называют *началом координат*, одну из осей называют *осью абсцисс* или осью Ox, другую — *осью ординат* или осью Oy.

Если M — произвольная точка плоскости, то, проектируя ее на оси координат, получим точки M_x и M_y.

Абсциссой точки M называют величину отрезка $\overline{OM_x}$ оси Ox, а *ординатой* — величину отрезка $\overline{OM_y}$ оси Oy, т. е. $x = OM_x$, $y = OM_y$.

Символ $M\,(x; y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y.

Пара чисел $(x; y)$ полностью определяет положение точки M на плоскости, поэтому, когда в аналитической геометрии говорят «задать точку» или «найти точку», под этим подразумевают, что задают или находят координаты этой точки.

Расстояние между двумя точками $M_1\,(x_1; y_1)$ и $M_2\,(x_2; y_2)$ на плоскости равно

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1.1.1)$$

I. Деление отрезка в данном отношении.

Пусть на произвольной прямой задан отрезок AB (A — начало, B — конец отрезка) и некоторая точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$, где AC и CB — величины направленных отрезков $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$. Если точка C лежит между точками A и B, то $\lambda > 0$, если точка C лежит вне отрезка AB, то $\lambda < 0$. В последнем случае говорят, что точка C делит отрезок AB внешним образом.

Если известны координаты точек $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$, то координаты точки C находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1)\,. \qquad (1.1.2)$$

Если точка C является серединой отрезка AB, то $\lambda = 1$ и координаты точки C равны

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (1.1.3)$$

II. Различные виды уравнения прямой линии на плоскости.

Уравнением данной линии (в выбранной системе координат) называется такое уравнение с двумя переменными $F\,(x; y) = 0$, которому удовлетворяют координаты всякой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Чтобы найти точки пересечения двух линий $F\,(x; y) = 0$ и $\Phi\,(x; y) = 0$, необходимо совместно решить эти уравнения, т. е. найти решения системы

$$\begin{cases} F\,(x;\, y) = 0, \\ \Phi\,(x;\, y) = 0. \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

В декартовой системе координат xOy любая прямая определяется уравнением *первой степени*, и обратно, каждое уравнение первой степени определяет *прямую линию* на плоскости.

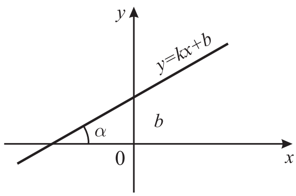


Рис. 1.3.

Общим уравнением прямой линии называется уравнение вида

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1.1.5)$$

Из уравнения (1.1.5) следует уравнение прямой линии *с заданным угловым коэффициентом*:

$$y = kx + b, \qquad (1.1.6)$$

где $k = -\dfrac{A}{B}$ — угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox ($k = \mathrm{tg}\alpha$); $b = -\dfrac{C}{B}$ — величина отрезка, отсекаемого данной прямой на оси ординат.

В частности, при $k = 0$ уравнение $y = b$ определяет прямую, параллельную оси Ox; при $b = 0$ прямая проходит через начало координат.

Прямая, параллельная оси Oy, не может быть задана уравнением вида (1.1.6), т. к. она не имеет углового коэффициента ($\alpha = \pi/2$). Уравнение такой прямой имеет вид $x = a$.

Уравнение прямой, *проходящей через данную точку* $M_0\,(x_0; y_0)$ *в данном направлении*:

$$y - y_0 = k\,(x - x_0)\,. \qquad (1.1.7)$$

Если k может принимать произвольные значения, то уравнение (1.1.7) определяет *пучок прямых* с центром в точке $M_0\,(x_0; y_0)$.

Уравнение прямой, *проходящей через две данные точки* $M_1\,(x_1; y_1)$ и $M_2\,(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (1.1.8)$$

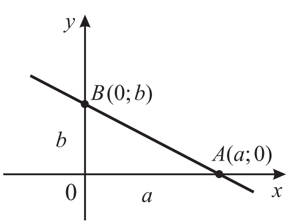


Рис. 1.4.

Уравнение прямой линии *в отрезках* на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (1.1.9)$$

где a и b — величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях.

Нормальное уравнение прямой:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \qquad (1.1.10)$$

где $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ — нормирующий множитель (знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку свободного члена C нормируемого уравнения).

Углом между двумя прямыми называется любой из двух смежных углов, образованных прямыми. Угол между двумя прямыми вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}, \tag{1.1.11}$$

где угол φ отсчитывается против хода часовой стрелки от прямой $y = k_1 x + b_1$ до прямой $y = k_2 x + b_2$.

Условие *параллельности* двух прямых:

$$k_1 = k_2. \tag{1.1.12}$$

Условие *перпендикулярности* двух прямых:

$$k_1 k_2 = -1 \quad \text{или} \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}. \tag{1.1.13}$$

Расстояние d от точки $M_0\,(x_0; y_0)$ до заданной прямой равно абсолютной величине левой части нормального уравнения этой прямой, в которой текущие координаты заменены координатами точки M_0, т. е.

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \right|. \tag{1.1.14}$$

Замечание. На первый взгляд может показаться, что в этой теме приведено слишком много видов уравнений прямой. В дальнейшем мы убедимся, что такое многообразие уравнений вполне оправдано.

Задачи аналитической геометрии достаточно часто допускают несколько вариантов решений. Приведенные ниже решения задач не всегда являются единственно возможными и наиболее рациональными. Читателю предоставляется возможность проанализировать предложенные способы решения и найти другие.

Пример 1.1. Найти площадь квадрата, если даны две его противоположные вершины $P\,(3; 5)$ и $Q\,(1; -3)$.

Решение. Найдем длину диагонали квадрата PQ, применяя формулу (1.1.1) для определения расстояния между двумя точками плоскости:

$$PQ = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{68}\,.$$

Как известно, сторона квадрата a и его диагональ d связаны соотношением $d = \sqrt{2}\,a$, откуда

$$a = \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{2}} = \sqrt{34}\,.$$

Следовательно, площадь данного квадрата равна $S = a^2 = 34$ кв. ед.

Пример 1.2. Найти центр тяжести треугольника с вершинами в точках $A\,(0;1)$, $B\,(7;-2)$ и $C\,(1;6)$.

Решение. Центр тяжести треугольника находится в точке M пересечения его медиан. Найдем координаты точки D как середины отрезка BC, применяя формулы (1.1.3):

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7+1}{2} = 4, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2 \Rightarrow D\ (4;2)\,.$$

Известно также, что точка M делит каждую медиану в отношении 2:1 (считая от вершины). Значит, отрезок AD делится точкой M в отношении $\lambda = \dfrac{AM}{MD} = 2$. Теперь с помощью формул (1.1.2) найдем координаты искомого центра тяжести:

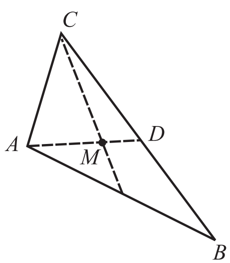


Рис. 1.5.

