Герасимчук В.С.
Васильченко Г.С.
Кравцов В.И.

Курс классической математики в примерах и задачах

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК [512.64+514.12+517](075.8)
ББК 22.161я73
Г 37

Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.И. **Курс классической математики в примерах и задачах.** В 3 т. Т. 3. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 480 с. — ISBN 978-5-9221-1079-2.

Заключительная часть трехтомного издания «Курс классической математики в примерах и задачах», предназначенного для студентов высших технических учебных заведений, охватывает учебный материал курса высшей математики, традиционно соответствующей третьему семестру.

Издание представляет собой руководство по практической части базового курса высшей математики и содержит уникальные по полноте и обстоятельности проработки задач и примеров.

ISBN 978-5-9221-1079-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 13

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 13.1. Построение поверхностей и пространственных форм, ограниченных поверхностями

Приступая к изучению данной темы, следует повторить основные понятия § 3.6. части 1.

Уравнением поверхности в выбранной системе координат $Oxyz$ называется уравнение с тремя переменными $F(x;y;z)=0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки этой поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей ей.

1. Всякое *уравнение 1-й степени* относительно декартовых переменных x, y и z *определяет плоскость* в пространстве, и наоборот, всякая *плоскость определяется уравнением 1-й степени*:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Рассмотрим примеры построения плоскостей.

Пример 13.1. Построить плоскости, заданные в декартовой системе уравнениями:

а) $3x+2y+4z-8=0$, *б*) $2x+z=4$,

в) $y=2x$, *г*) $z=3$.

Решение. *а*). Так как в уравнении присутствуют все три переменные и свободный член D отличен от нуля, то плоскость пересекает все три координатные оси. Найдем точки пересечения плоскости с осями координат.

Положим $y=0$ и $z=0$, тогда $x=8/3$. Получили точку $A(8/3;0;0)$. Аналогично, если $x=0$ и $z=0$, то $y=4$, т. е. имеем точку $B(0;4;0)$; если $x=0$ и $y=0$, то $z=2$. Определили точку $C(0;0;2)$. Через три

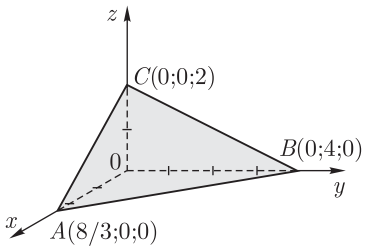

Рис. 13.1

точки в евклидовом пространстве можно провести плоскость и притом только одну (рис. 13.1).

Заметим, что, преобразуя общее уравнение заданной плоскости к *уравнению плоскости в отрезках на осях* (формула (3.6.4), часть 1, [21])

$$\frac{x}{8/3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1,$$

можно сразу определить координаты точек пересечения плоскости с соответствующими координатными осями.

Замечание 1. На рисунке приведена только часть плоскости, заключенная между координатными плоскостями в первом октанте.

Замечание 2. Если в уравнении плоскости отсутствует одна из переменных, то такая плоскость параллельна координатной оси, которая отождествляется с отсутствующей переменной.

б). Коэффициент при переменной y равен 0. Значит, переменная y может принимать произвольные значения. Геометрически это означает, что заданная плоскость параллельна оси Oy.

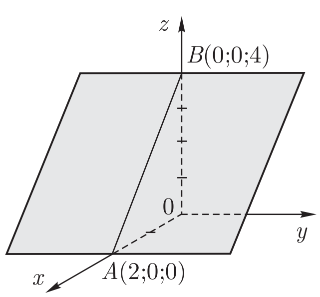

Рис. 13.2

Сначала строим в плоскости xOz $(y=0)$ прямую AB, которая задается тем же уравнением $2x+z=4$. Это «след» искомой плоскости на координатной плоскости xOz.

Затем через точки $A\,(2;0;0)$ и $B\,(0;0;4)$ проводим прямые, параллельные оси Oy, определив таким образом линии пересечения указанной плоскости с координатными плоскостями xOy и yOz (рис. 13.2).

в). В уравнении отсутствует переменная z, значит, данная плоскость параллельна оси Oz. Свободный член уравнения $D=0$. Это свидетельствует о том, что плоскость проходит через начало координат. Следовательно, плоскость проходит через ось Oz.

В плоскости xOy строим прямую по двум точкам $O\,(0;0)$ и $A\,(1;2)$. Это линия пересечения заданной плоскости с координатной плоскостью xOy — след искомой плоскости на координатной плоскости xOy (рис. 13.3, *а*).

Замечание 3. Если в уравнении плоскости отсутствует две переменные, то заданная плоскость параллельна той координатной плоскости, которая отождествляется с отсутствующими переменными.

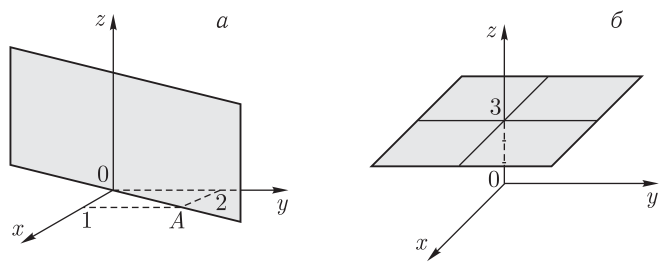

Рис. 13.3

г). В уравнении отсутствуют переменные x и y, значит, данная плоскость параллельна координатной плоскости xOy и отсекает на оси Oz отрезок, равный трем единицам масштаба (рис. 13.3, *б*).

2. *Цилиндрической поверхностью* или просто *цилиндром* называется поверхность, образуемая перемещением прямой l, сохраняющей одно и то же направление и пересекающей данную линию L. Линия L называется *направляющей*, а каждое положение движущейся прямой — *образующей*. Всегда можно выбрать систему координат так, чтобы прямая l совпадала с одной из координатных осей.

Если уравнение с двумя переменными $F(x;y)=0$ определяет в плоскости xOy некоторую линию L, то в пространстве это же уравнение определяет цилиндрическую поверхность. Направляющей служит линия L, определяемая системой уравнений:

$$\begin{cases} F(x;y)=0, \\ z=0\,, \end{cases}$$

образующие параллельны оси Oz (рис. 13.4).

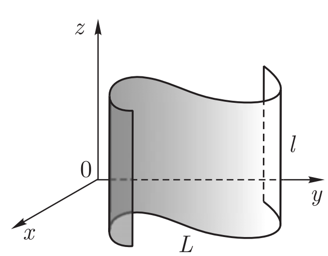

Рис. 13.4

Если направляющей является окружность, то цилиндр называется *круговым*, если эллипс — *эллиптическим*, парабола — *параболическим*, гипербола — *гиперболическим*.

Плоскость — частный случай цилиндрической поверхности. Здесь направляющей служит прямая линия.

Аналогично уравнение $F(x;z)=0$, не содержащее переменной y, и уравнение $F(y;z)=0$, не содержащее переменной x, определяют в пространстве цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям Oy и Ox.

Построение цилиндрической поверхности начинают с построения направляющей в соответствующей координатной плоскости.

Пример 13.2. Построить поверхности:
а) $x^2+y^2=4$, *б*) $z=x^2$.

Решение. *а*). На плоскости xOy данное уравнение определяет окружность с центром в начале координат и радиусом $R=2$. В пространстве это уравнение определяет круговой цилиндр с образующими, параллельными оси Oz (рис. 13.5, *а*).

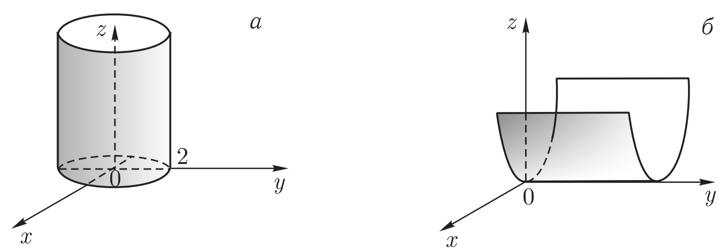

Рис. 13.5

Замечание 4. Как и в случае с плоскостью, на рисунках приведена только часть цилиндрических поверхностей, заключенная между параллельными сечениями.

б). Так как в данном уравнении отсутствует переменная y, то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy. Направляющей является парабола $z=x^2$, лежащая в плоскости xOz (рис. 13.5, *б*).

