

Высоцкий М.И.

**Лекции по
теории
электрослабых
взаимодействий**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 539.12
ББК 22.38
В 93

Высоцкий М.И. Лекции по теории электрослабых взаимодействий. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 152 с. — ISBN 978-5-9221-1263-5.

Конспект лекций, читаемых на кафедре физики элементарных частиц ФОПФ МФТИ, пятый год обучения, охватывает часть курса слабых взаимодействий. Вторая часть курса посвящена более традиционной проблематике — распадам лептонов и адронов.

Для студентов старших курсов и аспирантов, чьи интересы лежат в области физики элементарных частиц.

ISBN 978-5-9221-1263-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2011

© М. И. Высоцкий, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Лекция 1. Эффект Голдстоуна	5
Лекция 2. Эффект Хиггса	16
Лекция 3. Бозонный сектор Стандартной Модели	23
Лекция 4. Фермионы в Стандартной Модели	29
Лекция 5. Свойства W - и Z -бозонов	41
Лекция 6. Свойства бозона Хиггса	48
Лекция 7. Взаимодействия и массы нейтрино	57
Лекция 8. Осцилляции нейтрино	67
Лекция 9. Радиационные поправки в электрослабой теории	80
Лекция 10. Фит Стандартной Модели и масса бозона Хиггса	94
Лекция 11. Теории Великого Объединения	103
Лекция 12. Суперсимметрия: формализм	115
Лекция 13. Суперсимметричное обобщение Стандартной Модели	125
Лекция 14. Концентрация реликтовых нейтрино во Вселенной	137
Список литературы	151

Предисловие

Созданная Энрико Ферми в 1934 г. теория долго служила основой для изучения слабых взаимодействий. Было установлено множество важнейших свойств слабого взаимодействия: его универсальность, нарушение пространственной (P), зарядовой (C) и комбинированной (CP) четностей и многое другое. В то же время было обнаружено, что теория Ферми неперенормируема. Велись интенсивные поиски заменяющей ее на малых расстояниях теории. Они увенчались построением перенормируемой калибровочной теории, объединившей слабые и электромагнитные взаимодействия. Переносчиком слабых взаимодействий служат тяжелые векторные W - и Z -бозоны, открытые экспериментально в 1983 г., через пятьдесят лет после работы Ферми. Электрослабая теория является частью основанной на локальной калибровочной симметрии $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Стандартной Модели, объясняющей все известные свойства элементарных частиц.

Хиггсовский механизм генерации масс кварков, лептонов и промежуточных бозонов обеспечивает перенормируемость электрослабых взаимодействий, одновременно предсказывая существование скалярной частицы — хиггсовского бозона H , обнаружение которого является одной из задач начавшего работу в 2010 г. большого адронного коллайдера ЦЕРН (БАК, LHC).

В настоящих лекциях излагается калибровочная электрослабая теория и обсуждается ее возможное дальнейшее развитие (теории Великого Объединения, суперсимметричные теории). Большой адронный коллайдер, возможно, не только позволит найти бозон Хиггса (последнюю не открытую частицу стандартной модели), но и покажет, какая новая физика лежит за рамками $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -теории.

Я глубоко благодарен своему учителю Льву Борисовичу Окуню, на лекциях которого я познакомился с теорией электрослабых взаимодействий.

Приношу свою благодарность М. Б. Волошину, О. В. Лычковскому и В. А. Новикову за полезные замечания и Е. А. Ильиной за помощь в оформлении рукописи.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 08-02-00494 и НШ-4568.2008.2.

ЛЕКЦИЯ 1

Эффект Голдстоуна

Неперенормируемость четырехфермионного взаимодействия;
теория массивного векторного бозона, снова
неперенормируемость; эффект Голдстоуна — спонтанное
«нарушение» симметрии: $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрия КХД,
 π -мезоны, соотношение Гольдбергера–Треймана; решаемые
примеры: $Z_2, U(1), O(3), SU(2)$

Надежно установлено, что локальное четырехфермионное взаимодействие хорошо описывает слабые взаимодействия лептонов и кварков. Оно имеет вид произведения ток×ток. Фермионный ток дается разностью векторного и аксиального токов: $(V - A) \times (V - A)$. Сила (вернее, слабость) взаимодействия обусловлена малостью фермиевской константы G_F . Приведем четырехфермионный лагранжиан, ответственный за распад мюона:

$$\mathcal{L}_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e, \quad (1.1)$$

где $G_F \approx 10^{-5}/m_p^2 \approx (1/300 \text{ ГэВ})^2$. Соответствующая фейнмановская диаграмма показана на рис. 1.1.