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{0 + 2\cdot 4}{1+2} = \frac{8}{3},$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{1 + 2\cdot 2}{1+2} = \frac{5}{3}.$$

Пример 1.3. Даны вершины треугольника $A\,(4;\ 1)$, $B\,(7;\ 5)$ и $C\,(-4;\ 7)$. Найти длину биссектрисы угла A.

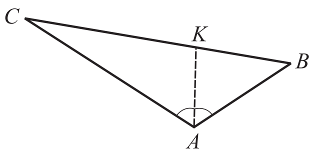


Рис. 1.6.

Решение. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. $\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{AB}{AC}$. Это дает нам возможность определить, в каком отношении точка K делит отрезок BC. Найдем длины сторон AB и AC:

$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$$AC = \sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

Тогда $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ и, следовательно, точка K делит отрезок BC в отношении $\lambda = \dfrac{BK}{KC} = \dfrac{1}{2}$. Найдем координаты точки K:

$$\left.\begin{aligned} x_K &= \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{7 + 1/2\cdot(-4)}{1+1/2} = \frac{10}{3} \\ y_K &= \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{5 + 1/2\cdot 7}{1+1/2} = \frac{17}{3} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad K\left(\frac{10}{3};\ \frac{17}{3}\right).$$

Длина биссектрисы равна $AK = \sqrt{\left(4 - \dfrac{10}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{17}{3}\right)^2} = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.

Пример 1.4. Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых квадрат расстояния до точки $A\,(3;2)$ больше квадрата расстояния до точки $B\,(-4;0)$ на 10.

Р е ш е н и е. На искомой линии возьмем произвольную точку M с текущими координатами $(x;y)$. Согласно условию задачи

$$(MA)^2 - (MB)^2 = 10,$$

где

$$MA = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}\,,$$
$$MB = \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2}\,.$$

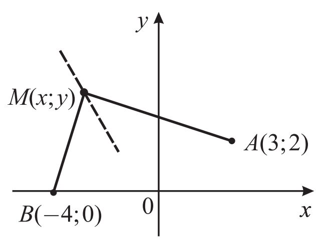


Рис. 1.7.

Тогда

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 - (x+4)^2 - y^2 = 10,$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - x^2 - 8x - 16 - y^2 = 10,$$

$$-14x - 4y - 13 = 0.$$

Получили уравнение первой степени относительно переменных x и y, поэтому искомое геометрическое место точек — прямая линия $14x + 4y + 13 = 0$.

Пример 1.5. Определить точки пересечения прямой $2x - 3y - 12 = 0$ с координатными осями и построить эту прямую.

Решение. *Первый способ.* Чтобы найти точку пересечения прямой с осью Ox, положим $y = 0$ в уравнении $2x - 3y - 12 = 0$. Имеем $x = 6$. Следовательно, точка пересечения заданной прямой с осью абсцисс есть $A\,(6;0)$.

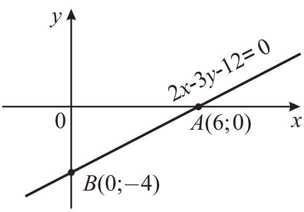


Рис. 1.8.

Чтобы найти точку пересечения прямой с осью Oy, положим $x = 0$ в уравнении $2x - 3y - 12 = 0$. Получаем $y = -4$. Следовательно, точка пересечения заданной прямой с осью ординат есть $B\,(0;-4)$.

Через точки $A\,(6;0)$ и $B\,(0;-4)$ проводим прямую.

Второй способ. От общего уравнения прямой перейдем к уравнению прямой в отрезках (1.1.9), разделив обе части уравнения на 12:

$$2x - 3y = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1,$$

откуда $a = 6$, $b = -4$. Значит, координаты искомых точек: $A\,(6;0)$ и $B\,(0;-4)$.

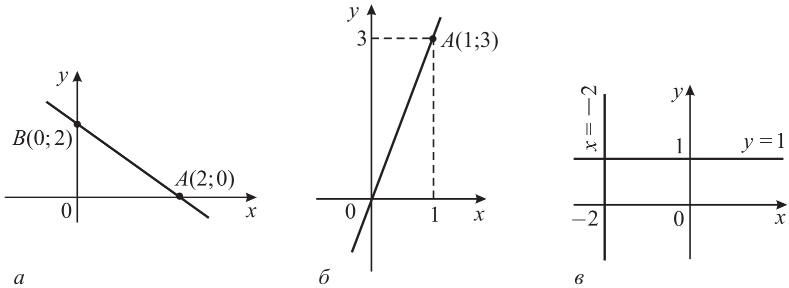
Пример 1.6. Построить прямые:

а) $x + y = 2$, *б*) $y = 3x$, *в*) $x = -2$, *г*) $y = 1$, *д*) $y = 0$.

Решение. *а*) Прямую удобно строить по точкам пересечения с осями координат $A\,(2;0)$ и $B\,(0;2)$ (рис. 1.9 *а*).

б) Свободный член в уравнении отсутствует, значит, прямая проходит через начало координат. Действительно, при $x = 0$ имеем $y = 0$. Чтобы найти еще одну точку, принадлежащую прямой, дадим независимой переменной x произвольное значение, например, $x = 1$ и получим $y = 3$. Строим прямую по точкам $O\,(0;0)$ и $A\,(1;3)$ (рис. 1.9 *б*).

в) $x = -2$ — прямая линия параллельна оси Oy, т. к. для всех точек прямой абсцисса x имеет постоянное значение (рис. 1.9 *в*).



а *б* *в*

Рис. 1.9.

г) $y = 1$ — прямая линия параллельна оси Ox, т. к. для всех точек прямой ордината y имеет постоянное значение (рис. 1.9 *в*).

д) $y = 0$ — уравнение оси Ox (рис. 1.9 *в*).

Пример 1.7. Определить, при каких значениях коэффициентов a и b прямые $ax - 2y - 1 = 0$ и $6x - 4y - b = 0$: *а*) имеют одну общую точку; *б*) параллельны; *в*) совпадают.

Решение. *а*) Прямые пересекаются, если коэффициенты при соответствующих переменных в общих уравнениях прямых не пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{6} \neq \frac{-2}{-4} \quad \Rightarrow \quad a \neq 3.$$

б) Прямые параллельны, если коэффициенты при соответствующих переменных в общих уравнениях прямых пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам, т. е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$. Следовательно, прямые параллельны при $a = 3$ и $b \neq 2$, т. к. тогда

$$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{-1}{-b}.$$

в) Прямые совпадают, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. Согласно предыдущему, прямые будут совпадать при $a = 3$ и $b = 2$, второе уравнение получено из первого умножением на 2. Естественно, оба уравнения определяют одну и ту же прямую.

Пример 1.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(2; -3)$ и образующей с осью Ox угол, вдвое больший угла, образованного с той же осью прямой $y = \dfrac{1}{2}\,x + 3$.

Решение. Пусть данная прямая образует с осью абсцисс угол α. По условию задачи $\mathrm{tg}\alpha = k_1 = \dfrac{1}{2}$. Значит, искомая прямая образует с осью Ox угол 2α. Найдем угловой коэффициент этой прямой:

$$k_2 = \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}.$$

Составим уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A\,(2;-3)$ с данным угловым коэффициентом $k = k_2 = \dfrac{4}{3}$:

$$y - y_0 = k\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y + 3 = \frac{4}{3}\,(x-2)\,.$$

Уравнение искомой прямой имеет вид $y = \dfrac{4}{3}\,x - \dfrac{17}{3}$.