Пример 13.3. Построить тело, ограниченное поверхностями $z=0$, $x^2=2y$ и $y+z=2$ (цилиндрический отрезок).

Решение. Сначала строим параболический цилиндр $x^2 = 2y$, образующие которого параллельны оси Oz, а направляющей служит парабола $x^2 = 2y$.

Затем строим плоскость $y + z = 2$, параллельную оси Ox и отсекающую на осях Oy и Oz отрезки, равные двум единицам масштаба. Плоскость $z = 0$ совпадает с координатной плоскостью xOy.

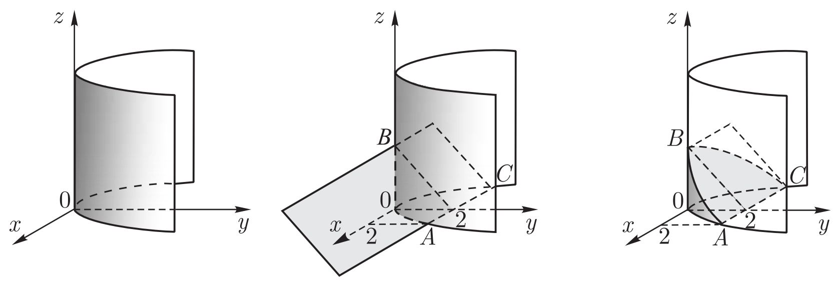

Рис. 13.6

В основании данного тела лежит параболический сектор AOC. Чтобы построить линию пересечения цилиндра $x^2 = 2y$ и плоскости $y+z=2$, соединим плавной кривой их общие точки A, B и C (рис. 13.6).

3. *Сфера*. Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ в пространстве определяет сферу с центром в точке $C\,(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R. Если центр сферы совпадает с началом координат, то уравнение сферы имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Пример 13.4. Построить линию пересечения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ и $y = 3$.

Решение. Первое уравнение определяет сферу с центром в начале координат и радиусом $R = 5$, второе уравнение — плоскость, параллельную координатной плоскости xOz.

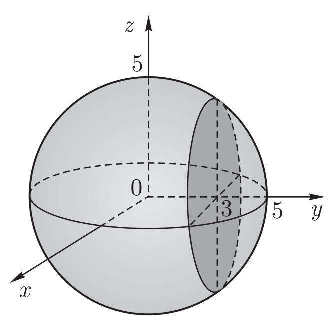

Рис. 13.7

Линией пересечения данных поверхностей является окружность (рис. 13.7), которая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ y=3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+z^2=16, \\ y=3. \end{cases}$$

Радиус этой окружности $r=4$, центр лежит в точке $C\,(0;3;0)$.

4. *Канонические уравнения поверхностей второго порядка.* Метод параллельных сечений.

Если уравнение второго порядка $F(x;y;z)=0$ содержит все три переменные, то соответствующую поверхность можно построить методом параллельных сечений. Суть метода состоит в том, что поверхность рассекают координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным, а затем по виду и свойствам получаемых в сечениях линий делают вывод о форме и свойствах самой поверхности.

Пример 13.5. Построить поверхность $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Заметим, что уравнение четно относительно переменных x и y, значит, ось Oz является осью симметрии данной поверхности (при этом $z \geqslant 0$), а координатные плоскости $x=0$ и $y=0$ — плоскостями симметрии.

Исследование линий пересечения рассматриваемой поверхности с координатными плоскостями проведем в несколько этапов.

1). Определим линии пересечения поверхности с координатной плоскостью yOz, т. е. $x=0$:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}\,, \\ x=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=|y|, \\ x=0\,. \end{cases}$$

Получили две прямые $z=y$ и $z=-y$. Строим прямые OA и OA' в плоскости yOz.

2). Аналогично, пересечение данной поверхности с координатной плоскостью xOz, т. е. $y=0$, определяет еще две прямые $\begin{cases} z=\pm x, \\ y=0 \end{cases}$ (прямые OB и OB').

3). Плоскость $z=0$ пересекает данную поверхность в единственной точке $O\,(0;0;0)$.

4). В сечении поверхности плоскостью $z = a = \text{const} > 0$ получаем окружность радиуса a:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \\ z = a\,. \end{cases}$$

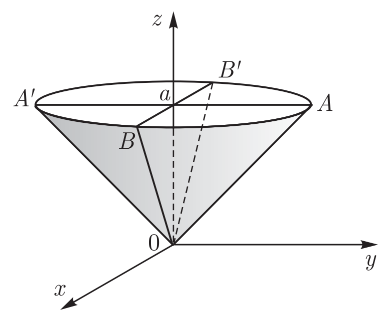

Рис. 13.8

С учетом симметрии, а также по линиям, полученным в сечениях поверхности плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = a$, заключаем, что поверхность, заданная уравнением $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, есть *круговой конус*.

Точнее, верхняя половина конуса (рис. 13.8), определяемого уравнением $z^2 = x^2 + y^2$. Вторая половина (полость) *конической поверхности* $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ расположена под плоскостью xOy.

Пример 13.6. Построить тело, ограниченное поверхностью $y = 3 - x^2 - z^2$ и координатной плоскостью $y = 0$.

Решение. Уравнение четно относительно переменных x и z, значит, осью симметрии поверхности является ось Oy, а плоскостями симметрии — координатные плоскости $x = 0$ и $z = 0$.

1). Определим линию пересечения поверхности $y = 3 - x^2 - z^2$ с координатной плоскостью $x = 0$:

$$\begin{cases} y = 3 - x^2 - z^2, \\ x = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 3 - z^2, \\ x = 0\,. \end{cases}$$

В плоскости yOz получили параболу, вершина которой лежит в точке $B\,(0; 3; 0)$. Парабола пересекает ось Oz в точках $A\bigl(0; 0; \sqrt{3}\,\bigr)$ и $C\bigl(0; 0; -\sqrt{3}\,\bigr)$.

2). Аналогично найдем линию пересечения данной поверхности с координатной плоскостью $z = 0$:

$$\begin{cases} y = 3 - x^2 - z^2, \\ z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 3 - x^2, \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Получаем уравнение параболы, которая лежит в плоскости xOy и проходит через точки $M\bigl(-\sqrt{3}\,; 0; 0\bigr)$, $N\bigl(\sqrt{3}\,; 0; 0\bigr)$ и $B\bigl(0; 3; 0\bigr)$.

3). В сечении плоскостью $y = 0$, перпендикулярной оси симметрии, получаем окружность

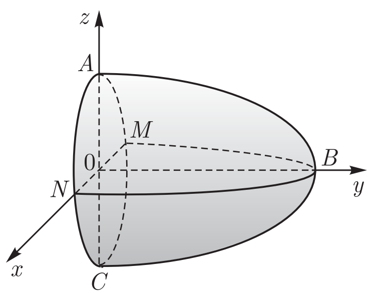

Рис. 13.9

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 3, \\ y = 0\,. \end{cases}$$

Таким образом, в двух сечениях имеем подобные параболы, а в третьем сечении — окружность.

По результатам исследования строим поверхность (рис. 13.9). Полученная поверхность называется *параболоидом вращения*.

Если в сечении параболоида плоскостью, перпендикулярной его оси симметрии, получается эллипс, то такой параболоид называется *эллиптическим*.

Пример 13.7. Построить поверхности:

а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$; *б*) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0$;

в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; *г*) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0$.

Р е ш е н и е. *а*). Левая часть данного уравнения распадается на произведение двух линейных множителей

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Следовательно, оно определяет пару плоскостей $y = \dfrac{b}{a}\,x$ и $y = -\dfrac{b}{a}\,x$, пересекающихся по оси Oz (рис. 13.10, *а*).

б). Преобразуем заданное уравнение к виду

$$x^2 + \left(y^2 + 4y + 4\right) + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4.$$

Получили уравнение *сферы* с центром в точке $C\,(0; -2; 0)$ и радиусом $R = 2$ (рис. 13.10, *б*).

в). Заметим, что плоскости xOy, yOz и xOz служат плоскостями симметрии, координатные оси — осями симметрии, а начало координат — центром симметрии.