Аналогичное (1.1) взаимодействие с универсальной константой G_F описывает целый ряд наблюдаемых процессов с лептонами (рассеяние $\nu_\mu e \rightarrow \mu \nu_e$, распады $\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu$ и $\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e$) и кварками (β -распад нейтрона, распады π - и K -мезонов и т. д.). Тем не менее оно не может рассматриваться как фундаментальное: четырехфермионная теория неперенормируема. Проще всего это продемонстрировать путем анализа размерностей. Константы связи перенормируемых теорий либо безразмерны (заряд в квантовой электродинамике — КЭД), либо имеют размерность положительной степени энергии. Если константа связи имеет размерность отрицательной степени энергии, то ряд теории возмущений по степеням константы связи одновременно является рядом по положительным степеням энергии. Вычисление членов ряда теории возмущений требует суммирования по промежуточным состояниям, которое сводится к интегрированию по импульсам виртуальных частиц. Из соображений размерности следует, что ряд

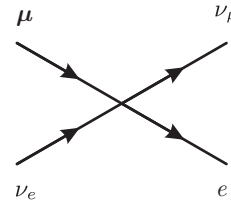


Рис. 1.1. Распад мюона в локальной четырехфермионной теории

по G_F окажется рядом по $G_F \Lambda^2$, где Λ — ультрафиолетовое обрезание (импульсами внешних частиц при анализе ультрафиолетового поведения интегралов можно пренебречь). Таким образом, любая амплитуда четырехфермионной теории оказывается расходящейся, начиная с некоторого (возможно, достаточно высокого) члена теории возмущений, т. е. не может быть вычислена (сравните со случаем КЭД, когда расходятся масса электрона и его заряд, остальные же амплитуды конечны и вычисляемы, что и означает перенормируемость теории).

Итак, древесные амплитуды, вычисляемые по лагранжианам типа (1.1), хорошо описывают экспериментальные данные, в то время как поправки к ним невычислимы, т. е. последовательная теория отсутствует. Поправки к амплитудам сравниваются с древесными выражениями при обрезании $\Lambda \approx 1/\sqrt{G_F} \approx 300$ ГэВ, поэтому успешное описание опытных данных древесными формулами окажется объяснимым, если теория при меньших энергиях будет видоизменяться, превращаясь в перенормируемую.

Почувствительно рассмотреть зависимость сечения рассеяния $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$ от энергии.

В четырехфермионной теории сечение упругого $\nu_e e$ -рассеяния при высокой энергии равно (см. лекцию 7)

$$\sigma_{\nu_e e} = \frac{G_F^2 s}{\pi}, \quad (1.2)$$

где $s = (k_1 + p_1)^2$ — квадрат инвариантной энергии. В с. ц. и. дифференциальное сечение не зависит от угла рассеяния. Поэтому рассеяние происходит только в состоянии с нулевым полным моментом. Для амплитуды рассеяния с моментом J из соотношения унитарности может быть получено следующее неравенство (см. лекцию 6):

$$[\text{Re} f^J(s)]^2 \leq \frac{1}{4|\bar{p}|^2}, \quad (1.3)$$

где $|\bar{p}|$ — импульс частиц в с. ц. и., дифференциальное сечение рассеяния связано с амплитудой стандартной формулой:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(s, \cos \theta)|^2, \quad (1.4)$$

а амплитуда рассеяния разлагается по парциальным амплитудам с помощью матриц конечных вращений:

$$f(s, \cos \theta) = \sum_J (2J+1) D_{\Lambda' \Lambda}^J f^J = f^0. \quad (1.5)$$

Последнее равенство имеет место и в нашем случае.