Пример 1.9. Луч света направлен вдоль прямой $y = \dfrac{2}{3}\,x - 4$. Дойдя до оси абсцисс, он отразился от нее. Определить точку касания луча с осью и составить уравнение отраженного луча. Построить оба луча.

Решение. Чтобы определить точку касания луча с осью Ox, положим $y = 0$. Тогда $\dfrac{2}{3}\,x - 4 = 0$ и $x = 6$. Угловой коэффициент прямой $y = \dfrac{2}{3}x - 4$ равен $k = \mathrm{tg}\,\varphi = 2/3$. Так как угол падения луча равен углу отражения, то

$$k_2 = \mathrm{tg}\,(180^\circ - \varphi) = -\,\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{2}{3}.$$

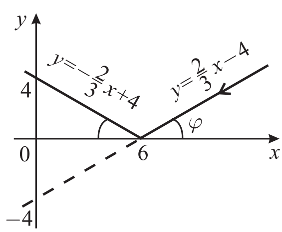


Рис. 1.10.

Уравнение отраженного луча ищем в виде уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (1.1.7), откуда

$$y = -\frac{2}{3}\,(x-6) \text{ или } y = -\frac{2}{3}\,x + 4.$$

Пример 1.10. Прямая проходит через точки $A\,(-3;1)$ и $B\,(3;3)$. Другая прямая задана уравнением $5x + y - 6 = 0$. Определить угол между ними.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B, воспользовавшись уравнением (1.1.8):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{3} + 2.$$

Угловой коэффициент этой прямой $k_1 = 1/3$.

Чтобы найти угловой коэффициент прямой $5x + y - 6 = 0$, воспользуемся формулой $k = -\dfrac{A}{B}$, откуда $k_2 = -5$. Угол между прямыми определим по формуле (1.1.11):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-5 - 1/3}{1 - 5 \cdot 1/3} = \frac{-16}{-2} = 8 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg} 8.$$

Замечание. При составлении уравнения прямой, проходящей через две данные точки, не имеет значения, какую точку считать первой, а какую — второй.

Пример 1.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(2; 3)$ параллельно прямой $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{3} = 1$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении $y - y_0 = k\,(x - x_0)$, где x_0, y_0 — координаты точки.

Из условия параллельности двух прямых (1.1.12) следует, что угловые коэффициенты заданной и искомой прямой равны. Найдем угловой коэффициент k_1 заданной прямой, разрешив ее уравнение относительно y:

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{4} + 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x + 3.$$

Значит, $k = k_1 = \dfrac{3}{4}$. Поэтому уравнение искомой прямой имеет вид $y - 3 = \dfrac{3}{4}\,(x - 2)$ или $3x - 4y + 6 = 0$.

Пример 1.12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(1; 2)$ перпендикулярно прямой, соединяющей точки $M\,(4; 3)$ и $N\,(-2; 1)$.

Решение. Составим уравнение прямой MN, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 4}{-6} = \frac{y - 3}{-2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}.$$

Угловой коэффициент прямой MN равен $k_1 = \dfrac{1}{3}$. Угловой коэффициент перпендикулярной ей прямой, согласно (1.1.13), равен $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -3$.

Применяя формулу (1.1.7), составим уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(1;2)$ в заданном направлении:

$$y - y_0 = k_2\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -3\,(x-1) \quad \Rightarrow \quad 3x + y - 5 = 0.$$

Пример 1.13. Определить угол между стороной AC и медианой, проведенной из вершины A треугольника ABC, если $A\,(-1;3)$, $B\,(2;2)$ и $C\,(0;4)$.

Р е ш е н и е. Под уравнением стороны треугольника понимают уравнение прямой, на которой лежит эта сторона. Составим уравнение прямой AC, пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки (1.1.8):

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} \quad \Rightarrow \quad x - y + 4 = 0.$$

Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M — середины отрезка BC:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 1, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 3 \Rightarrow M\,(1;3)\,.$$

Уравнение медианы AM как прямой, проходящей через две данные точки (1.1.8), имеет вид

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{0}.$$

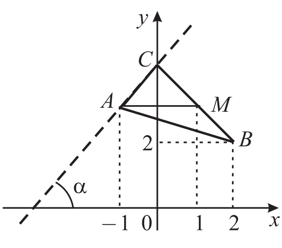


Рис. 1.11.

Это равенство справедливо в том случае, если $y - 3 = 0$. Уравнение $y = 3$ определяет прямую, параллельную оси абсцисс. Значит, сторона AC составляет с медианой AM такой же угол, как и с осью Ox.

Перейдем от общего уравнения прямой AC к уравнению с угловым коэффициентом (1.1.6): $y = x + 4$. Отсюда находим $k = \operatorname{tg}\alpha = 1$, т. е. $\alpha = \pi/4$.

Пример 1.14. Найти проекцию точки $P\,(-6;4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

Р е ш е н и е. Чтобы найти проекцию точки P на прямую, следует через эту точку провести прямую, перпендикулярную заданной прямой, и найти точку их пересечения P'. Поэтому сначала составим уравнение прямой PP', которая перпендикулярна заданной прямой.

Из уравнения $4x - 5y + 3 = 0$ имеем: $k_1 = -\dfrac{A}{B} = \dfrac{4}{5}$. Тогда угловой коэффициент искомой прямой $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{5}{4}$, а само уравнение принимает вид $y - 4 = -\dfrac{5}{4}(x + 6)$ или $y = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{7}{2}$.

Точку пересечения двух прямых определим как решение системы, составленной из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5} = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1\,. \end{cases}$$

Следовательно, проекцией точки $P(-6; 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$ является точка $P'(-2; -1)$.

Пример 1.15. Найти высоту трапеции, основания которой заданы уравнениями $4x - 3y + 15 = 0$ и $8x - 6y + 25 = 0$.

Решение. Переформулируем условие задачи следующим образом: найти расстояние между двумя параллельными прямыми. Для этого на одной из прямых, например, на прямой $4x - 3y + 15 = 0$ возьмем произвольную точку M. Положив $x = 0$, из уравнения $4x - 3y + 15 = 0$ находим $y = 5$. Следовательно, точка $M(0;\ 5)$ принадлежит прямой $4x - 3y + 15 = 0$, поскольку ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой.

Найдем расстояние от точки $M(0;\ 5)$ до другой прямой $8x - 6y + 25 = 0$. Для этого составим нормальное уравнение (1.1.10) этой прямой. Нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = -\frac{1}{10} < 0,$$

т. к. $C = 25 > 0$.

