

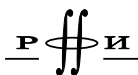
Бескин В.С.

**Осесимметричные
стационарные
течения в
астрофизике**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 524
ББК 22.632
Б 53



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 05-02-30015д*

Бескин В. С. **Осесимметричные стационарные течения в астрофизике.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с. — ISBN 5-9221-0646-5.

Книга посвящена методу уравнения Грета–Шафранова, позволяющему на достаточно простом языке описывать идеальные осесимметричные стационарные течения, которые могут иметь место у самого широкого класса астрофизических объектов.

Для студентов и аспирантов вузов, обучающихся по специальности «астрофизика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	9
Глава 1. Гидродинамический предел — классические задачи аккреции и эжекции	13
1.1. Астрофизическое введение — аккреция на компактные объекты	13
1.1.1. Аккреционные диски (14). 1.1.2. Стандартная модель (18). 1.1.3. ADAF, ADIOS и другие (21).	
1.2. Основные свойства трансзвуковых гидродинамических течений	23
1.2.1. Основные уравнения (23). 1.2.2. Сферически-симметричное течение (25). 1.2.3. Плоское потенциальное течение (28).	
1.3. Осесимметричные стационарные течения — нерелятивистский случай	34
1.3.1. Основные уравнения (34). 1.3.2. Математическое интермеццо — ковариантный подход (35). 1.3.3. Структура двумерного течения (37). 1.3.4. Аккреция Бонди–Хойла (45). 1.3.5. Истечение из медленно вращающейся звезды (50).	
1.4. Осесимметричные стационарные течения в окрестности черной дыры	57
1.4.1. Физическое интермеццо — $(3 + 1)$ -расщепление в метрике Керра (57). 1.4.2. Основные уравнения (61). 1.4.3. Точные решения (65). 1.4.4. Аккреция Бонди–Хойла — релятивистский режим (68). 1.4.5. Аккреция на медленно вращающуюся черную дыру (70). 1.4.6. Аккреция вещества с малым угловым моментом на невращающуюся черную дыру (72). 1.4.7. Тонкий трансзвуковой диск (78).	
1.5. Заключение	88
Приложение	89
Глава 2. Бессиловое приближение — магнитосфера радиопульсаров	91
2.1. Астрофизическое введение	91
2.2. Основные физические процессы	95
2.2.1. Вакуумное приближение (95). 2.2.2. Рождение частиц в сильном магнитном поле (99). 2.2.3. Структура магнитосферы (102).	
2.3. Генерация вторичной плазмы	106
2.3.1. «Внутренний зазор» (106). 2.3.2. Поверхность нейтронной звезды (110). 2.3.3. Распространение гамма-квантов в сверхсильном магнитном поле (111). 2.3.4. Эффекты общей теории относительности (112). 2.3.5. Генерация частиц в магнитосфере (115). 2.3.6. Модель «полого конуса» (116). 2.3.7. Генерация вторичной плазмы — «внешний зазор» (121).	
2.4. Пульсарное уравнение	121
2.4.1. Бессиловое приближение. Параметр замагниченности (121). 2.4.2. Удобная запись электромагнитного поля. Интегралы движения (123). 2.4.3. Уравнение Грэда–Шафранова (126). 2.4.4. Математическое интермеццо — квазистационарный формализм (129).	
2.5. Энергетические потери пульсаров	132
2.5.1. Механизм токовых потерь (132). 2.5.2. Торможение наклонного и ортогонального ротатора (135).	