Итак, согласно соотношению унитарности

$$\sigma_{\nu_e e} \leq \frac{4\pi}{s}, \quad (1.6)$$

а сечение (1.2) превосходит унитарный предел при $\sqrt{s} > \sqrt{2\pi/G_F}$. Иными словами, рассеивается больше частиц, чем падает, что, очевидно, невозможно. Мы опять видим, что лагранжиан (1.1) может рассматриваться как эффективный низкоэнергетический, при высоких же энергиях теория должна меняться.

Хорошо известный пример перенормируемой теории — квантовая электродинамика. Естественный путь приближения к КЭД — «расшить» взаимодействие ток×ток, заменив его на обмен векторным бозоном:

$$\mathcal{L}_{W_\alpha} = g [\bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \mu + \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e] W_\alpha^-. \quad (1.7)$$

Константа g данного взаимодействия безразмерна. Таким образом, обсуждавшаяся выше причина неперенормируемости слабых взаимодействий устранена. Каким же образом из лагранжиана (1.7) может быть получено взаимодействие ток×ток (1.1)? Оказывается, для этого следует предположить, что промежуточный векторный бозон W_α является тяжелым. Тогда при энергиях много меньших его массы диаграмма, изображенная на рис. 1.2, сведется к диаграмме, изображенной на рис. 1.1 (пропагатор W -бозона может быть «стянут в точку»: $1/(k^2 - M_W^2) \rightarrow 1/(-M_W^2)$), и мы получим «микроскопическую» теорию фермиевской константы:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{M_W^2}. \quad (1.8)$$

Требование $g \leq 1$ приводит к верхнему ограничению на массу промежуточного бозона: $M_W \leq 300$ ГэВ. В случае сильной связи ($g \approx 1$) $M_W \approx 300$ ГэВ. Если константа g имеет порядок заряда электрона ($e = \sqrt{4\pi\alpha} \approx 0,3$), то $M_W \approx 100$ ГэВ. Совсем легким W -бозон быть не может, поскольку при характерных импульсах ~ 1 ГэВ должна воспроизводиться четырехфермионная теория. С точки зрения теорий Великого Объединения величина g порядка e представляется естественной. Экспериментальное значение $M_W \approx 80$ ГэВ служит одним из аргументов в пользу этих теорий (см. лекцию 11).

Выясним, является ли теория с массивным промежуточным векторным бозоном перенормируемой. Свободный лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} M^2 A_\mu^2; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.9)$$

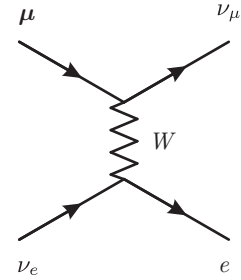


Рис. 1.2. Распад мюона в теории с промежуточным векторным бозоном

приводит к следующим уравнениям движения $\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\alpha} = \partial_\beta \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta A_\alpha}\right)$:

$$\begin{aligned} M^2 A_\alpha &= \partial_\beta \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \frac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta \partial_\beta A_\alpha} \right] = \partial_\beta \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha}) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\beta (F_{\beta\alpha} - F_{\alpha\beta}) = -\partial_\beta F_{\beta\alpha}; \\ \partial_\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta A_\beta + M^2 A_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В импульсном представлении получаем уравнения движения и уравнения для функции Грина массивного векторного поля в виде

$$(k^2 - M^2) A_\alpha - k_\alpha k_\beta A_\beta = 0 \implies k_\alpha A_\alpha = 0; \quad (1.11)$$

$$[(k^2 - M^2) g_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta] G_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}. \quad (1.12)$$

Окончательно для функции Грина имеем

$$G_{\alpha\beta} = \frac{g_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / M^2}{k^2 - M^2}. \quad (1.13)$$

Полус (1.13) при $k^2 = M^2$ означает правильность коэффициента $1/2$ при массовом члене в (1.9).

На массовой оболочке ($k^2 = M^2$) числитель функции Грина поперечен $\left(k_\alpha \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M^2}\right) = 0\right)$, что отвечает условию на вектор поляризации массивного поля спина 1: $k_\alpha A_\alpha = 0$ (последнее условие является обобщением на движущуюся частицу равенства нулю компоненты A_0 в ее системе покоя).