Тогда нормальное уравнение другого основания трапеции имеет вид $-\dfrac{8x - 6y + 25}{10} = 0$. Подставим в его левую часть координаты точки $M\,(0;\ 5)$ и согласно формуле (1.1.14) получим значение искомой высоты трапеции:

$$H = \left| -\frac{8\cdot 0 - 6\cdot 5 + 25}{10} \right| = \frac{1}{2}.$$

Замечание. При решении данной задачи можно было не использовать понятие нормального уравнения прямой. Действительно, если спроектировать точку M на прямую $8x - 6y + 25 = 0$ (см. пример 1.14), а затем вычислить расстояние между двумя точками, то получим искомую высоту трапеции. Однако с помощью нормального уравнения прямой и формулы (1.1.14) расстояние от точки до прямой находится проще.

Пример 1.16. Точка $A\,(-4;\ 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали квадрата.

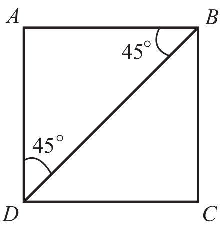


Рис. 1.12.

Решение. Координаты точки A не удовлетворяют уравнению прямой $7x - y + 8 = 0$, следовательно, задано уравнение диагонали BD.

Задача заключается в том, чтобы провести прямую AB (AD) под углом $\pi/4$ к данной диагонали. Определим угловой коэффициент заданной прямой:

$$y = 7x + 8 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 7.$$

Воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 - k_2 k_1}$ для определения углового коэффициента k_2 стороны квадрата:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{k_2 - 7}{1 + 7k_2} \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\frac{4}{3}.$$

Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку $A\,(-4; 5)$ с данным угловым коэффициентом k_2:

$$y - y_0 = k_2\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = -\frac{4}{3}\,(x + 4) \quad \Rightarrow \quad 4x + 3y + 1 = 0.$$

Пусть, для определенности, это уравнение стороны AB.

Угловой коэффициент стороны AD найдем, исходя из условия перпендикулярности прямых AD и AB:

$$k_{AB}k_{AD} = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{4}{3}\right) k_{AD} = -1 \quad \Rightarrow \quad k_{AD} = \frac{3}{4}.$$

Тогда уравнение стороны AD

$$y - y_0 = k_2\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = \frac{3}{4}\,(x + 4) \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y + 32 = 0.$$

Найдем координаты вершин квадрата B и D как точек пересечения диагонали квадрата BD с его сторонами AB и AD соответственно. Для этого решим системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ 7x - y + 8 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y + 32 = 0 \\ 7x - y + 8 = 0\,, \end{cases}$$

откуда получаем: $B\,(-1;\ 1)$ и $D\,(0;\ 8)$.

Теперь мы располагаем всеми необходимыми данными для составления уравнений сторон квадрата BC и DC и диагонали AC.

Действительно, т. к. $k_{BC} = k_{AD} = \frac{3}{4}$, то уравнение стороны BC

$$y - 1 = \frac{3}{4}\,(x + 1) \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y + 7 = 0.$$

Поскольку $k_{DC} = k_{AB} = -\frac{4}{3}$, то уравнение стороны DC

$$y - 8 = -\frac{4}{3}x \quad \Rightarrow \quad 4x + 2y - 24 = 0.$$

Из условия перпендикулярности диагоналей квадрата AC и BD

$$k_{AC}k_{BD} = -1 \quad \Rightarrow \quad k_{AC} = -\frac{1}{k_{BD}} = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{7}.$$

Следовательно, уравнение диагонали AC

$$y - 5 = -\frac{1}{7}\,(x + 4) \quad \Rightarrow \quad x + 7y - 31 = 0.$$

Пример 1.17. Составить уравнения сторон треугольника, если известны уравнения двух его высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$ и одна из его вершин $B\,(-4; -5)$.

Решение. Обозначим две другие вершины треугольника буквами A и C, а точку пересечения высот буквой N. Координаты вершины B

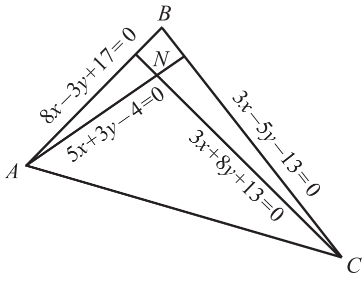


Рис. 1.13.

не удовлетворяют ни одному из заданных уравнений, значит, даны уравнения высот AN и CN.

Пусть, для определенности, $5x + 3y - 4 = 0$ — это уравнение прямой AN, а прямая CN описывается уравнением $3x + 8y + 13 = 0$. Составим уравнение прямой AB. Разрешив уравнение $3x + 8y + 13 = 0$ относительно y, получим $y = -\frac{3}{8}\,x - \frac{13}{8}$, откуда $k_1 = -\frac{3}{8}$. Из условия перпендикулярности двух прямых (1.1.13) следует, что угловой коэффициент прямой AB: $k_2 = \frac{8}{3}$, поэтому уравнение стороны AB имеет вид

$$y + 5 = \frac{8}{3}\,(x + 4) \quad \Rightarrow \quad 8x - 3y + 17 = 0.$$

Аналогично составляем уравнение стороны BC, которая перпендикулярна прямой AN. Получаем

$$3x - 5y - 13 = 0.$$

Чтобы составить уравнение стороны AC треугольника, нужно найти координаты его вершин A и C. Вершина A — точка пересечения прямых AB и AN, определяемых уравнениями $8x - 3y + 17 = 0$ и $5x + 3y - 4 = 0$ соответственно. Решаем систему

$$\begin{cases} 8x - 3y + 17 = 0 \\ 5x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1\,, \\ y = 3\,. \end{cases}$$

Следовательно, точка A имеет координаты $(-1; 3)$. Аналогично решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 5y - 13 = 0 \\ 3x + 8y + 13 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1\,, \\ y = -2 \end{cases}$$

определяет вершину $C\,(1; -2)$ как точку пересечения прямых BC и CN.

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки, составим уравнение стороны AC:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-5} \quad \Rightarrow \quad 5x + 2y - 1 = 0.$$

Пример 1.18. В равнобедренном треугольнике известно уравнение основания $x - 2y + 3 = 0$, уравнение одной из боковых сторон $4x - y + 5 = 0$ и точка $P\,(1,2;\ 5,6)$ на другой боковой стороне. Вычислить площадь треугольника.

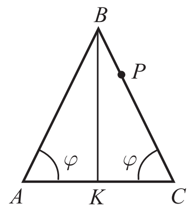


Рис. 1.14.

Решение. По условию задачи основание AC определено уравнением $x - 2y + 3 = 0$. Пусть, для определенности, уравнение $4x - y + 5 = 0$ определяет сторону AB. Тогда точка P лежит на стороне BC.

Чтобы найти площадь треугольника, сначала определим координаты его вершин. Найдем координаты точки A как точки пересечения прямых AB и AC:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 4x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad A\,(-1;\ 1)\,.$$

Вычислим тангенс угла при основании треугольника (при вершине A). Угловые коэффициенты заданных прямых равны $k_1 = \dfrac{1}{2}$ и $k_2 = 4$, следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_2 k_1} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{4 - \frac{1}{2}}{1 + 2} = \frac{7}{6}.$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi > 0$, то это означает, что найден внутренний угол при вершине A. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине C также равен φ.