2.6. Структура магнитосферы	144
2.6.1. Точные решения (144). 2.6.2. Структура магнитосферы с продольными токами (158). 2.6.3. Модели магнитосферы (166).	
2.7. Заключение	172
Глава 3. Бессилое приближение — магнитосфера черной дыры	173
3.1. Астрофизическое введение — центральная машина в ядрах активных галактик	173
3.1.1. Возможные механизмы образования черных дыр (175).	
3.1.2. Природа активности и переменность (177). 3.1.3. Замагниченный аккреционный диск (178). 3.1.4. Генерация регулярного магнитного поля (180).	
3.2. Основные уравнения	184
3.2.1. Электромагнитное поле и $(3 + 1)$ -расщепление (184).	
3.2.2. «Теорема об отсутствии волос» (185). 3.2.3. Вакуумное приближение (189). 3.2.4. Бессилое уравнение Грэда—Шафранова в метрике Керра (192). 3.2.5. Рождение частиц (198).	
3.3. Механизм энерговыделения	199
3.3.1. Процесс Блендфорда—Знайека (199). 3.3.2. Физическое интермеццо — термодинамика черной дыры (204).	
3.4. Структура магнитосферы черной дыры	207
3.4.1. Общие свойства (207). 3.4.2. Точные решения (209).	
3.4.3. Модели магнитосферы (216).	
3.5. Заключение	221
Глава 4. Полная магнитогидродинамическая версия — ускорение частиц и образование струйных выбросов	222
4.1. Астрофизическое введение — коллимация и ускорение частиц	222
4.1.1. Радиопульсары (222). 4.1.2. Активные галактические ядра (226). 4.1.3. Молодые звезды (230). 4.1.4. Микроквазары и космологические гамма-всплески (232).	
4.2. Основные уравнения	234
4.2.1. Физическое интермеццо — магнитогидродинамические волны (234). 4.2.2. Общий случай релятивистского течения (239).	
4.2.3. Нерелятивистское течение (250). 4.2.4. Случай анизотропного давления (253).	
4.3. Общие свойства	257
4.3.1. Некоторые полезные соотношения (257). 4.3.2. Альфвеновская поверхность (261). 4.3.3. Быстрая магнитозвуковая поверхность — релятивистский случай (263). 4.3.4. Быстрая магнитозвуковая поверхность — нерелятивистский случай (271).	
4.3.5. Поведение решения на больших расстояниях (276).	
4.3.6. Поведение решения вблизи горизонта событий (282).	
4.3.7. Анализ алгебраических соотношений (287).	
4.4. Точные решения	291
4.4.1. Цилиндрические струйные выбросы — бессилое приближение (291). 4.4.2. Цилиндрические релятивистские струйные выбросы (296). 4.4.3. Цилиндрические нерелятивистские струйные выбросы (311). 4.4.4. Радиальный замagnetиченный ветер (316). 4.4.5. Магнитосфера черной дыры (333).	
4.5. Другие методы исследования	346
4.5.1. Автомодельные решения (346). 4.5.2. Результаты численного расчета (352).	
4.6. Заключение	358
Заключение	361
Список литературы	364

ПРЕДИСЛОВИЕ

Читателю предлагается монография, основанная на курсе лекций, который впервые был прочитан сотрудникам отдела теоретической астрофизики Национальной астрономической обсерватории (Митака, Япония) в 1998 году и затем читался как часть годового курса «магнитная гидродинамика» на кафедре проблем физики и астрофизики МФТИ, а также в ГАИШ МГУ. Она посвящена одному из наиболее известных аналитических подходов в современной астрофизике, восходящему к уравнению Грэда–Шафранова, названному по фамилии ученых, первыми сформулировавших это уравнение для статических магнитных конфигураций. Рассматриваемый метод позволяет на достаточно простом языке описывать идеальные осесимметричные стационарные течения, которые могут иметь место у самого широкого класса астрофизических объектов.

Многие, привлеченные удивительным блеском отдельных граней данной теории, полагали, что метод уравнения Грэда–Шафранова может быть использован как основной материал для построения работоспособных моделей реальных астрофизических источников. Однако, как оказалось, этот материал непригоден для строительства самого здания и может быть использован лишь в качестве фундамента для построения будущей теории. В таком контексте и следует рассматривать настоящий курс. Он в значительной степени нацелен на проведение дальнейших исследований, а не на подведение итогов.