Второй член в числителе (1.13) таит в себе опасность. Дело в том, что функция Грина массивного векторного поля не падает $\sim 1/k^2$ при $k^2 \rightarrow \infty$ и счет степеней расходимости петлевых графиков опять-таки демонстрирует неперенормируемость теории. Если бы массивный векторный бозон взаимодействовал с сохраняющимся током ($\partial_\alpha J_\alpha = 0$), то вклад «опасного» члена в (1.13) занулялся бы и мы бы имели последовательную перенормируемую квантовую теорию поля, каковой является КЭД с массивным фотоном. Однако в случае слабых взаимодействий аксиальные и недиагональные векторные токи не сохраняются:

$$i\partial_\alpha \bar{\psi}_1 \gamma_\alpha \psi_2 = (m_2 - m_1) \bar{\psi}_1 \psi_2; \quad (1.14)$$

$$i\partial_\alpha \bar{\psi}_1 \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_2 = -(m_2 + m_1) \bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2. \quad (1.15)$$

Теория же массивного векторного поля, взаимодействующего с не сохраняющимися токами, неперенормируема.

Нормированный на единицу вектор поляризации поля векторного бозона подчинен следующему условию:

$$k_\alpha e_\alpha = 0. \quad (1.16)$$

Оно допускает три решения:

$$e_{\alpha}^{(1)} = (0, 1, 0, 0); \quad e_{\alpha}^{(2)} = (0, 0, 1, 0); \quad e_{\alpha}^{(3)} = \left(\frac{|\bar{k}|}{M}, 0, 0, \frac{E}{M} \right), \quad (1.17)$$

где предполагается, что частица летит вдоль третьей оси. Числитель функции Грина поля W_{α} совпадает с матрицей плотности $\rho_{\alpha\beta} = e_{\alpha}^i e_{\beta}^i$. Первые два вектора поляризации являются теми же, что и у безмассового фотона. Сингулярное при больших импульсах поведение возникает за счет продольной поляризации $e^{(3)}$:

$$e_{\alpha}^{(3)} = \frac{k_{\alpha}}{M} - \frac{M}{E + |\bar{k}|} (1, 0, 0, -1).$$

Итак, лагранжиан (1.9) свободного массивного векторного поля приводит к неперенормируемой теории. Можно ли как-то еще получить массивное векторное поле, не вводя массового члена в исходный лагранжиан? Наглядным примером здесь служит эффект Мейснера — вытеснение магнитного поля из сверхпроводника. Безмассовое в вакууме поле фотона набирает в сверхпроводнике массу, что приводит к экспоненциальному затуханию магнитного поля в глубь сверхпроводника. Феноменологический лагранжиан Гинзбурга–Ландау, описывающий эффект Мейснера, наряду с полем фотона включает скалярный «параметр порядка» φ , ненулевое среднее значение которого в среде приводит к возникновению массы фотона. Нетривиальные свойства вакуума не влияют на поведение амплитуд при высоких энергиях, поэтому изначально перенормируемая теория таковой и остается. Отложим рассмотрение вопроса о форме пропагатора векторного поля в теории указанного типа (называемой теорией со спонтанно нарушенной симметрией) до следующей лекции. Сейчас же сосредоточимся на поле φ . Для того чтобы безмассовое векторное поле получило массу, оно должно смешаться с безмассовой частицей. Как обеспечить существование безмассовой скалярной частицы? Взаимодействие перенормирует затравочную массу, поэтому безмассовый скаляр выглядит чрезвычайно искусственным.

Естественным образом получить безмассовые частицы позволяет эффект Голдстоуна. Начнем с еще одного примера из физики твердого тела. Взаимодействие спинов в ферромагнетике $O(3)$ -симметрично. Основное состояние характеризуется вектором магнитного момента и обладает $O(2)$ -симметрией вращения относительно этого вектора. Две «пропавшие» симметрии ($O(3)$ имеет три генератора, а $O(2)$ — один) реализуются в виде двух поляризаций магнона, или спиновой волны. Спиновая волна может иметь произвольно малую энергию (большую длину волны), т. е. масса магнона равна нулю. Итак, $O(3)$ -симметрия исходного гамильтониана реализуется в виде $O(2)$ -симметрии

основного состояния и двух голдстоуновских бозонов. Описанное явление получило не совсем удачное название спонтанного нарушения симметрии. Симметрия лагранжиана не нарушена, она лишь реализуется необычным способом.