Применим еще раз формулу $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2' - k_1'}{1 - k_2' k_1'}$, где $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{7}{6}$. В качестве k_2' возьмем угловой коэффициент основания AC, т.е. $k_2' = k_{AC} = \dfrac{1}{2}$, а k_1' — неизвестный пока угловой коэффициент прямой BC. Получаем

$$\frac{7}{6} = \frac{\frac{1}{2} - k_1'}{1 + \frac{1}{2}k_1'} \quad \Rightarrow \quad k_1' = k_{BC} = -\frac{8}{19}.$$

Составим уравнение стороны BC, т. е. прямой, проходящей через точку $P\,(1,2;\ 5,6)$ с угловым коэффициентом $k_1' = k_{BC} = -\dfrac{8}{19}$:

$$y - 5,6 = -\frac{8}{19}\,(x - 1,2) \quad \Rightarrow \quad 8x + 19y - 116 = 0.$$

Найдем координаты вершин треугольника C и B, решая соответствующие системы уравнений:

$$\begin{cases} 8x + 19y - 116 = 0 \\ x = 2y - 3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad C\,(5;\ 4)\,.$$

$$\begin{cases} 8x + 19y - 116 = 0 \\ y = 4x + 5 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad B\left(\frac{1}{4};\ 6\right).$$

Найдем расстояние между точками A и C, т. е. длину основания:

$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,.$$

Запишем нормальное уравнение стороны AC: $\dfrac{x - 2y + 3}{-\sqrt{5}} = 0$ и найдем расстояние от вершины B до основания AC, т. е. высоту:

$$BK = \left| \frac{1/4 - 2\cdot 6 + 3}{-\sqrt{5}} \right| = \frac{35}{4\sqrt{5}}.$$

Теперь можем вычислить площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\frac{35}{4\sqrt{5}} = \frac{3\cdot 35}{8} = \frac{105}{8} = 13\,\frac{1}{8} \text{ кв. ед.}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что представляет собой прямоугольная *декартова система координат* на плоскости?
2. Как определяется *расстояние* между двумя точками плоскости?
3. Сформулировать задачу *о делении отрезка* в данном отношении.
4. Как расположена прямая относительно системы координат, если ее уравнение не содержит: свободного члена? одной из переменных? одной из переменных и свободного члена?

5. Как перейти от *общего уравнения прямой* $Ax + By + C = 0$ к *уравнению прямой с угловым коэффициентом*? Каков смысл коэффициентов k и b?
6. Как перейти от *общего уравнения прямой* $Ax + By + C = 0$ к *уравнению прямой в отрезках* на осях?
7. Через какие четверти проходит прямая $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, если:

   а) $a > 0, \quad b > 0$; *б*) $a < 0, \quad b > 0$; *в*) $a < 0, \quad b < 0$?
8. Как найти *точку пересечения* прямых?
9. Как убедиться в том, что данная точка принадлежит данной прямой?
10. Как найти *угол между двумя прямыми*?
11. Сформулировать *условия параллельности* и *перпендикулярности* двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.
12. В каком случае удобно пользоваться *нормальным уравнением* прямой?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составить уравнения прямой в отрезках на осях и построить прямые, заданные уравнениями:

1.1 $4x - 3y + 24 = 0$, **1.2** $2x + 3y - 9 = 0$.

2. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

3. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\,(2; 1)$:

3.1 параллельно данной прямой;

3.2 перпендикулярно к данной прямой.

4. Через точки $M_1\,(-1; 2)$ и $M_2\,(2; 3)$ проведена прямая. Определить точки пересечения прямой с осями координат.

5. Даны середины сторон треугольника $M_1\,(2; 1)$, $M_2\,(5; 3)$ и $M_3\,(3; -4)$. Составить уравнения его сторон.

6. Даны вершины треугольника $A\,(1;-1)$, $B\,(-2;1)$ и $C\,(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

7. Найти угол между двумя прямыми:

7.1 $5x-y+7=0,\quad 3x+2y=0;$

7.2 $x-2y-4=0,\quad 2x-4y+3=0;$

7.3 $3x-2y+7=0,\quad 2x+3y-3=0.$

8. Даны две смежные вершины параллелограмма $A\,(-3;-1)$, $B\,(2;2)$ и точка пересечения его диагоналей $Q\,(3;0)$. Составить уравнения сторон параллелограмма.

9. Найти проекцию точки $P\,(-5;13)$ на прямую $2x-3y-3=0$.

10. Найти точку M_1, симметричную точке $M_2\,(8;-9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A\,(3;-4)$ и $B\,(-1;-2)$.

11. Показать, что прямые $2x-3y=6$ и $4x-6y=25$ параллельны, и найти расстояние между ними.

12. Дана трапеция с вершинами $A\,(-2;-2)$, $B\,(-3;1)$, $C\,(7;7)$ и $D\,(3;1)$. Составить уравнение средней линии трапеции и найти острый угол между диагоналями.

13. Даны две противоположные вершины квадрата $A\,(-2;7)$ и $C\,(5;4)$. Составить уравнения и найти длину его диагоналей.

14. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(2;1)$ под углом $\pi/4$ к данной прямой.

15. Луч света направлен вдоль прямой $x-2y+5=0$. Дойдя до прямой $3x-2y+7=0$, луч света, следуя законам геометрической оптики, отразился от нее. Составить уравнение прямой, вдоль которой направлен отраженный луч.

ОТВЕТЫ

1.1. $\dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{8}=1.$

1.2. $\dfrac{x}{4,5}+\dfrac{y}{3}=1.$

2. 6 кв.ед.

3.1. $2x+3y-7=0.$

3.2. $3x-2y-4=0.$

4. $(-7;0)$; $\left(0;\dfrac{7}{3}\right)$.

5. $7x-2y-12=0$,
$5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$.

6. $4x+y-3=0$.

7.1. $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

7.2. $\varphi=0$.

7.3. $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

8. $3x-5y+4=0$,
$x+7y-16=0$, $3x-5y-22=0$,
$x+7y+10=0$.

9. $(3;1)$.

10. $M_1\,(10;-5)$.

11. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

12. $3x-5y+5=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

13. $3x+7y-43=0$,
$7x-3y+6=0$, $\sqrt{58}$.

14. $x-5y+3=0$ или
$5x+y-11=0$.

15. $29x-2y+33=0$.

§ 1.2. Окружность

Уравнение второй степени относительно переменных x и y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.2.1}$$

называется общим уравнением *линии второго порядка*.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности. Уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{1.2.2}$$

определяет окружность радиуса R с центром в точке $C\,(x_0; y_0)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $C\,(0; 0)$, то уравнение окружности принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{1.2.3}$$

Уравнения (1.2.2) и (1.2.3) называются *каноническими* (простейшими) уравнениями окружности.

Пример 1.19. Установить, какие линии определяются заданными уравнениями, и построить их:

а) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, *в*) $x^2 - y^2 = 0$,

б) $x = \sqrt{16 - y^2}$, *г*) $x^2 + y^2 = 0$.