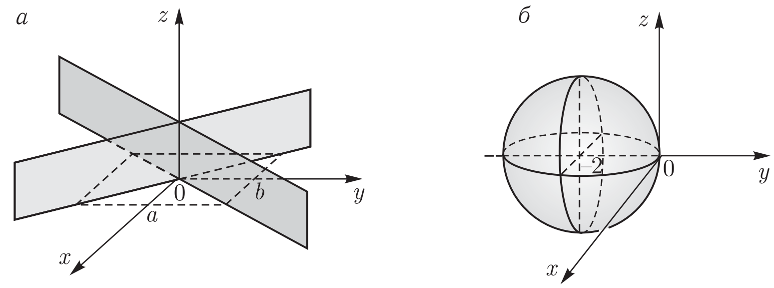

Рис. 13.10

Для построения поверхности применим метод параллельных сечений. Последовательно находим:

$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

в плоскости yOz имеем эллипс, полуоси которого равны b и c;

$$(2)\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

в плоскости xOz получили эллипс с полуосями a и c;

$$(3)\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

в плоскости xOy имеем эллипс, полуоси которого равны a и b.

Полученная поверхность называется *трехосным эллипсоидом* (рис. 13.11).

Если две из его полуосей равны, например, $a = b$, то в сечении эллипсоида плоскостями $z = h$, $|h| < c$ получаются окружности. Такая поверхность может быть образована вращением эллипса (1) или (2) вокруг оси Oz. Поэтому ее называют *эллипсоидом вращения*.

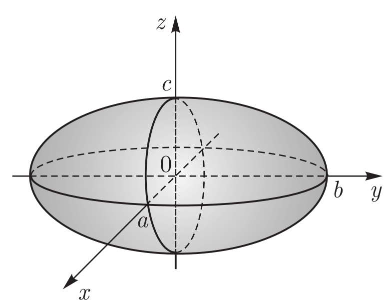

Рис. 13.11

Если же все три полуоси равны между собой, то эллипсоид вырождается в *сферу*.

г) Дополнив выражение слева до полных квадратов, получим

$$x^2 + 2(y-1)^2 + 2(z+1)^2 = 0.$$

Это равенство справедливо только при $x = 0$, $y = 1$ и $z = -1$. Значит, данному уравнению соответствует единственная точка $A(0; 1; -1)$.

Пример 13.8. Построить тело, ограниченное поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$.

Решение. Уравнения $y = \sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{x}$ определяют в плоскости xOy ветви парабол OB и OC, так как $y \geqslant 0$. Значит, уравнение $y = \sqrt{x}$ определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Направляющей цилиндра является одна ветвь параболы.

Уравнение $y = 2\sqrt{x}$ определяет аналогичный цилиндр, но «шире» первого. Имеем, таким образом, два «вложенных» друг в друга параболических цилиндра.

Уравнение $x + z = 6$ задает плоскость, параллельную оси Oy; $z = 0$ — уравнение координатной плоскости xOy.

Находим общие точки параболических цилиндров и плоскости $x + z = 6$. Это точки A, B и C. Соединяя их плавными кривыми, получаем пространственную форму $AOBC$ (рис. 13.12).

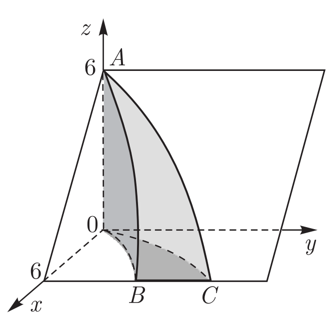

Рис. 13.12

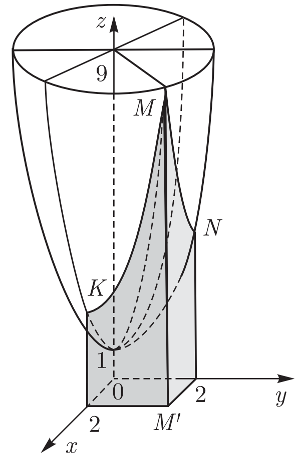

Рис. 13.13

Пример 13.9. Построить тело, ограниченное поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1 + x^2 + y^2$, $x = 2$, $y = 2$.

Решение. Здесь $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ — уравнения координатных плоскостей. Плоскости $x = 2$ и $y = 2$ пересекаются по прямой $M'M$, параллельной оси Oz.

Уравнение $z = 1 + x^2 + y^2$ определяет *параболоид вращения*, симметричный относительно оси Oz, вершина которого приподнята на одну единицу масштаба. Чтобы найти точку пересечения прямой $M'M$ с параболоидом, следует подставить в уравнение параболоида значения $x = 2$ и $y = 2$. Получаем $z = 9$. Построим точку $M\,(2; 2; 9)$.

Вертикальная прямая $x = 2$, $y = 0$ пересекает параболоид в точке $K\,(2; 0; 5)$, а прямая $y = 2$, $x = 0$ — в точке $N\,(0; 2; 5)$. Соединяя плавными кривыми точки K и M, M и N, найдем линии пересечения параболоида с плоскостями $x = 2$ и $y = 2$.

Пространственная форма, ограниченная заданными поверхностями, приведена на рис. 13.13.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое уравнение определяет *поверхность* в пространстве?
2. Уравнение какого порядка определяет *плоскость* в пространстве?
3. Как расположена плоскость $Ax + By + Cz = 0$ в пространстве?
4. Указать особенность расположения плоскости, если описывающее ее уравнение содержит только две переменные? содержит всего одну переменную?
5. В чем заключается *метод параллельных сечений* построения поверхностей?
6. Каково различие между *трехосным эллипсоидом* и *эллипсоидом вращения*?
7. Каково различие между *эллиптическим параболоидом* и *параболоидом вращения*?
8. Есть ли различие между *эллипсоидом вращения* и *параболоидом вращения*? Чем похожи эти поверхности?
9. Перечислить основные *поверхности 2-го порядка* и привести их уравнения.

10. Какой геометрический образ задает уравнение $y^2 = 2px$:
а) на плоскости xOy; *б*) в пространстве?
11. Составить *уравнение сферы* с центром в точке $C(-1;2;3)$ и радиусом $R = 2$.
12. Составить *уравнение кругового конуса* с вершиной в начале координат, осью симметрии которого служит ось Ox.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Какие поверхности определяют в пространстве уравнения:

1.1. $x + 2z = 1$; **1.2.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

1.3. $y = 2$; **1.4.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

1.5. $z = 3x$; **1.6.** $x = z^2 + 2y^2$;

1.7. $x^2 - 4y^2 = 0$; **1.8.** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$;

1.9. $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$; **1.10.** $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

1.11. $x - 3y + 2z = 6$;

1.12. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 8 = 0$?

2. Какие геометрические образы определяют следующие системы уравнений:

2.1. $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}, \\ x - y = 0; \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ y = 5; \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$

3. Построить тела, ограниченные поверхностями:

3.1. $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$;

3.2. $2z = x^2 + y^2$, $y + z = 4$;

3.3. $x^2 + y^2 = 4x$, $z = x$, $z = 2x$;

3.4. $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

3.5. $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$;

3.6. $z = 4 - y^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $z = 0$;

3.7. $z = \dfrac{y^2}{2}$, $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$, $z = 0$.

3.8. $z = \frac{1}{2}y^2 + x^2$, $x + y = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

3.9. $y = x^2$, $z = 1 - y$, $z = 0$;

3.10. $z = x^2 + 3y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

3.11. $x = \sqrt{2y}$, $z = x$, $x + y = 4$, $z = 0$.

ОТВЕТЫ

1.1. Плоскость, параллельная оси Oy.

1.2. Сфера с центром в начале координат и радиусом $R = 3$.

1.3. Плоскость, параллельная координатной плоскости xOz.

1.4. Эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

1.5. Плоскость, проходящая через ось Oy.

1.6. Параболоид, симметричный относительно оси Ox.

1.7. Пара плоскостей $x = \pm 2y$, проходящих через ось Oz.

1.8. Конус с вершиной в начале координат, осью симметрии которого служит ось Oy.

1.9. Круговой цилиндр $(x-2)^2 + (z-2)^2 = 4$ с образующими, параллельными оси Oy.

1.10. Точка $O\,(0; 0; 0)$.

1.11. Плоскость, пересекающая все три координатные оси.

1.12. Сфера с центром в точке $C\,(1; -4; 0)$ и радиусом $R = 5$.

2.1. Парабола, расположенная в плоскости $x - y = 0$, вершина в начале координат, ось параболы совпадает с осью Oz.

2.2. Гипербола в плоскости $x = 2$, центр гиперболы в точке $C\,(2; 0; 0)$, действительная ось равна 6, параллельна оси Oy; мнимая ось равна 4, параллельна оси Oz.