В квантовой теории существует два способа реализации симметрии.

1. Основное состояние имеет симметрию исходного лагранжиана. При этом возбуждения реализуют представления исходной группы симметрии. Так, в частности, реализуются симметрии в квантовой механике систем с конечным числом степеней свободы (например, $O(3)$ -симметрия атома водорода). Подобная реализация получила название реализации Вигнера–фон Неймана.
2. Основное состояние имеет меньшую симметрию, а «нарушенным» генераторам отвечают безмассовые скалярные частицы (голдстоуновские бозоны). «Нарушенная» симметрия сдвигает поле «своего» голдстоуна на константу, т. е. симметрия реализуется на безмассовых бозонах. Подобная реализация называется реализацией Намбу–Голдстоуна.

Физика легких кварков дает прекрасный пример различных реализаций симметрии. Характерный масштаб сильных взаимодействий, $\Lambda_{\text{КХД}} \approx 300 \text{ МэВ}$ (КХД — квантовая хромодинамика), намного больше масс u - и d -кварков, поэтому хорошим нулевым приближением должна служить модель с $m_u = m_d = 0$. В этом приближении лагранжиан КХД имеет $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -симметрию относительно независимых вращений левых и правых кварковых полей. (В пределе $m_u = m_d \neq 0$ остается одна $SU(2)_V$ -симметрия (индекс «V» происходит от слова «вектор».) Следовательно, в теории должно иметься $3 + 3 = 6$ сохраняющихся токов. На кварковых полях эти токи выписываются немедленно:

$$J_{\alpha ij}^{\pm} = \bar{q}_i \gamma_{\alpha} (1 \pm \gamma_5) q_j. \quad (1.18)$$

Вопрос в том, как они выглядят на существующих в природе адронах. Половину токов дает добрая старая изотопическая $SU(2)_V$ -симметрия. Адроны формируют $SU(2)_V$ -мультиплеты: дублет нуклонов p, n ; триплет Σ -гиперонов; дублет Ξ -гиперонов и т. д. Кстати, неплохим приближением является легкость и третьего, странного кварка: $m_s \ll \Lambda$. При этом мы приходим к $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ -симметрии, векторная часть которой (Гелл-Манновская $SU(3)$) реализуется на хорошо известных октете и декуплете гиперонов. Возвращаясь к $SU(2)$ -симметрии, запишем триплет сохраняющихся векторных токов на дублете нуклонов:

$$SU(2)_V : \begin{cases} \bar{p} \gamma_{\alpha} n; \\ \bar{p} \gamma_{\alpha} p - \bar{n} \gamma_{\alpha} n; \\ \bar{n} \gamma_{\alpha} p. \end{cases} \quad (1.19)$$

Аналогичная реализация $SU(2)_A$ -симметрии требует наличия дублета нуклонов (P, N), вырожденных по массе с протоном и нейтроном и имеющих противоположную P -четность. Однако даже и это не помогло бы. Дело в том, что аномалия в дивергенции кваркового тока, $\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5d$, требует существования безмассовых в пределе $m_u, m_d \rightarrow 0$ адронов:

$$\langle 0 | \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5d | \gamma\gamma \rangle \sim \frac{q_\mu}{q^2} F\tilde{F}.$$

Поэтому аксиальная симметрия оказывается спонтанно нарушенной. Она реализуется на триплете безмассовых (почти) π -мезонов. Параметром порядка здесь служит сумма билинейных произведений кварковых полей. В вакууме $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \neq 0$. Триплет сохраняющихся аксиальных токов строится следующим образом:

$$SU(2)_A : \left(g_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \begin{cases} \bar{p}\gamma_\alpha\gamma_5n; \\ \bar{p}\gamma_\alpha\gamma_5p - \bar{n}\gamma_\alpha\gamma_5n; \\ \bar{n}\gamma_\alpha\gamma_5p. \end{cases} \quad (1.20)$$

Полос при $q^2 = 0$ отвечает обмену безмассовыми π^\pm - и π^0 -мезонами (отличие их масс от нуля обусловлено небольшими массами u - и d -кварков). В случае $SU(3)_A$ -симметрии, еще сильнее нарушенной массой странного кварка, мы приходим к октету безмассовых мезонов: $3\pi, 4K, \eta$. Именно поэтому реализация $SU(3)_V$ -симметрии иллюстрировалась гиперонами, а не мезонами.