Несколько слов следует сказать о необходимой подготовке. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями, используемыми в общей теории относительности (ковариантная производная, тензорная алгебра). Впрочем, как мы увидим, использование языка $(3+1)$ -разложения, позволяющего сформулировать все законы на языке трехмерных векторов, имеющих прозрачный физический смысл, существенно упрощает изложение даже для наиболее сложного случая течений в окрестности вращающейся черной дыры. Здесь в качестве введения я настоятельно рекомендую ознакомиться с книгой «Черные дыры. Мембранный подход» (М.: Мир, 1988) под редакцией К. Торна, Р. Прайса и Д. Макдональда. В некотором смысле можно рассматривать настоящий курс как продолжение первых четырех глав этой замечательной книги (однако, как будет показано, сама мембранная трактовка не всегда позволяет правильно интерпретировать процессы, происходящие вблизи горизонта черной дыры). В остальном же все ключевые соотношения будут выведены по ходу изложения.

Пользуясь случаем, хотелось бы поблагодарить В. Л. Гинзбурга за постоянный интерес и поддержку, а также А. В. Гуревича и Я. Н. Истомина, с которыми были выполнены совместные работы по физике магнитосферы радиопульсаров и советы которых позволили существенно продвинуться в понимании основных свойств осесимметричных стационарных течений. За более чем десятилетний период,

посвященный исследованию уравнения Грэда–Шафранова и возможности его применения для конкретных астрофизических объектов, мне посчастливилось иметь многочисленные беседы с людьми, стоявшими у истоков рассматриваемого здесь подхода. Это, прежде всего, сам В. Д. Шафранов (не знавший, к моему удивлению, о широком использовании в астрофизике уравнения, носящего его имя), а также Р. Блендфорд, М. Камензинд, Р. Ловлейс, Л. Местел, И. Окамото, И. Новиков, Г. Пеллетьер, Р. Пудриц, А. Томимацу, К. Торн, Ж. Эйвертс. Им, а также их ученикам и последователям (Х. Ардавану, М. ван Путтену, Н. Влахакису, О. Кабураки, И. Контополосу, А. Левинсону, Ш. Нитте, Й. Пайцу, М. Такахаша, Х. Фендту, Дж. Феррейре, К. Хиротани, К. Цинганосу, Ш. Шибате) автор выражает свою самую искреннюю признательность. Хотелось бы поблагодарить Г. С. Бисноватого–Когана, В. И. Докучаева, Б. В. Комберга, С. С. Комиссарова, М. В. Конокова, В. М. Липунова, Ю. Э. Любарского, К. А. Постнова, А. Н. Тимохина, Д. А. Узденского, В. М. Четчинина и, особенно, С. В. Боговалова за плодотворные дискуссии, позволившие прояснить многие детали обсуждаемой здесь теории. Автор также выражает благодарность своим студентам кафедры проблем физики и астрофизики МФТИ — В. И. Парьеву, Ю. Н. Пидопрыгоре, Л. М. Малышкину, И. В. Кузнецовой, Р. Р. Рафикову, Н. Л. Закамской, Р. Ю. Компанейцу, А. Д. Чеховскому и Е. Е. Нохриной — за радость совместной работы, которая, как можно надеяться, тоже позволила внести вклад в развитие аналитических методов теории уравнения Грэда–Шафранова.

Наконец, мне бы хотелось сделать несколько замечаний личного характера. Я был последним студентом Сергея Ивановича Сыроватского. Он три года был моим научным руководителем на кафедре проблем физики и астрофизики и умер от второго инфаркта осенью 1979 года, в год моего окончания института и поступления в отделение теоретической физики ФИАН. Поэтому я не успел по-настоящему поработать вместе с ним. Тем не менее яркие воспоминания о С. И. Сыроватском по-прежнему остаются в памяти. Более того, с годами становится все более ясно, какое определяющее влияние оказал на меня мой учитель. Вот почему я считаю своим долгом посвятить эту книгу его светлой памяти.