2.3. Данная система не представляет никакого геометрического образа, так как плоскость $y = 5$ не пересекает сферу.

2.4. Окружность в плоскости $z = 1$, радиус окружности $r = \sqrt{3}$, центр лежит в точке $C\,(0; 0; 1)$.

§ 13.2. Двойной интеграл. Вычисление в декартовой системе координат

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy. Разобьем область D произвольными линиями на n элементарных областей, имеющих площади ΔS_1, ΔS_2,…, ΔS_n. В каждой элементарной области выберем произвольную точку $P_i\,(x_i; y_i)$ и умножим значение функции $f\,(P_i)$ в каждой из этих точек на площадь соответствующей элементарной области.

Интегральной суммой для функции $f(x; y)$ по области D называется сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_i; y_i)\,\Delta S_i = f\,(x_1; y_1)\;\Delta S_1 + f\,(x_2; y_2)\;\Delta S_2 + ... + f\,(x_n; y_n)\;\Delta S_n. \quad (*)$$

Двойным интегралом от функции $f(x; y)$ по области D называется предел интегральной суммы $(*)$, если наибольший из диаметров d_i элементарных областей стремится к нулю:

$$\iint\limits_D f(x; y)\,dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i; y_i)\,\Delta S_i.$$

Этот предел не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные области ΔS_i, ни от выбора точек $P_i\,(x_i; y_i)$ внутри них.

Если область D разбивать на элементарные области прямыми, параллельными осям координат, то площадь одной элементарной области находится как площадь прямоугольника со сторонами dx и dy:

$$dS = dx\,dy.$$

Поэтому *двойной интеграл в декартовой системе координат* записывают в виде:

$$\iint\limits_D f(x; y)\,dS = \iint\limits_D f(x; y)\,dx\,dy.$$

Основные свойства двойного интеграла:

1. Двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных в области D функций равен алгебраической сумме двойных интегралов по области D от каждой из этих функций:

$$\iint\limits_D \left[f_1(x; y) \pm f_2\,(x; y) \pm \ldots \pm f_n(x; y)\right]\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D f_1(x; y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_D f_2(x; y)\,dx\,dy \pm \ldots \pm \iint\limits_D f_n(x; y)\,dx\,dy.$$

2. Постоянный множитель A можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint\limits_D Af(x;y)\ dx\,dy = A\iint\limits_D f(x;y)\ dx\,dy.$$

3. Если область D представляет собой сумму конечного числа областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (без общих внутренних точек), а функция $f(x;y)$ непрерывна внутри каждой из них, то

$$\iint\limits_D f(x;y)\ dx\,dy = \\ = \iint\limits_{D_1} f(x;y)\ dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)\ dx\,dy + \ldots + \iint\limits_{D_n} f(x;y)\ dx\,dy.$$

Вычисление двойного интеграла. Область интегрирования D называется *правильной относительно оси Oy*, если она ограничена снизу линией $y = \varphi_1(x)$, сверху — линией $y = \varphi_2(x)$ (функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывны) и с обеих сторон отрезками прямых $x = a$ и $x = b$; в частных случаях один из этих отрезков (или оба) могут стягиваться в точку. При этом всякая прямая, проведенная внутри отрезка $[a;b]$ параллельно оси Oy, пересекает границу области только в двух точках.

В этом случае область D может быть задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$ и $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ (рис. 13.14, *a*). Вычисление двойного интеграла по такой области сводится к вычислению *двукратного* (*повторного*) интеграла:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy,$$

где интегрирование выполняется сначала по переменной y в пределах от $y = \varphi_1(x)$ до $y = \varphi_2(x)$ при фиксированном значении x из отрезка $[a;b]$

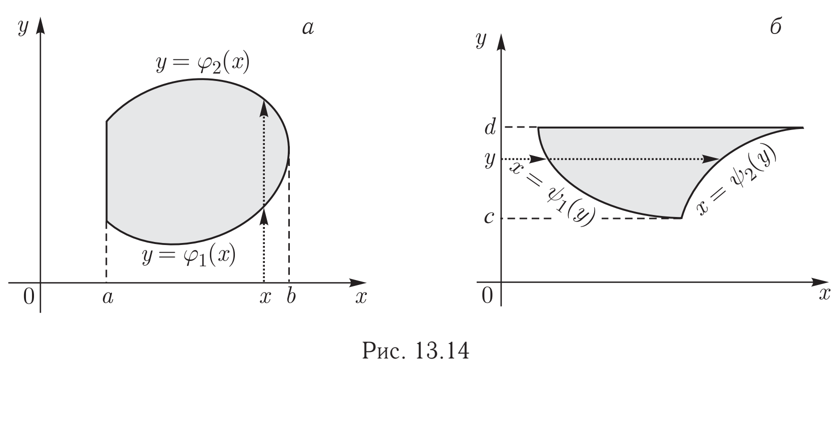

Рис. 13.14

(«*внутреннее интегрирование*»). В результате получается некоторая функция $\Phi(x)$, которая интегрируется затем по переменной $x \in [a; b]$ («*внешнее интегрирование*»).

Аналогично, область, приведенная на рис. 13.14, *б*, является *правильной относительно оси Ox*. Она ограничена слева линией $x = \psi_1(y)$, справа — линией $x = \psi_2(y)$ (функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны), снизу и сверху отрезками прямых $y = c$ и $y = d$, которые в частном случае могут стягиваться в точку. Всякая прямая, проведенная внутри отрезка $[c; d]$ параллельно оси Ox, пересекает границу области только в двух точках.

В этом случае область D можно задать неравенствами $c \leqslant y \leqslant d$ и $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$, а двойной интеграл по такой области сводится к двукратному по формуле:

$$\iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x; y)\, dx.$$

Здесь интегрирование выполняется в другой последовательности: сначала по переменной x в пределах от $x = \psi_1(y)$ до $x = \psi_2(y)$ при $y = \mathrm{const}$ («внутреннее интегрирование»), затем по переменной y в пределах от $y = c$ до $y = d$ («внешнее интегрирование»).

Если функция $f\,(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D, а область D является правильной как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy, то значение двукратного интеграла, взятого по данной области, *не зависит от порядка интегрирования*:

$$\iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x; y)\, dx.$$

Если область D не является правильной, то чтобы перейти от двойного интеграла к двукратному, достаточно разбить эту область на конечное число правильных областей D_1, D_2, ..., D_n и воспользоваться свойством 3.

Пределы интегрирования:

— во *внешнем* интеграле **всегда** *постоянны*;

— во *внутреннем* интеграле, в общем случае, *являются функциями* той переменной, по которой предстоит интегрирование во внешнем интеграле.

— во *внутреннем* интеграле *постоянны* **только** в том случае, если область интегрирования представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

Аналогичные определения и формулы могут быть получены и тогда, когда область D лежит либо в плоскости xOz, либо в плоскости yOz. Например, если функция $y = f(x; z)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой и правильной относительно оси Ox области D', лежащей в плоскости xOz, то

$$\iint\limits_{D'} f(x; z)\, dx\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\chi_1(x)}^{\chi_2(x)} f(x; z)\, dz,$$

и т. д.

Пример 13.10. Вычислить $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy$, если $0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$.

Решение. Область интегрирования — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Запишем сначала двукратный интеграл в виде

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\, dy.$$

Вычислим внутренний интеграл по переменной y, считая $x = \text{const}$, и сведем двукратный интеграл к определенному:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \\ = \int\limits_0^2 x^2 dx \left(\operatorname{arctg} y \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{4} \int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Интегрируя в другом порядке — сначала по переменной x, а затем по y, получим тот же результат:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 \frac{x^2}{1+y^2}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \int\limits_0^2 x^2 dx = \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \\ = \frac{8}{3} \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{8}{3} \operatorname{arctg} y \big|_0^1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}.$$

Замечание 1. Особенно просто вычисляется двукратный интеграл с постоянными пределами интегрирования в том случае, если подынтегральная функция представляет собой произведение сомножителей, каждый из которых зависит только от одной переменной интегрирования.

В этом случае понятия «внутреннего» и «внешнего» интегрирования теряют смысл, поскольку такой двукратный интеграл распадается на произведение двух определенных интегралов.

В связи с этим приведем третий, наиболее простой способ решения примера 1.