Заряженный ток J_α^{A+} появляется при β -распаде нейтрона (рис. 1.3).

Из требования сохранения аксиального тока получаем знаменитое соотношение Гольдбергера–Треймана, выражающее аксиальную константу g_A β -распада нейтрона через пион-нуклонную константу связи $G_{\pi NN}$ $\left(\frac{G_{\pi NN}^2}{4\pi} = 14 \right)$ и константу распада пиона f_π ($f_\pi = 130$ МэВ):

$$g_A = \frac{f_\pi G_{\pi NN} \sqrt{2}}{2m_N} \approx 1,30, \quad (1.21)$$

что очень близко к экспериментальной величине $g_A = 1,25$.

Задача 1.1. Используя диаграммы, изображенные на рис. 1.3, доказать соотношение Гольдбергера–Треймана (1.21).

Мы начали рассмотрение явления спонтанного нарушения симметрии с аксиальной симметрии лагранжиана КХД, поскольку в природе она реализуется по нambu–голдстоуновскому сценарию. Однако «в лоб», исходя из лагранжиана КХД, доказать, что именно так реализуется эта симметрия, сегодня невозможно: мы имеем дело с теорией сильной связи. Перейдем к рассмотрению простых решаемых

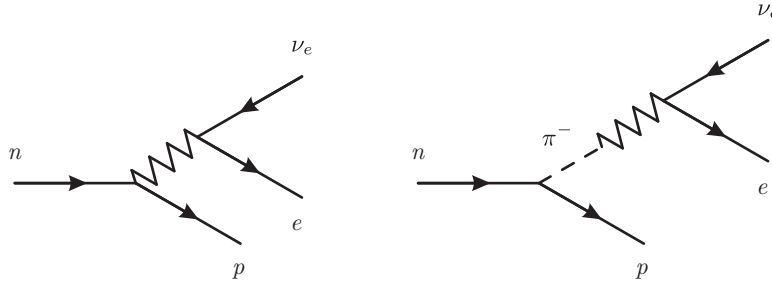


Рис. 1.3. Диаграммы, отвечающие сохранению (частичному) аксиального тока при распаде нейтрона за счет безмассового (почти) π -мезона

моделей теории поля, в которых симметрия спонтанно нарушается. Ниже рассматриваются четыре соответствующих примера, после чего будет доказана общая теорема.

Пример 1.1 (симметрия Z_2). Пусть имеется одно вещественное скалярное поле $\varphi(x)$, динамика которого описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\lambda^2}{2}(\varphi^2 - \eta^2)^2, \quad (1.22)$$

инвариантным относительно дискретного преобразования $\varphi \rightarrow -\varphi$.

На постоянных в пространстве и времени полях гамильтониан сводится к потенциальной энергии:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda^2}{2}(\varphi^2 - \eta^2)^2, \quad (1.23)$$

имеющей два минимума: $\varphi = \pm\eta$. Квантовать систему следует в окрестности одного из них, нарушая тем самым симметрию исходного лагранжиана. Наряду с малыми возмущениями вакуумного состояния (элементарными квантами поля φ) имеется классическое решение (кинк), интерполирующее между двумя вакуумами. Кинк — это плоская «доменная стенка», разделяющая области, в которых поле φ имеет значение η и $-\eta$. Существование таких стенок важно для космологии (Зельдович, Кобзарев, Окунь).

Можно добавить в рассматриваемую систему частицы со спином $1/2$ таким образом, что их безмассовые возбуждения будут существовать только в той области пространства, в которой поле кинка проходит через нуль. Такой «мир на стенке», изобретенный Рубаковым и Шапошниковым, широко используется для объяснения ненаблюдаемости возможно существующих дополнительно к нашим трем пространственным координат.