В статье, опубликованной в УФН, сказано, что «жизнь, отданная науке» в применении к С. И. Сыроватскому перестает быть трафаретом и приобретает свой истинный смысл. Трудно что-то добавить к этим словам. Сергей Иванович Сыроватский принадлежал к поколению 1925 года; он прошел всю войну и был несколько раз тяжело ранен. Однако героическая юность сформировала основные черты его характера, которые впоследствии и позволили ему стать одним из ведущих астрофизиков-теоретиков. Перенеся тяжелейший инфаркт и будучи несколько месяцев оторванным от науки, он нашел в себе силы вернуться и продолжал работать столь же самозабвенно, как и до болезни. Не случайно его портрет висит в конференц-зале отде-

ления теоретической физики ФИАН рядом с портретами И. Е. Тамма и А. Д. Сахарова.

Область научных интересов С. И. Сыроватского была достаточно широка. Им получены важнейшие результаты в магнитной гидродинамике (классификация разрывов и ударных волн, вопрос об их эволюционности, анализ устойчивости тангенциальных разрывов), радиоастрономии (теория космического синхротронного излучения с учетом неоднородного распределения, диффузии и энергетических потерь электронов), астрофизике космических лучей (вопросы преимущественного ускорения тяжелых ядер и универсальности спектра), физике Солнца. В 1964 году им вместе с В. Л. Гинзбургом была написана фундаментальная монография «Происхождение космических лучей», на которую, несмотря на бурное развитие этой области за последние сорок лет, широко ссылаются до сих пор.

Мне бы хотелось выделить здесь одну черту, которая, как мне кажется, верно характеризует С. И. Сыроватского как ученого. Сергей Иванович любил точные решения. Именно поэтому он отдал много сил анализу двумерных течений в магнитной гидродинамике, в случае которых, как известно, методы теории функции комплексного переменного позволяют продвинуться существенно дальше, чем в трехмерном случае. Уже его первая большая научная работа — вопрос об эволюционности разрывов в магнитной гидродинамике — продемонстрировала удивительную ясность мысли и фундаментальность научного подхода. Фактически, необходимо было просто аккуратно пересчитать количество уравнений и количество неизвестных (или, на физическом языке, количество возмущений и количество волн, которые могли бы унести эти возмущения), чтобы получить результат, немедленно включенный в курс Ландау–Лифшица. И впоследствии, обсуждая на семинаре научную статью или работу студентов, Сергей Иванович особенно выделял четкость (или, наоборот, нечеткость) постановки физической задачи и формулировку граничных условий. Как мы увидим, именно анализ точных решений и будет основной темой настоящего курса.

Точные решения, хотя и приближенных уравнений, как считал С. И. Сыроватский, чрезвычайно важны для формирования нашей интуиции, позволяющей в дальнейшем понимать основные свойства происходящих процессов уже на качественном уровне. Здесь, в частности, проявлялась его принадлежность к школе И. Е. Тамма, утверждавшей, что в основе любой интерпретации наблюдений должна лежать фундаментальная физика. В этом вопросе, кстати, он спорил с Я. Б. Зельдовичем, который считал, что, напротив, необходимо прежде всего сконцентрироваться на анализе приближенных решений точных уравнений.

Следует особенно подчеркнуть, что несмотря на относительно малое количество ссылок на его журнальные работы, особенно в последние годы, его авторитет в научном мире был и остается чрезвычайно высоким. Я думаю, что помимо высочайшего научного потенциала, здесь важнейшую роль сыграли такие черты его характера, как прин-

ципиальность и доброжелательность. При этом он был совершенно лишен какой-либо зависти к чужим работам или чужим успехам. Вопросы приоритета его абсолютно не интересовали. Вместе с тем он всегда отстаивал принципы научной добросовестности и уважения к чужому труду, принципы, которым сам всегда неукоснительно следовал. Поэтому несомненно, что именно С. И. Сыроватскому, наряду с С. Б. Пикельнером, принадлежит заслуга в формировании атмосферы высоких научных и моральных стандартов, без которых было бы невозможным существование поистине золотого века советской астрофизики.