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy = \int_0^2 x^2 dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 \cdot \operatorname{arctg}\, y\big|_0^1 = \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}.$$

Пример 13.11. Вычислить двукратные интегралы:

$$a)\ J_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx \int_0^a y\,dy; \qquad б)\ J_2 = \int_{-1}^2 dx \int_0^3 \left(x^2+2xy\right)\,dy.$$

Р е ш е н и е. *а*). Пределы интегрирования в двукратном интеграле постоянны, при этом каждый из интегралов зависит только от одной переменной, поэтому

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx \int_0^a y\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \cdot \int_0^a y\,dy =$$
$$= \left.\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\right|_0^{2\pi} \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}.$$

б). Сначала вычислим внутренний интеграл, где y является переменной величиной, а x — постоянной:

$$\int_0^3 \left(x^2+2xy\right)\,dy = x^2\int_0^3 dy + 2x\int_0^3 y dy = x^2\cdot y\,\big|_0^3 + 2x\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^3 = 3x^2+9x.$$

Затем вычислим внешний интеграл — полученную функцию одной переменной $\Phi(x) = 3x^2+9x$ интегрируем по x:

$$J_2 = \int_{-1}^2 \left(3x^2+9x\right)\,dx = \left.\left(x^3+9\,\frac{x^2}{2}\right)\right|_{-1}^2 = 8+18+1-4{,}5 = 22{,}5.$$

Обычно вычисление внутреннего интеграла не выполняют отдельно, а все выкладки записывают одной строкой:

$$J_2 = \int_{-1}^2 dx\,\left.\left(x^2y+2x\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^3 = \int_{-1}^2 \left(3x^2+9x\right)\,dx = \left.\left(x^3+9\frac{x^2}{2}\right)\right|_{-1}^2 = 22{,}5.$$

Такой формой записи и будем пользоваться в дальнейшем.

Пример 13.12. Вычислить $\iint\limits_D \dfrac{dx\,dz}{(x+z)^2}$, где область D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x=3$, $x=4$, $z=1$, $z=2$.

Решение. Запишем соответствующий двукратный интеграл с внешним интегрированием по x:

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dz}{(x+z)^2} = \int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dz}{(x+z)^2}.$$

Сначала вычисляем внутренний интеграл по переменной z, считая x постоянной, затем полученную функцию интегрируем по x на отрезке $[3;4]$:

$$\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dz}{(x+z)^2} = \int\limits_3^4 dx \cdot \frac{-1}{(x+z)}\Bigg|_1^2 = -\int\limits_3^4 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= (-\ln|x+2| + \ln|x+1|)\,|_3^4 = -\ln 6 + \ln 5 + \ln 5 - \ln 4 = \ln\frac{25}{24}.$$

Рекомендуем получить этот результат, изменив порядок интегрирования.

Пример 13.13. При неаккуратном вытирании доски на ней сохранилась такая запись: $\int\limits_0^1 \int\limits_{2x}^{3x}$. Требуется восстановить область интегрирования D и указать, по какой переменной вычислялся внутренний интеграл.

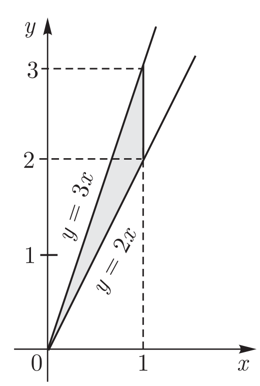

Рис. 13.15

Решение. Во внутреннем интеграле пределы интегрирования являются функциями от x, значит, интегрирование ведется по другой переменной, обозначим ее y. Внешний интеграл в таком случае вычисляется по переменной x. Следовательно, на доске был записан двукратный интеграл

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x;y)\,dy.$$

Отсюда следует, что область интегрирования D ограничена линиями:

$$x=0,\quad x=1,\quad y=2x,\quad y=3x,$$

т. е. она заключена в полосе между прямыми $x = 0$ и $x = 1$. Ее нижней границей служит отрезок прямой $y = 2x$, а верхней — отрезок прямой $y = 3x$ (рис. 13.15).

Пример 13.14. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $(x > 0)$.

Решение. Решение примеров такого рода рекомендуется начинать с построения области интегрирования D.

Первый способ. Сведем заданный интеграл к двукратному интегралу вида

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy,$$

где внешнее интегрирование осуществляется по переменной x, а внутреннее — по переменной y.

Сначала расставим пределы во внутреннем интеграле. Для этого через область D условно проведем несколько прямых, параллельных оси Oy (на рис. 13.16 — пунктирные прямые со стрелками). Все они «входят» в область D на параболе $y = x^2$. Значит, функция $\varphi_1(x) = x^2$ является нижним пределом внутреннего интеграла.

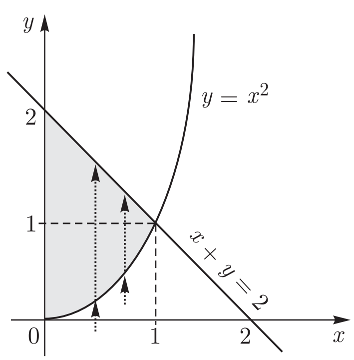

Рис. 13.16

«Выходят» же эти прямые из области D на прямой $x + y = 2$. Выразим y из этого уравнения: $y = 2 - x$. Функция $\varphi_2(x) = 2 - x$ служит верхним пределом внутреннего интеграла.

Теперь спроектируем область D на ось Ox. Получается отрезок $[0;1]$. Тем самым найдены пределы изменения переменной x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ во внешнем интеграле. Таким образом, двойной интеграл по заданной области D сводится к следующему двукратному:

$$\iint\limits_D f(x;y)dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x;y)dy.$$

Второй способ. Сведем заданный интеграл к двукратному интегралу вида

$$\int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,dx.$$

Здесь внешнее интегрирование осуществляется по переменной y, а внутреннее — по переменной x.

В этом случае через область D условно проведем прямые, параллельные оси Ox. Все они «входят» в область D на одной прямой (оси Oy), а «выходят» на разных линиях: на прямой $x+y=2$ и на параболе $y=x^2$ (рис. 13.17). Таким образом, область не является правильной относительно оси Ox.

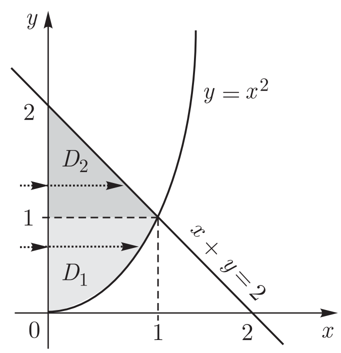

Рис. 13.17

Значит, область D нужно разбить отрезком прямой $y=1$ на две области D_1 и D_2, каждая из которых является правильной относительно оси Ox. Это означает, что, опираясь на свойство 3, двойной интеграл по заданной области D следует представить в виде суммы интегралов по областям D_1 и D_2 и каждый из них свести к двукратному. Процедуру расстановки пределов следует выполнить для каждого из них в отдельности.

Область D_1 ограничена слева прямой $x=0$, а справа — ветвью параболы $x=\sqrt{y}$ (из уравнения $y=x^2$ выразили $x=\pm\sqrt{y}$, причем определена только правая ветвь параболы). Значит, $x=0$ и $x=\sqrt{y}$ являются соответственно нижним и верхним пределами внутреннего интеграла.

Проекция области D_1 на ось Oy — отрезок $[0;1]$. Значит, пределы внешнего интеграла $y=0$ и $y=1$.

Область D_2 слева также ограничена прямой $x=0$, а справа — прямой $x+y=2$. Разрешая это уравнение относительно переменной x, найдем верхний предел внутреннего интеграла: $x=2-y$.

Проекция области D_2 на ось Oy — отрезок $[1;2]$. Значит, $1\leqslant y\leqslant 2$.

Следовательно, при таком порядке интегрирования двойной интеграл по области D сводится к сумме двукратных интегралов по областям D_1 и D_2:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x;y)\; dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)\; dx\,.$$

Замечание 2. Как видим, первый вариант решения существенно проще второго. Оказывается порядок интегрирования в двукратном интеграле, допускающий два варианта перестановок, имеет значение. Это обстоятельство следует учитывать, выбирая в каждом конкретном случае более простой вариант решения.

Пример 13.15. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле

$$\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x;y)\; dx.$$

Решение. Решение подобных примеров следует начинать с восстановления области D по заданным пределам интегрирования.