Задача 1.2. Рассмотреть систему, описываемую лагранжианом (1.22), в двумерном пространстве-времени (t, x) . Найти аналитически

статическое решение уравнения движения для поля φ с асимптотиками $\varphi(x = \infty) = \eta$, $\varphi(x = -\infty) = -\eta$ — кинк. (Воспользоваться аналогией с законом Ньютона, записать закон сохранения энергии и проинтегрировать его). Найти массу и размер кинка. Определить, при каких значениях параметров квантовые (петлевые) поправки будут малы. Сравнить массу кинка с массой элементарного возбуждения над тривиальным вакуумом $\varphi = \eta$. Сравнить комптоновскую длину волны кинка и его размер.

Пример 1.2 (симметрия $U(1)$). Пусть имеется одно комплексное скалярное поле $\varphi(x)$, описываемое лагранжианом

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \varphi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(\varphi^+ \varphi - \frac{\eta^2}{2} \right)^2, \quad (1.24)$$

инвариантным относительно абелева унитарного преобразования: $\varphi(x) = e^{i\lambda} \varphi'(x)$.

Рассмотрим два возможных случая:

- а) $\eta^2 < 0$. Соответствующая зависимость $V(|\varphi|)$ показана на рис. 1.4, а. Имеется одно комплексное поле φ с массой $\lambda|\eta|/\sqrt{2}$. Вакуумное среднее φ равно нулю. В теории присутствует нетривиальное взаимодействие;
- б) $\eta^2 > 0$. Соответствующая зависимость $V(|\varphi|)$ показана на рис. 1.4, б. Функция $V(\varphi_x, \varphi_y)$ получается вращением этого графика вокруг вертикальной оси. Результирующая фигура напоминает донышко бутылки или перевернутое сомбреро. Вместо одного минимума потенциала здесь имеется кольцо минимумов: $|\varphi| = \eta/\sqrt{2}$, причем фаза φ произвольна. Квантование следует проводить относительно какой-либо точки на этом кольце.

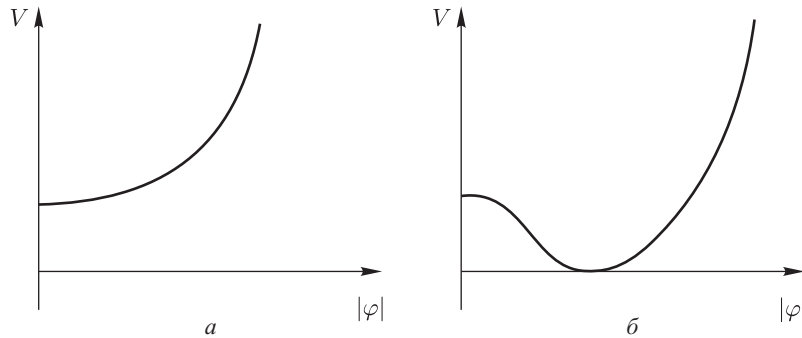


Рис. 1.4. Обычная (а) и приводящая к эффекту Голдстоуна (б) зависимости плотности потенциальной энергии от $|\varphi|$

Колебанию вдоль модуля φ отвечает массивное скалярное поле, масса которого определяется крутизной стенок. Движению вдоль фазы φ отвечает безмассовое поле — голдстоуновский бозон. В спектре масс частиц $U(1)$ -симметрия нарушена (при $\eta^2 < 0$ имеется два вырожденных вещественных поля: φ_x и φ_y). Реализуется же она на голдстоуновском бозоне. Итак, происходит спонтанное нарушение симметрии. Разложим φ относительно вакуумного значения, выбрав его вещественным:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\rho(x) + \eta] e^{i\alpha(x)}. \quad (1.25)$$

Подставляя (1.25) в (1.24), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} |\partial_\mu \rho + i \partial_\mu \alpha (\eta + \rho)|^2 - \frac{\lambda^2}{8} (2\eta\rho + \rho^2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} \eta^2 (\partial_\mu \alpha)^2 - \frac{\lambda^2 \eta^2}{2} \rho^2 + (\partial_\mu \alpha)^2 \left(\frac{\rho^2}{2} + \eta\rho \right) - \frac{\lambda^2}{8} (\rho^4 + 4\eta\rho^3). \end{aligned}$$

В результате в теории имеются одна частица ρ с массой $\lambda\eta$ и одна безмассовая частица — голдстоуновский бозон α . Симметрия $U(1)$, $\alpha(x) = \alpha'(x) + \lambda$, проявляется в том, что масса частицы α равна нулю, а ее взаимодействие пропорционально импульсу.