Помимо научной работы, С. И. Сыроватский много сил и времени уделял преподаванию. Он действительно создал научную школу, объединенную общей задачей — построением последовательной теории токовых слоев в применении к вспышечным процессам на Солнце. С. В. Буланов, В. А. Догель, Ю. Д. Жугжда, Б. В. Сомов, А. Г. Франк — вот лишь несколько имен его учеников, позволяющие судить о ее уровне. В этом проявилась его способность объединять и вести за собой в общем-то совершенно разных людей. Именно такая «интерференция», при которой удается сложить положительные потенциалы, а разногласия вынести за скобки, и является условием создания научной среды — уникального сообщества ученых, способного решать серьезные научные задачи.

Очень хорошо помню, как все перечисленные качества С. И. Сыроватского проявлялись при его общении со студентами и учениками. С самого начала обучения на кафедре я попал в удивительную атмосферу научного творчества, в которой главным было доброжелательное отношение к окружающим и полное равенство перед лицом науки. При этом сектор С. И. Сыроватского был погружен в подобную же ауру отделения теоретической физики ФИАН, что придавало нашему общению еще большую устойчивость и защищенность. Стоит ли говорить, что сейчас, работая на кафедре проблем физики и астрофизики МФТИ и читая годовой курс «магнитная гидродинамика», который когда-то слушал у Сергея Ивановича, я стараюсь во многом подражать моему учителю.

Вот почему в последние годы, выступая в новой аудитории, я все чаще начинаю свои доклады со слов: «Я был последним студентом Сергея Ивановича Сыроватского . . . » И очень приятно, что эти слова всегда звучат камертоном, помогая мне и аудитории настроиться на верный лад.

ВВЕДЕНИЕ

Осесимметричные стационарные течения, рассматриваемые в рамках идеальной магнитной гидродинамики (МГД), уже давно обсуждаются в связи со многими астрофизическими источниками. К этому классу течений относятся как аккреция на обычные звезды и черные дыры [Bondi, Hoyle, 1944; Bondi, 1952; Зельдович, Новиков, 1967а; Шапиро, Тьюколски, 1985; Липунов, 1987], так и аксиально симметричный звездный (солнечный) ветер [Parker, 1958; Тассуль, 1982; Михалас, 1982; Бисноватый-Коган, 1989; Lammers, Cassinelli, 1999], струйные выбросы из молодых звездных объектов [Lada, 1985; Reipurth, Bally, 2001] и эжекция частиц из магнитосферы радиопульсаров [Michel, 1991; Beskin, Gurevich, Istomin, 1993; Mestel, 1999]. Такие модели активно развиваются и в связи с теорией строения магнитосфер сверхмассивных черных дыр, которые, как полагают, являются «центральной машиной» в активных галактических ядрах и квазарах [Blandford, 1976; Lovelace, 1976; Phinney, 1983; Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987; Торн, Прайс, Макдональд, 1988].

Привлекательность МГД-моделей связана с их относительной простотой. Дело в том, что благодаря осесимметричности и стационарности (а также условию вмороженности) в общем случае имеют место пять «интегралов движения», сохраняющихся на осесимметричных магнитных поверхностях. Это, прежде всего, поток энергии (интеграл Бернулли) и z -компонента углового момента, а также электрический потенциал, энтропия и отношение потока частиц к потоку магнитного поля. Этот замечательный факт позволяет отделить задачу о структуре полоидального поля (структуре полоидального течения в гидродинамике) от задачи об ускорении частиц и структуре электрических токов. Решение последней задачи в заданном полоидальном поле выражается достаточно простыми алгебраическими соотношениями. Важно, что подобный подход легко обобщается и на течения вблизи вращающейся черной дыры, поскольку метрика Керра также является осесимметричной и стационарной. В результате стало возможным количественно исследовать чрезвычайно широкий класс течений — от намагниченного звездного (солнечного) ветра [Weber, Davis, 1967; Mestel, 1968; Sakurai, 1990] и струйных выбросов из молодых звезд [Blandford, Payne, 1982; Heyvaerts, Norman, 1989] до процессов, происходящих в магнитосфере радиопульсаров [Michel, 1969; Ardavan, 1976; Okamoto, 1978; Kennel, Fujimura, Okamoto, 1983] и сверхмассивных черных дыр в активных галактических ядрах [Camenzind, 1986; Takahashi et al., 1990; Chakrabarti, 1990]. В частности, была показана принципиальная возможность извлечения энергии из вращающейся черной дыры [Blandford, Znajek, 1977; Macdonald, Thorne, 1982]. Иными словами, в этом направлении достигнут несомненный прогресс.