Область D заключена между горизонтальными прямыми $y=0$ и $y=4$. Так как внутренний интеграл берется по переменной x, то уравнение левой границы области $x=0$, а правой — $x=\sqrt{25-y^2}$. Последнее уравнение описывает правую половину окружности $x^2+y^2=25$ с центром в начале координат и радиусом $R=5$ (рис. 13.18).

Теперь поменяем порядок интегрирования в заданном интеграле. Иначе, требуется расставить пределы интегрирования в двукратном интеграле

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy,$$

взятому по области D.

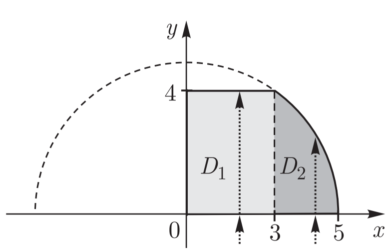

Рис. 13.18

Начиная с внутреннего интеграла, условно проведем через область D прямые, параллельные оси Oy. Легко видеть, что «на выходе» из области D прямые пересекают разные линии: прямую и окружность. Значит, область D следует разбить на области D_1 и D_2 и представить искомый интеграл в виде суммы двух интегралов (см. свойство 3).

Найдем абсциссу точки пересечения окружности и прямой $y = 4$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = 4, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

Прямая $x = 3$ делит область D надлежащим образом на области D_1 и D_2. Расставим пределы в двукратных интегралах по каждой из этих областей.

Область D_1 представляет собой прямоугольник: $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 4$. Значит, пределы как внешнего, так и внутреннего интегралов по этой области будут постоянны:

$$\iint\limits_{D_1} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^4 f(x;y)\,dy.$$

В область D_2 прямые, параллельные оси Oy, «входят» на оси абсцисс $y = 0$, а «выходят» на окружности $x^2 + y^2 = 25$. Разрешая это уравнение относительно переменной y, найдем $y = \sqrt{25 - x^2}$. Значит, $y = 0$ и $y = \sqrt{25 - x^2}$ — соответственно нижний и верхний пределы внутреннего интеграла.

Проектируя область D_2 на ось Ox, получаем отрезок $[3; 5]$, который и определяет пределы внешнего интегрирования. Таким образом,

$$\iint\limits_{D_2} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_3^5 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)\,dy.$$

Объединяя результаты, полученные для областей D_1 и D_2, запишем двукратный интеграл по области D, который отличается от заданного порядком интегрирования:

$$\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{25-y^2}} f\,(x;y)\ dx = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^4 f\,(x;y)\ dy + \int\limits_3^5 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f\,(x;y)\ dy.$$

Пример 13.16. Изменить порядок интегрирования в двукратных интегралах:

$$а)\ \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x}^{2x+3} f(x;y)\,dy, \qquad б)\ \int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x;y)\,dy.$$

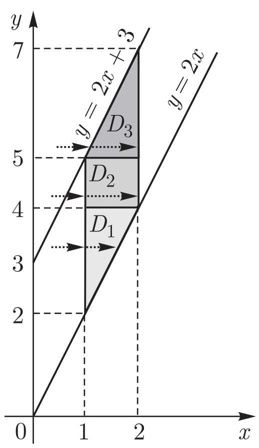

Рис. 13.19

Р е ш е н и е. *а*). Запишем уравнения границ области D: $x = 1$, $x = 2$, $y = 2x$, $y = 2x + 3$. Область D представляет собой параллелограмм.

Для того чтобы изменить порядок интегрирования, как видно из рис. 13.19, следует разбить область D на три области:

$$D_1:\ 2 \leqslant y \leqslant 4,\quad 1 \leqslant x \leqslant \frac{y}{2};$$
$$D_2:\ 4 \leqslant y \leqslant 5,\quad 1 \leqslant x \leqslant 2;$$
$$D_3:\ 5 \leqslant y \leqslant 7,\quad \frac{y-3}{2} \leqslant x \leqslant 2.$$

Расставляя пределы интегрирования в двукратных интегралах последовательно по областям D_1, D_2 и D_3, получаем

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x}^{2x+3} f(x;y)\,dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^{\frac{y}{2}} f(x;y)\,dx + \int\limits_4^5 dy \int\limits_1^2 f(x;y)\,dx + \int\limits_5^7 dy \int\limits_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x;y)\,dx.$$

б). Запишем уравнения границ области D: $x = 0$, $x = 2a$, $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $y = \sqrt{2ax}$. Чтобы определить вид кривой $y = \sqrt{2ax - x^2}$, преобразуем уравнение к виду

$$y^2 + x^2 - 2ax = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Получили уравнение окружности с центром в точке $C\,(a;0)$ и радиусом $R = a$.

Уравнение $y = \sqrt{2ax}$ определяет одну ветвь параболы $y^2 = 2ax$, где $y \geqslant 0$. Таким образом, область D ограничена снизу верхней половиной окружности, а сверху — дугой параболы. Строим область D (рис. 13.20).

Чтобы изменить порядок интегрирования в этом случае, область D, как видно из рисунка, придется также разбить на три области.

Предварительно выразим x из уравнений параболы и окружности

$$x = \frac{y^2}{2a}; \quad x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}\,.$$

Левая четверть окружности описывается уравнением $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$, правая — $x = a + \sqrt{a^2 - y^2}$.

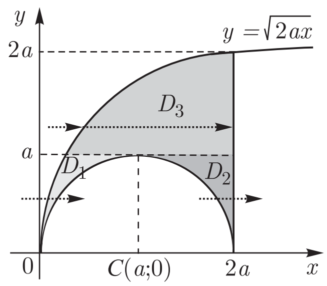

Рис. 13.20

Области разбиения определяются следующими неравенствами:

$$D_1:\ \ 0 \leqslant y \leqslant a, \quad \frac{y^2}{2a} \leqslant x \leqslant a - \sqrt{a^2 - y^2}\,;$$
$$D_2:\ \ 0 \leqslant y \leqslant a, \quad a + \sqrt{a^2 - y^2} \leqslant x \leqslant 2a;$$
$$D_3:\ \ a \leqslant y \leqslant 2a, \quad \frac{y^2}{2a} \leqslant x \leqslant 2a.$$

Учитывая пределы изменения переменных в каждой области, получаем

$$\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x;y)dy = \int\limits_0^{a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x;y)dx +$$
$$+ \int\limits_0^{a} dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f\,(x;y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f\,(x;y)\,dx.$$

Пример 13.17. Изменить порядок интегрирования в следующей сумме двукратных интегралов:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^3} f(x;y)\ dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{10-x} f(x;y)\ dy + \int\limits_4^7 dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f(x;y)\ dy.$$

Решение. Обозначим области интегрирования соответственно D_1, D_2 и D_3. Запишем уравнения линий, ограничивающих данные области:

$$\begin{array}{llll} D_1: & y = 0, & y = x^3, & \text{если}\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ D_2: & y = 0, & y = 10 - x, & \text{если}\ \ 2 \leqslant x \leqslant 4; \\ D_3: & y = x - 4, & y = 10 - x, & \text{если}\ \ \leqslant x \leqslant 7. \end{array}$$

Построив области D_1, D_2 и D_3, получаем область $D = D_1 + D_2 + D_3$.

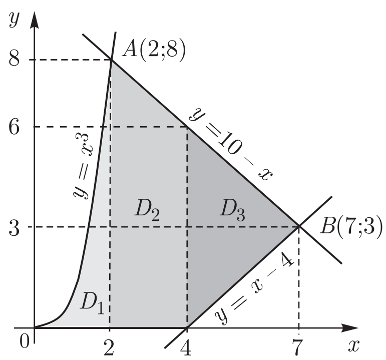

Рис. 13.21

Следовательно, надлежит расставить пределы интегрирования в двукратном интеграле вида

$$\int dy \int f(x;y)\,dx,$$

взятому по области D (рис. 13.21).

Легко видеть, что таких интегралов должно быть два (прямая $y=3$ делит область D на две правильные относительно оси Ox области). Значит,

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^3} f\,(x;y)\;\;dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{10-x} f\,(x;y)\;\;dy + \int\limits_4^7 dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f\,(x;y)\;\;dy =$$

$$= \int\limits_0^3 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{y+4} f\,(x;y)\;\;dx + \int\limits_3^8 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{10-y} f\,(x;y)\;\;dx.$$

Пример 13.18. Вычислить $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y=x$, $y=\pi$, $x=0$.