Решение. *а*) Приведем данное уравнение к каноническому виду (1.2.2). Для этого, пользуясь формулой $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, выделим полный квадрат по переменной y:

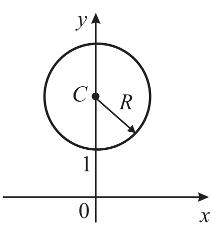


Рис. 1.15.

$$x^2 + \left(y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 4\right) - 4 + 3 = 0,$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с каноническим, находим, что центр окружности лежит в точке $C\,(0; 2)$, а радиус $R = 1$. По найденным данным строим окружность.

б) Возведем обе части данного уравнения в квадрат:

$$x^2 = 16 - y^2 \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 4^2.$$

Получили уравнение окружности (1.2.3) с центром в начале координат и радиусом $R = 4$. Поскольку выражение $\sqrt{16-y^2} \geqslant 0$, данное уравнение определяет только правую половину окружности.

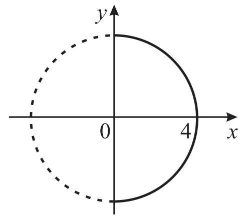


Рис. 1.16.

в) Применяя формулу разности квадратов двух чисел, заданное уравнение запишем в виде

$$(x-y)\,(x+y) = 0.$$

Отсюда имеем $x - y = 0$ и $x + y = 0$. Эти уравнения описывают две прямые $y = x$ и $y = -x$.

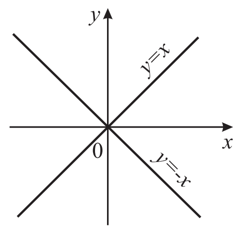


Рис. 1.17.

г) Уравнению $x^2 + y^2 = 0$ (или $x^2 = -y^2$) удовлетворяет единственная точка $O\,(0;0)$.

Пример 1.20. Составить уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до точки $M_1\,(-1;1)$ вдвое меньше расстояния до точки $M_2\,(-4;4)$.

Р е ш е н и е. Возьмем на искомой кривой произвольную точку M с текущими координатами $(x;y)$. По условию задачи

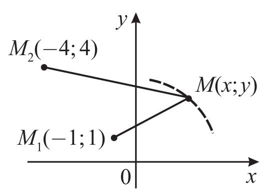


Рис. 1.18.

$$2MM_1 = MM_2,$$

где

$$MM_1 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}\,,$$
$$MM_2 = \sqrt{(x+4)^2 + (y-4)^2}\,.$$

Выполняя простые преобразования, получаем:

$$2\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-4)^2}\,,$$
$$4\,(x+1)^2 + 4\,(y-1)^2 = (x+4)^2 + (y-4)^2\,,$$
$$4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 8y + 16,$$
$$x^2 + y^2 = 8.$$

Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $2\sqrt{2}$.

Пример 1.21. Составить уравнения окружностей радиуса $R = 3$, касающихся оси Ox в точке $A(-5;0)$.

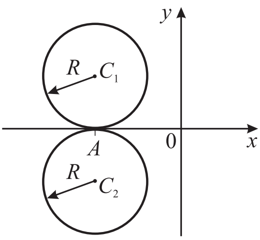


Рис. 1.19.

Решение. Можно построить две окружности, касающиеся оси абсцисс в указанной точке. Центры окружностей лежат на прямой, проходящей через точку касания $A(-5;0)$ перпендикулярно оси Ox.

Так как радиусы окружностей равны $R = 3$, то координаты центров окружностей $C_1(-5;3)$ и $C_2(-5;-3)$.

Пользуясь формулой (1.2.2), составим уравнения окружностей

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 9, \quad (x+5)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

Пример 1.22. Точки $A(3;2)$ и $B(-1;6)$ являются концами одного из диаметров окружности. Составить уравнение окружности.

Решение. Найдем координаты центра окружности как координаты середины отрезка AB, пользуясь формулами (1.1.3):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3-1}{2} = 1; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Таким образом, центр окружности $C(1;4)$. Радиус окружности определим как длину отрезка AC :

$$R = AC = \sqrt{(1-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}.$$

Подставляя найденные параметры окружности в каноническое уравнение (1.2.2), получим $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$.

Пример 1.23. Найти координаты центров и радиусы окружностей:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$, *б*) $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y - 7 = 0$.

Решение. *а*) Сгруппируем слагаемые в левой части уравнения:

$$\left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 + 6y\right) - 15 = 0.$$

Выражение в каждой скобке дополним до полного квадрата:

$$\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1\right) - 1 + \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 9\right) - 9 - 15 = 0,$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

Получили каноническое уравнение окружности. Отсюда следует, что $x_0 = 1$, $y_0 = -3$, т.е. центр окружности лежит в точке $C_1\,(1; -3)$, а радиус $R_1 = \sqrt{25} = 5$.

б) Разделим обе части уравнения на 2:

$$x^2 + y^2 + x - 3y - \frac{7}{2} = 0$$

Сгруппируем слагаемые и выделим полные квадраты как в пункте *а*):

$$\left(x^2 + x\right) + \left(y^2 - 3y\right) - \frac{7}{2} = 0,$$
$$\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} = 0,$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 6.$$

Центр окружности — точка $C_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, радиус $R_2 = \sqrt{6}$.

Замечание. Полезно запомнить, что если общее уравнение 2-го порядка описывает окружность, то коэффициенты при квадратах переменных равны между собой и отсутствует член с произведением xy.

Пример 1.24. Исследовать уравнение $x^2 + y^2 = 2ax$.

Решение. Данное уравнение второй степени имеет одинаковые коэффициенты при квадратах переменных и не имеет члена с произведением переменных. Поэтому при любом значении параметра a уравнение определяет окружность. Отсутствие свободного члена свидетельствует о том, что окружность проходит через начало координат.

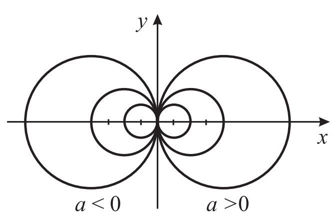


Рис. 1.20.

Приведем уравнение к каноническому виду

$$x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + y^2 = 0, \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Таким образом, центр окружности расположен в точке $C\,(a;0)$, а радиус $R = |a|$.

При переменном a заданное уравнение определяет совокупность окружностей, касающихся оси Oy, с центрами, лежащими на оси Ox.

При $a > 0$ соответствующая окружность лежит в правой полуплоскости, а при $a < 0$ — в левой. При $a = 0$ окружность вырождается в точку $O\,(0;0)$.

Пример 1.25. Диаметр окружности $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 6 = 0$ параллелен прямой $2x + y - 4 = 0$. Найти уравнение диаметра.

Решение. Найдем координаты центра окружности, выделяя в уравнении окружности полный квадрат по обеим переменным:

$$\left(x^2 - 4x + 4\right) -4 + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Координаты центра окружности $\left(2; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Определим угловой коэффициент заданной прямой

$$2x + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 4 \quad \Rightarrow \quad k = -2.$$

Так как прямая и диаметр параллельны, то искомая прямая (диаметр) имеет тот же угловой коэффициент, что и заданная. Уравнение прямой будем искать в виде $y - y_0 = k\,(x - x_0)$, где точка $(x_0; y_0)$ — центр окружности

$$y + \frac{3}{2} = -2\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad 4x + 2y - 5 = 0.$$

Пример 1.26. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $M\,(-1;3)$, $N\,(0;2)$, $P\,(1;-1)$.