С другой стороны, задача о нахождении структуры полоидального магнитного поля (структуры гидродинамического течения) сталкива-

ется с гораздо большими трудностями. Прежде всего, это связано со сложной структурой уравнения, описывающего стационарные осесимметричные течения. В общем случае оно оказывается нелинейным уравнением смешанного типа, меняющимся от эллиптического к гиперболическому на особых поверхностях и к тому же содержащим интегралы движения в виде свободных функций. Вообще говоря, аналогичные уравнения, восходящие к классическому уравнению Трикоми, обсуждались с начала этого века в связи с проблемой трансзвуковых гидродинамических течений [Гудерлей, 1960; Мизес, 1961; Смирнов, 1970; Франкль 1973]. В частности, для плоских течений чрезвычайно плодотворным оказывается метод преобразования годографа (приводящий к линейному уравнению Чаплыгина), который позволил существенно продвинуться в понимании рассматриваемых процессов [Франкль 1973; Ландау, Лифшиц, 1986]. В астрофизической же литературе за осесимметричными стационарными уравнениями равновесия закрепилось название уравнений Грэда–Шафранова. В конце пятидесятых годов они сформулировали уравнение подобного вида в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза [Шафранов, 1957; Grad, 1960]. Это уравнение, однако, относилось лишь к равновесным статическим конфигурациям и требовало, вообще говоря, существенного изменения при обобщении на случай трансзвуковых течений. Полная версия такого уравнения, включающая в себя все пять интегралов движения, была сформулирована Л. С. Соловьевым в 1963 году в третьем томе знаменитой серии сборников «Вопросы теории плазмы» и хорошо известна среди физиков. Однако, как это часто случается, в астрофизической литературе уравнение Грэда–Шафранова оставалось малоизвестным, так что оно неоднократно переоткрывалось заново.

В применении к астрофизике уравнения типа Грэда–Шафранова (в бессиловом приближении и в отсутствие гравитации) впервые широко обсуждались в 70-х годах прошлого века в связи с вопросом о строении магнитосфер радиопульсаров [Mestel, 1973; Scharlemann, Wagoner, 1973; Michel, 1973a; Okamoto, 1974; Mestel, Wang, 1979]. Полная нерелятивистская версия, содержащая пять инвариантов, независимо получена в работах [Okamoto, 1975] и [Heinemann, Olbert, 1978]. Релятивистское обобщение в плоском пространстве было найдено Х. Ардаваном [Ardavan, 1979], а затем исследовалось в десятках, если не в сотнях, работ, посвященных самым различным астрофизическим объектам [Mestel, 1973; Lovelace, Wang, Sulkanen, 1987; Боговалов, 1990; Pelletier, Pudritz, 1992; Shu et al., 1994]. Наконец, в [Lovelace et al., 1986] рассматривался случай метрики Шварцшильда, а в [Nitta, Takahashi, Tomimatsu, 1991; Бескин, Парьев, 1993] уравнение равновесия записано и в наиболее общей метрике Керра. Тем не менее, несмотря на большое количество работ, посвященных этому направлению, существенного прогресса здесь достигнуто не удалось.