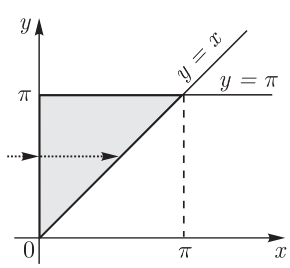

Рис. 13.22

Р е ш е н и е. Область D представляет собой равнобедренный треугольник и является правильной относительно обеих осей координат (рис. 13.22). Поэтому порядок интегрирования здесь роли не играет.

Если внутренний интеграл взять по переменной x, а внешний — по y, то получим

$$\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^\pi dy \int\limits_0^y \cos(x+y)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(\sin(x+y)\big|_0^y\right) dy = \int\limits_0^\pi (\sin 2y - \sin y)\,dy = \left(-\frac{\cos 2y}{2} + \cos y\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 1 = -2.$$

В качестве упражнения рекомендуем *самостоятельно* вычислить этот интеграл, изменив порядок интегрирования.

Пример 13.19. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, если область D — треугольник с вершинами $O\,(0;0)$, $A\,(1;-1)$, $B\,(1;1)$.

Решение. Уравнение прямой OB — биссектриса первого координатного угла — $y=x$, уравнение прямой OA — биссектриса четвертого координатного угла — $y=-x$ (рис. 13.23).

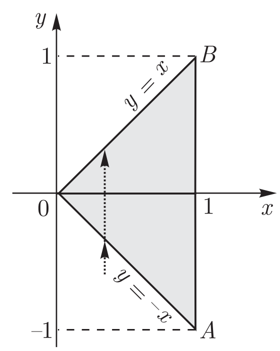

Рис. 13.23

Чтобы обойтись одним двукратным интегралом, выберем следующий порядок интегрирования:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\;dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x}^{x}\sqrt{x^2-y^2}\;dy.$$

Во внутреннем интеграле $x=\mathrm{const}$, поэтому удобно вычислять этот интеграл с помощью тригонометрической подстановки

$$y=x\sin t\quad\Rightarrow\quad dy=x\cos t\;dt.$$

Выполнив замену переменной, изменим и пределы интегрирования. На нижнем пределе

$$y=-x,\quad\text{тогда}\quad \sin t=-1\quad\Rightarrow\quad t_1=-\frac{\pi}{2};$$

на верхнем пределе:

$$y=x,\quad\text{тогда}\quad \sin t=1\quad\Rightarrow\quad t_2=\frac{\pi}{2}.$$

Процедура вычисления двукратного интеграла с учетом замены переменной выглядит следующим образом:

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x}^{x}\sqrt{x^2-y^2}\,dy\;=\;\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{x^2-x^2\sin^2 t}\;\,x\cos t\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\;dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\cdot\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 13.20. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D e^{-y^2} dx\,dy$, где область D — треугольник с вершинами $O\,(0;0)$, $B\,(0;1)$, $A\,(1;1)$.

Решение. Запишем уравнения границ области D: $x=0$, $y=x$, $y=1$ (рис. 13.24). Очевидно, интеграл по этой области может быть сведен к двукратному

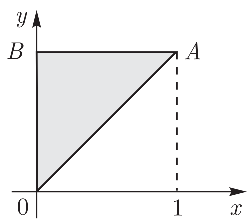

Рис. 13.24

$$\iint\limits_D e^{-y^2} dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 e^{-y^2} dy.$$

Однако внутренний интеграл $\int\limits_x^1 e^{-y^2} dy$ в элементарных функциях *не берется*!

Эту трудность можно обойти, если изменить порядок интегрирования

$$\iint\limits_D e^{-y^2} dx\,dy = \int\limits_0^1 e^{-y^2} dy \int\limits_0^y dx.$$

Такой двукратный интеграл легко вычисляется. Действительно,

$$\int\limits_0^1 e^{-y^2} dy \int\limits_0^y dx = \int\limits_0^1 e^{-y^2} dy \cdot x\,\big|_0^y = \int\limits_0^1 y\,e^{-y^2} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-y^2} d\left(-y^2\right) = -\frac{1}{2} e^{-y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как строится *интегральная сумма* для функции $f(x;y)$ по области D?
2. Что называется *двойным интегралом* от функции $f(x;y)$ по области D?
3. Как записывается двойной интеграл *в декартовой системе координат*?
4. Сформулировать и доказать *основные свойства* двойного интеграла.

5. Какая область D называется *правильной* в направлении оси Ox (оси Oy)?
6. Как быть, если двойной интеграл задан по неправильной области D?
7. Неправильную область D, изображенную на рис. 13.25, представить в виде суммы правильных областей.

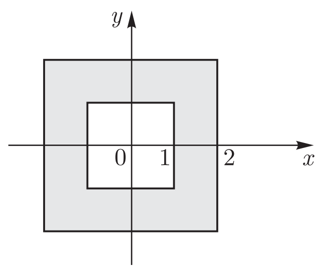

Рис. 13.25

8. Как двойной интеграл сводится к *двукратному* или *повторному* интегралу?
9. Какие интегралы называют *внутренним* и *внешним* в двукратном интеграле?
10. Что можно сказать относительно *пределов интегрирования* во внешнем интеграле?
11. Каковы в общем случае *пределы интегрирования* во внутреннем интеграле?
12. Могут ли быть *пределы интегрирования* во внутреннем интеграле постоянными? В каком случае?
13. Можно ли *менять* порядок интегрирования в двукратном интеграле?
14. Сколькими способами можно расставить *пределы интегрирования* в двукратном интеграле?
15. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде *двукратного* всеми возможными способами, если $a \leqslant x \leqslant b$ и $c \leqslant y \leqslant d$.
16. Какова *процедура вычисления* двойного интеграла по заданной области?

17. По окончании занятий в учебной аудитории на доске сохранилась запись $\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}$. Что это за интеграл: определенный или двукратный; если двукратный, то внутренний или внешний? По какой переменной он берется? Что можно сказать относительно области интегрирования D?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вычислить двукратные интегралы:

1.1. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy;$ **1.2.** $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 + 2y\right)\, dx;$

1.3. $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x + 2y)\, dx;$ **1.4.** $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{1+\cos x} y^2 \sin x\, dy.$

2. Восстановить область D по заданным пределам интегрирования и вычислить интегралы:

2.1. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} dy;$ **2.2.** $\int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} y\, dx.$

3. Изменить порядок интегрирования в двукратных интегралах:

3.1. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{2-y^2}} f(x; y)\, dx;$ **3.2.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x; y)\, dy;$

3.3. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x; y) dy;$ **3.4.** $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x; y) dy$

3.5. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x; y)\, dx;$ **3.6.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x; y) dx;$

3.7. $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x; y) dy;$

3.8. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2/9}^{x} f(x;y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2/9}^{1} f(x;y)dy;$

4. Вычислить двойные интегралы:

4.1. $\iint\limits_D \left(x+y^3\right)\, dx\, dy$, если область D ограничена прямыми $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=3$;

4.2. $\iint\limits_D y \ln x\, dx\, dy$, если область D ограничена линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

4.3. $\iint\limits_D e^x dx\, dy$, если область D ограничена линиями $x=0$, $y=1$, $y=2$, $y=e^x$.

4.4. $\iint\limits_D x\, dx\, dy$, если область D — треугольник с вершинами $A\,(2;3)$, $B\,(7;2)$, $C\,(4;5)$.

ОТВЕТЫ

1.1. $\frac{9}{4}$.

1.2. $4\frac{2}{3}$.

1.3. $50,4$.

1.4. $\frac{4}{3}$.

2.1. $4\frac{1}{2}$.

2.2. $\frac{1}{6}a^3$.

3.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f\,(x;y)\; dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)\, dy.$

3.2. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x;y)\, dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f\,(x;y)\; dx.$

3.3. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x;y)\, dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x;y)\, dx.$

3.4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f\,(x;y)\; dx.$

3.5. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x;y)\,dy.$

3.6. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x}} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{1} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x;y)\,dy.$

3.7. $\int\limits_{0}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} f\,(x;y)\;dx + \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x;y)\,dx.$

3.8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{3\sqrt{y}} f\,(x;y)\;dx.$

4.1. 7.

4.2. $\frac{5}{8}\,(2\ln 2 - 1).$

4.3. $\frac{1}{2}.$

4.4. 26.

§ 13.3. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

I. Положение точки M в области D может быть определено как парой декартовых координат (x, y), так и парой чисел (u, v). Линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ в плоскости xOy, вообще говоря, могут быть и не прямыми, поэтому переменные u и v называются *криволинейными координатами* точки M.