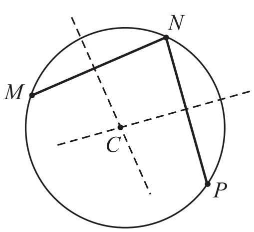


Рис. 1.21.

Решение. *Первый способ.* Центр окружности лежит в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через середины отрезков MN и NP (или MN и MP). Составим уравнения этих перпендикуляров.

Координаты середины отрезка MN:

$$x = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{5}{2}.$$

Найдем уравнение прямой MN, пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки (1.1.8):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-1} \quad \Rightarrow \quad y=-x+2.$$

Отсюда угловой коэффициент прямой MN равен $k_{MN}=-1$. Из условия перпендикулярности двух прямых (1.4.10) найдем угловой коэффициент прямой, перпендикулярной прямой MN: $k_1=-\dfrac{1}{k_{MN}}=1$.

Пользуясь уравнением пучка прямых, находим уравнение перпендикуляра к прямой MN, проходящего через середину отрезка MN:

$$y-y_0=k\,(x-x_0) \;\Rightarrow\quad y-\frac{5}{2}=1\,\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\; x-y+3=0.$$

Аналогичным образом составляем уравнение серединного перпендикуляра для отрезка NP. Имеем $x-3y+1=0$.

Точка пресечения найденных прямых служит центром окружности C. Решая систему, получим координаты точки C:

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x-3y+1=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad C\,(-4,\;-1)\,.$$

Радиус окружности определим как длину отрезка между центром C и любой из заданных точек. Например, $R=CM=\sqrt{9+16}\,=5$.

Следовательно, уравнение искомой окружности:

$$(x+4)^2+(y+1)^2=25.$$

Второй способ. Раскрывая скобки в уравнении (1.2.2), сведем его к виду

$$x^2+y^2+lx+my+n=0, \tag{1.2.2 a}$$

где $l=-2x_0$, $m=-2y_0$, $n=x_0^2+y_0^2-R^2$.

Уравнение окружности будем искать в виде (1.2.2 a). Поскольку окружность проходит через точки M, N и P, координаты этих точек удовлетворяют этому уравнению. Поэтому, подставляя координаты точек в уравнение, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными l, m, n:

$$\begin{cases} 1+9-l+3m+n=0 \\ 4+2m+n=0 \\ 1+1+l-m+n=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -l+3m+n=10 \\ 2m+n=-4 \\ l-m+n=-2\,. \end{cases}$$

Система уравнений имеет решение: $l = 8$, $m = 2$, $n = -8$. Подставляя найденные значения l, m, n в уравнение (1.2.2 а), получим уравнение искомой окружности

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+4)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Пример 1.27. Окружность проходит через точки $M\,(1;\ 5)$ и $N\,(5,\ 3)$, а ее центр лежит на прямой $x + y - 4 = 0$. Составить уравнение окружности.

Решение. Уравнение окружности будем искать в виде (1.2.2). Так как окружность проходит через точки M и N, то их координаты удовлетворяют уравнению окружности, т. е.

$$(1 - x_0)^2 + (5 - y_0)^2 = R^2,$$
$$(5 - x_0)^2 + (3 - y_0)^2 = R^2.$$

Приравнивая левые части равенств

$$(1 - x_0)^2 + (5 - y_0)^2 = (5 - x_0)^2 + (3 - y_0)^2$$

и выполняя преобразования, получим

$$y_0 = 2x_0 - 2.$$

С другой стороны, т.к. точка $C\,(x_0; y_0)$ лежит на прямой $x + y - 4 = 0$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т.е.

$$x_0 + y_0 - 4 = 0.$$

Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными, определим координаты центра окружности:

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 - 2 = 0 \\ x_0 + y_0 - 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\,(2;\ 2)\,.$$

Радиус окружности равен расстоянию между точками, например, C и M:

$$R = CM = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}\,.$$

Значит, уравнение окружности имеет вид

$$(x-2)^2+(y-2)^2=10.$$

Пример 1.28. Заданы уравнения окружности $(x-3)^2+(y+4)^2 = 5$ и прямой $4x-2y-5=0$. Точки A и B — соответственно ближайшая и наиболее удаленная от прямой точки окружности. Найти координаты этих точек.

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+4)^2=5\\ 4x-2y-5=0,\end{cases}$$

легко установить, что прямая и окружность не пересекаются, т. е. прямая находится вне окружности.

Расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, проведенного из этой точки к заданной прямой.

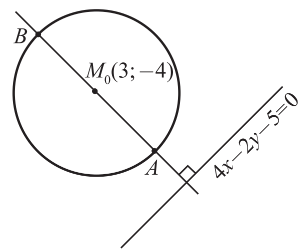


Рис. 1.22.

Проведем прямую, проходящую через центр окружности $M_0\,(3;-4)$ перпендикулярно заданной прямой. Точки пересечения этой прямой с окружностью и будут искомыми точками.

Угловой коэффициент заданной прямой равен $k_1=2$. Пользуясь условием перпендикулярности двух прямых (1.1.13), найдем угловой коэффициент прямой, перпендикулярной заданной: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\dfrac{1}{2}$.

Подставляя в уравнение пучка прямых угловой коэффициент k_2 и координаты центра окружности $M_0\,(3;-4)$, найдем уравнение прямой, проходящей через точки A, M_0 и B:

$$y-y_0=k_2\,(x-x_0) \quad\Rightarrow\quad y+4=-\frac{1}{2}\,(x-3) \quad\Rightarrow\quad 2y+x+5=0.$$

Теперь совместно решим уравнения окружности и найденной прямой:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+4)^2=5\\ 2y+x+5=0,\end{cases}$$

откуда и найдем искомые точки $A\,(1;-3)$ и $B\,(5;-5)$.

Пример 1.29. Известны координаты концов общей хорды $A\,(3;2)$ и $B\,(7;6)$ двух равных окружностей. Найти уравнения этих окружностей, если центр одной из них лежит на прямой $4x + 5y - 20 = 0$.