Данный пример иллюстрирует все характерные черты эффекта Голдстоуна.

В основе электрослабой теории лежит неабелева $SU(2) \times U(1)$ -симметрия. Рассмотрим эффект Голдстоуна в неабелевом случае.

Пример 1.3 (симметрия $O(3)$ — простейшая неабелева группа). Рассмотрим вектор вещественных скалярных полей $A_i(x)$ (где $i = 1, 2, 3$), описываемых лагранжианом с той же характерной формой потенциальной энергии:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_i)^2 - \lambda^2 (A_i^2 - \eta^2)^2. \quad (1.26)$$

Лагранжиан (1.26) обладает $O(3)$ -симметрией. Спонтанное нарушение симметрии происходит при положительном η^2 . Новый вакуум характеризуется вектором A_i^0 ($|A_i^0| = \eta$), имеющим произвольное направление в изопространстве. В теории остается $O(2)$ -симметрия относительно вращений вокруг вектора A_i^0 . Спектр масс состоит из пары голдстоуновских бозонов (если A_i^0 направлен вдоль третьей оси, то это поля A_1 и A_2 с нулевыми вакуумными средними) и одной массивной частицы. Голдстоуновских бозонов два, поскольку имеющая три генератора группа $O(3)$ нарушилась до абелевой группы $O(2)$: $3 - 1 = 2$. Выбирая вакуумное среднее вдоль третьей оси, записываем

$$A_3(x) = \eta + \tilde{A}_3(x); \quad A_{1,2}(x) = \tilde{A}_{1,2}(x), \quad (1.27)$$

где тильдой обозначены квантовые поля. Подставляя разложение (1.27) в (1.26), получаем лагранжиан теории с описанным выше спектром масс.

Задача 1.3. Нарисовать все древесные графики, дающие вклад в реакцию аннигиляции $\tilde{A}_1\tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{A}_2\tilde{A}_2$. Показать, что сумма графиков зануляется при стремлении к нулю импульсов сталкивающихся частиц.

Пример 1.4 (спинорное представление группы $SU(2)$). Лагранжиан изодублета H имеет вид

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu H|^2 - \frac{\lambda^2}{2}[H^+ H - \eta^2/2]^2. \quad (1.28)$$

Выбирая вакуумное среднее в виде

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

и раскладывая поле H в окрестности вакуума:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_1(x) + iH_2(x) \\ \eta + H_3(x) + iH_4(x) \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

выясняем, что в теории присутствуют три голдстоуновских поля (H_1 , H_2 и H_4), а поле H_3 имеет массу $\lambda\eta$. Три голдстоуновских бозона отвечают трем нарушенным генераторам группы $SU(2)$. На самом деле лагранжиан (1.28) имеет более широкую $SU(2) \times U(1)$ -симметрию, где $U(1)$ соответствует вращению всего спинора H . Вакуумное состояние (1.29) инвариантно относительно преобразования, генерируемого суммой T_3 и генератора $U(1)$ -вращения, поэтому счет голдстоуновских бозонов происходит следующим образом: $4 - 1 = 3$. В электрослабой теории ненарушенная симметрия отвечает электродинамике, а три голдстоуновских бозона, смешиваясь с безмассовыми калибровочными полями, дают массы W^\pm - и Z -бозонам.

Общее доказательство теоремы Голдстоуна основано на рассмотрении тока, сохраняющегося в силу присутствующей в теории глобальной симметрии. Если в системе имеется нетривиальный вакуум, то в токе появляется линейный по полю член:

$$j_\mu = \varphi^+ \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^+ = \eta \partial_\mu \tilde{\varphi} - \eta \partial_\mu \tilde{\varphi}^+ + \tilde{\varphi}^+ \partial_\mu \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \partial_\mu \tilde{\varphi}^+. \quad (1.31)$$

При этом из сохранения тока следует безмассовость поля $\text{Im } \tilde{\varphi}$:

$$\partial_\mu j_\mu = \eta \partial_\mu \partial_\mu \text{Im } \tilde{\varphi} + \dots = 0, \quad (1.32)$$

где оставлен только линейный член, а более высокие по полям члены отброшены.