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соотношениями $x = \varphi(u; v)$, $y = \psi(u; v)$, где $\varphi(u; v)$ и $\psi(u; v)$ — непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно однозначно отображающие область D плоскости xOy на область G плоскости $uO'v$.

В этом случае справедлива формула *преобразования координат* (формула *замены переменных*) в двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy = \iint\limits_G f\,[\varphi\,(u; v)\,,\ \psi\,(u; v)]\ |\mathrm{J}|\ du\, dv, \tag{13.3.1}$$

где

$$\mathbf{J} = \frac{D(x; y)}{D\,(u; v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{13.3.2}$$

— функциональный определитель Якоби (*якобиан преобразования*), $|\mathbf{J}|\ du\, dv$ — элемент площади в криволинейных координатах u и v. Пределы интегрирования определяются по общим правилам на основании вида области G.

II. Двойной интеграл в полярных координатах. Если начало декартовой системы координат совмещено с полюсом полярной системы, а полярная ось направлена вдоль оси Ox, то *декартовы* и *полярные координаты* связаны соотношениями (см. часть 1, § 1.6, [21]):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \quad (\rho \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Модуль якобиана преобразования от декартовых координат к полярным равен

$$|\mathbf{J}| = \left|\frac{D\,(x; y)}{D\,(\rho; \varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

а элемент площади — $\rho\, d\rho\, d\varphi$. Формула перехода от декартовых координат (x, y) к полярным (ρ, φ) в двойном интеграле имеет вид

$$\iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy = \iint\limits_G f\ (\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\ \rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{13.3.3}$$

Двойной интеграл $\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi$ вычисляется сведением к *двукратному* или *повторному*. Как правило, внутренний интеграл берется по переменной ρ, а внешний — по переменной φ. В общем случае пределы *внутреннего* интеграла (по ρ) *являются функциями* от φ; пределы *внешнего* интеграла (по φ) ***всегда** постоянны*. При этом возможны случаи:

а) область G ограничена двумя лучами, выходящими из полюса под углами α и β ($\alpha < \beta$), т. е. $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$ и двумя кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ (рис. 13.26, *а*), тогда

$$\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho. \qquad (13.3.4)$$

б) полюс принадлежит границе области G, т. е. $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$ (рис. 13.26, *б*), тогда

$$\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho. \qquad (13.3.5)$$

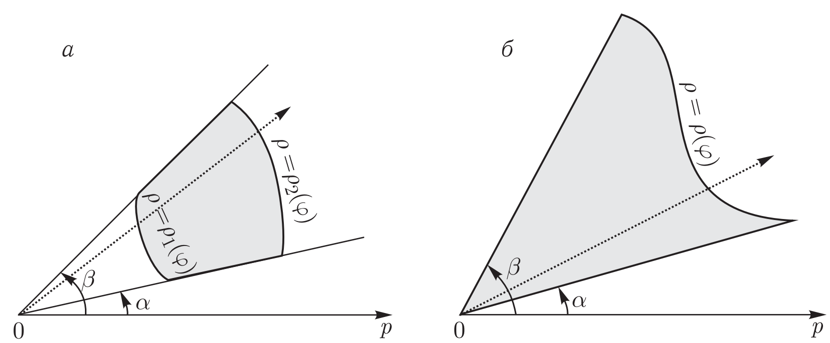

Рис. 13.26

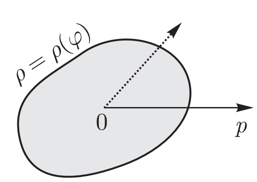

Рис. 13.27

в) область G содержит полюс внутри себя и ограничена кривой $\rho = \rho(\varphi)$ (см. рис. 13.27):

$$\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,. \qquad (13.3.6)$$

Переход в двойном интеграле к полярным координатам обычно используют в тех случаях, если подынтегральная функция содержит сумму $x^2 + y^2$ или границы области — окружности. В полярной системе координат эта сумма получает простое выражение $(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = \rho^2$, а уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ принимает вид $\rho = a$.

Поэтому вычисление двойного интеграла в полярной системе координат существенно упрощается, если задача имеет круговую симметрию.

Пример 13.21. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, если область D ограничена прямыми $2x + y = 1$, $2x + y = 3$, $x - y = -1$ и $x - y = 2$.

Р е ш е н и е. Область D представляет собой параллелограмм, и какой бы порядок интегрирования мы не избрали, придется вычислять три интеграла.

Вычисления можно упростить, если выполнить замену переменных. Положим $2x + y = u$, $x - y = v$. Тогда уравнения прямых $2x + y = 1$ и $2x + 1 = 3$ преобразуются соответственно в уравнения прямых $u = 1$ и $u = 3$ на плоскости $uO'v$, а уравнения прямых $x - y = -1$ и $x - y = 2$ — в уравнения прямых $v = -1$, $v = 2$ в той же плоскости.

Соответственно, область D плоскости xOy отобразится в область G плоскости $uO'v$, представляющую собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (рис. 13.28).

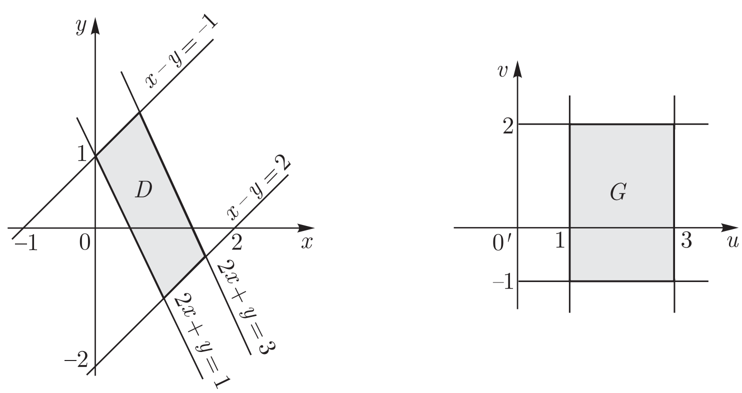

Рис. 13.28

Выразим переменные x и y через новые переменные u и v:

$$\begin{cases} u = 2x + y, \\ v = x - y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{3}, \\ y = \dfrac{u-2v}{3}. \end{cases}$$

и вычислим модуль якобиана преобразования

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad |\,\mathbf{J}\,| = \frac{1}{3}.$$

В новых переменных заданный интеграл сводится к двукратному интегралу с постоянными пределами интегрирования

$$\iint\limits_D (x+y)\;dx\,dy \;=\; \iint\limits_G \left(\frac{u+v}{3} + \frac{u-2v}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{9}\iint\limits_G (2u-v)\;du\,dv = \frac{1}{9}\int\limits_1^3 du\int\limits_{-1}^2 (2u-v)\;dv =$$

$$= \frac{1}{9}\int\limits_1^3 \left(2uv - \frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^2 du = \frac{1}{3}\int\limits_1^3 \left(2u - \frac{1}{2}\right)\;du = \frac{1}{3}\,\left(u^2 - \frac{1}{2}u\right)\Bigg|_1^3 = 2\frac{1}{3}.$$

Пример 13.22. Вычислить $\iint\limits_D y^2 dx\,dy$, если область D ограничена линиями $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 3x$.

Решение. Строим область D, ограниченную двумя прямыми $y = x$, $y = 3x$ и двумя гиперболами $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{2}{x}$ (рис. 13.29).

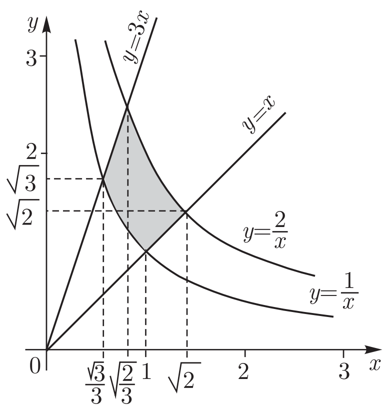

Рис. 13.29

При любом порядке интегрирования в декартовых координатах придется вычислять три двукратных интеграла. Поэтому рационально выполнить преобразования координат, сделав замену переменных

$$xy = u, \quad \frac{y}{x} = v,$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}\,, \quad y = \sqrt{uv}\,.$$

Уравнения границ области преобразуются к виду $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$, $v = 3$. Криволинейный четырехугольник в плоскости xOy отоб-