Решение. Пусть $M_1\,(x_1;\, y_1)$ и $M_2\,(x_2;\, y_2)$ — центры двух окружностей. Тогда $(AM_1)^2 = (BM_1)^2 = R^2$, т. е.

$$(3 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2 = (7 - x_1)^2 + (6 - y_1)^2 \;\Rightarrow\; x_1 + y_1 - 9 = 0.$$

Так как точка M_1 принадлежит прямой $4x + 5y - 20 = 0$, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т. е.

$$4x_1 + 5y_1 - 20 = 0.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - 9 = 0 \\ 4x_1 + 5y_1 - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 25 \\ y_1 = -16, \end{cases}$$

найдем координаты центра одной из окружностей $M_1\,(25; -16)$. Вычислим радиус этой окружности как расстояние между точками A и M_1:

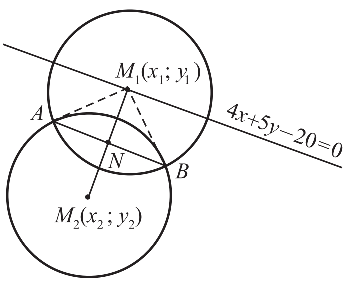


Рис. 1.23.

$$R^2 = (25 - 3)^2 + (-16 - 2)^2 = 808.$$

Следовательно, уравнение окружности с центром в точке M_1 имеет вид

$$(x - 25)^2 + (y + 16)^2 = 808.$$

Найдем координаты центра M_2, предварительно определив координаты точки N — середины отрезка AB:

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5, \quad y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad N\,(5;\; 4)\,.$$

Так как $M_1N = M_2N$, то точка M_2 делит отрезок M_1N внешним образом:

$$\lambda = \frac{M_1M_2}{M_2N} = -2.$$

Тогда

$$x_2 = \frac{x_1 + \lambda x_N}{1+\lambda} = \frac{25 - 2\cdot 5}{1-2} = -15, \quad y_2 = \frac{y_1 + \lambda y_N}{1+\lambda} = \frac{-16 - 2\cdot 4}{1-2} = 24.$$

Таким образом, координаты центра второй окружности $M_2\,(-15; 24)$.

Теперь составим каноническое уравнение второй окружности:

$$(x+15)^2 + (y-24)^2 = 808.$$

Пример 1.30. Дана точка $A\,(a;0)$. Точка M движется вдоль некоторой кривой так, что в треугольнике OMA угол OMA остается прямым. Определить траекторию движения точки M.

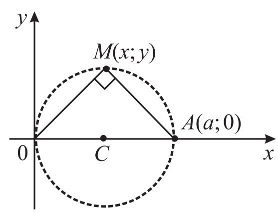


Рис. 1.24.

Решение. Возьмем произвольную точку $M\,(x;y)$. По условию задачи треугольник OMA прямоугольный. По теореме Пифагора $(OM)^2 + (AM)^2 = (OA)^2$, где

$$OM^2 = x^2 + y^2, \quad OA^2 = a^2,$$
$$AM^2 = (a-x)^2 + y^2.$$

Тогда

$$x^2 + y^2 + (a-x)^2 + y^2 = a^2,$$
$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Это уравнение окружности. Найдем координаты центра и радиус. Выделяя полный квадрат по переменной x, получим

$$\left(x^2 - 2x\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Центр окружности имеет координаты $\left(\frac{a}{2};0\right)$, а радиус $R = \frac{a}{2}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое уравнение называется *общим уравнением линии второго порядка*?
2. В каком случае общее уравнение второго порядка описывает окружность?

3. Записать *каноническое уравнение окружности.*
4. Записать уравнение окружности:

   а) с центром в начале координат;

   б) с центром в точке, не совпадающей с началом координат.
5. Является ли уравнение $2x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$ уравнением окружности?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составить уравнение окружности с центром в точке $C\,(-2;5)$ и радиусом $R = 6$.

2. Составить уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{2}$.

3. Найти координаты центра и радиус окружности

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 8.$$

4. Найти координаты центра и радиус окружности:

4.1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, **4.3.** $x^2 + y^2 + y = 0$.

4.2. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 11 = 0$.

5. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A\,(3;-2)$, если ее центр находится в точке $C\,(4;2)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4 \quad \text{и} \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

7. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок прямой $3x - 4y + 12 = 0$, заключенный между осями координат.

8. Определить расстояние между центрами окружностей

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + 2x = 0.$$

9. Составить уравнения окружностей радиуса $R = \sqrt{5}$, касающихся прямой $x - 2y - 1 = 0$ в точке $M\,(3;1)$.

10. Составить уравнение окружности, которая проходит через начало координат и отсекает 6 ед. от оси Ox и 8 ед. от оси Oy.

11. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами $A\,(0;1)$, $B\,(-2;0)$, $C\,(0;-1)$.

12. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, перпендикулярного прямой $5x+2y-13=0$.

13. Вычислить кратчайшее расстояние от точки $A\,(-7;2)$ до окружности $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

14. Показать, что точка $A\,(3;0)$ лежит внутри заданной окружности $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ и составить уравнение хорды, делящейся в точке A пополам.

15. Составить уравнение касательной к окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ в точке $A\,(-5;7)$.

16. Найти уравнение траектории точки M, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A\,(1;0)$, чем к точке $B\,(-2;0)$.

17. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояния от начала координат и от точки $A\,(0;5)$ относятся как $3:2$.

ОТВЕТЫ

1. $(x+2)^2+(y-5)^2=36$.

2. $x^2+y^2=2$.

3. $C\,(1;-3)$, $R=2\sqrt{2}$.

4.1. $C\,(2;-3)$, $R=4$.

4.2. $C\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, $R=2$.

4.3. $C\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{1}{2}$.

5. $(x-4)^2+(y-2)^2=17$.

6. $3x-y-10=0$.

7. $(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.

8. $d=1$.

9. $(x-4)^2+(y+1)^2=5$, $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.

10. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

11. $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$.

12. $2x-5y+19=0$.

13. $d=2$.

14. $x+y=3$.

15. $3x-4y+43=0$.

16. $(x-2)^2+y^2=4$.

17. $x^2+(y-9)^2=36$.

§ 1.3. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, *сумма* расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (обычно обозначаемая $2a$) и большая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1\,(-c;0)$ и $F_2\,(c;0)$, то каноническое уравнение эллипса имеет вид

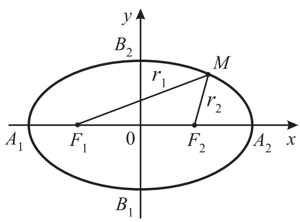


Рис. 1.25.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1.3.1)$$

Здесь a — *большая*, b — *малая полуоси* эллипса. Величины a, b и c связаны соотношением

$$b^2=a^2-c^2. \qquad (1.3.2)$$

Точки $A_1\,(-a;0)$, $A_2\,(a;0)$ и $B_1\,(0;-b)$, $B_2\,(0;b)$ называются *вершинами* эллипса.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}\quad\left(\text{или } \varepsilon=\frac{c}{a}\right). \qquad (1.3.3)$$

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon<1$, т. к. $c<a$.

Эксцентриситет характеризует форму эллипса (меру его сжатия). Чем ближе эксцентриситет эллипса к нулю, тем ближе форма эллипса к окружности.

Расстояния от точки эллипса $M\,(x;y)$ до его фокусов называются *фокальными радиусами* точки M и определяются по формулам:

$$r_1=a+\varepsilon\,x,\quad r_2=a-\varepsilon\,x. \qquad (1.3.4)$$

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy (симметрично относительно начала координат), то уравнение эллипса имеет тот же канонический вид, но в этом случае $b>a$. Условимся буквой a всегда обозначать полуось, расположенную на оси Ox, буквой b — полуось, расположенную на оси Oy, независимо от того, что больше, a или b.

Если $b>a$, то в формуле $b^2=a^2-c^2$ следует поменять местами a и b.

Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $C\,(x_0;y_0)$ имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (1.3.5)$$