Сложность, как мы увидим, состоит в том, что сама постановка прямой задачи в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова ока-

зывается нетривиальной. Так, в гидродинамическом пределе, когда имеется лишь три интеграла движения, задача требует четырех граничных условий для трансзвукового режима течения. Это значит, что на некоторой поверхности должны быть заданы, например, две термодинамические функции, а также две компоненты скорости. Однако для определения интеграла Бернулли, без знания которого уравнение равновесия, естественно, не может быть решено, необходимо задать все три компоненты скорости, что невозможно, поскольку третья компонента скорости сама должна быть найдена из решения. В подобной непоследовательности и заключена, собственно, одна из основных сложностей метода уравнения Грэда–Шафранова. Более того, с самого начала было совершенно ясно, что этот подход невозможно обобщить на случай неидеальных, неосесимметричных и нестационарных течений, что не позволяет учесть многие процессы, которые могут играть решающую роль в конкретных астрофизических источниках. Сюда относятся взаимодействие вещества с собственным излучением при аккреции [Шварцман, 1970; Bisnovatyi-Kogan, Blinnikov, 1980; Thorne, Flammang, Zytkov, 1981; Nobili, Turolla, Zampieri, 1991] и при формировании звездного (солнечного) ветра [Тассуль, 1982; Михалас, 1982], учет вязких сил [Шакура, 1972; Shakura, Sunyaev, 1973; Novikov, Thorne, 1973] и эффектов переноса излучения при дисковой аккреции [Abramowicz et al., 1988; Narayan, Yi, 1995b], а также кинетические эффекты [Гуревич, Димант, Зыбин, 1993].

Вместе с тем в некоторых случаях приближение идеальной гидродинамики является все же вполне приемлемым. Так, например, излучение, связанное с адиабатическим разогревом аккрецирующего вещества, оказывается малым по сравнению с эддингтоновской светимостью [Шапиро, Тьюколски, 1985], что дает возможность считать энтропию вещества постоянной. Идеальность среды обеспечивает и высокая проводимость космической плазмы. Приведенные примеры позволяют надеяться, что приближение идеальной (магнитной) гидродинамики способно достаточно точно описать реальные астрофизические течения. Поэтому анализ идеальных течений активно продолжался на протяжении последних тридцати лет. Большую роль здесь сыграла замечательная работа Р. Бленфорда и Д. Пайна [Blandford, Payne, 1982], в которой было показано, что уравнение Грэда–Шафранова имеет достаточно широкий класс автомодельных решений. В результате анализ таких автомодельных решений, для получения которых уравнение Грэда–Шафранова сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению, сформировал одно из самых популярных направлений исследований, посвященных астрофизике компактных объектов (см., например, [Low, Tsinganos, 1986; Lovelace, Wang, Sulkanen, 1987; Li, Chiueh, Begelman, 1992; Sauty, Tsinganos, 1994; Sauty, Tsinganos, Trussoni, 1999]).

Однако сложности, связанные с применением метода уравнения Грэда–Шафранова, оказались все же слишком серьезными. Внутренняя непоследовательность, о которой говорилось выше, не позволяла

в общем случае решать прямые задачи, т. е. определять структуру течения в некоторой области по заданным физическим параметрам на ее границе. Все это в полной мере относится и к автомоделным решениям, которые в своей основе требуют самоподобия граничных условий. В результате за последние двадцать лет, в течение которых исследования в данной области проводились особенно интенсивно, фактически так и не удалось построить ни одной общепринятой модели для конкретных астрофизических объектов. Поэтому неудивительно, что подавляющее большинство исследователей, интересующихся прежде всего астрофизическими приложениями, в последнее время перенесло центр тяжести своих работ на совершенно другой класс уравнений, а именно на временные задачи установления, решение которых возможно лишь при использовании численных методов [Pneuman, Kopp, 1971; Hunt, 1979; Macdonald, 1984; Hawley, Smarr, Wilson, 1984; Shima et al., 1985; Pudritz, Norman, 1986; Petrich et al., 1989; Ruffert, Arnett, 1994; Cao, Spruit, 1994; Ustyugova et al., 1995].

Тем не менее все же существует подход, позволяющий аналитически решать прямые задачи в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова. Например, подобная возможность возникает в случае, когда известно его точное решение и мы исследуем течения, которые слабо отличаются от известного. Таким точным решением, как мы увидим, служит сферически-симметричная аккреция (эжекция) вещества. В результате, зная структуру течения в нулевом приближении, можно непосредственно из граничных условий с нужной точностью определить как положение особых поверхностей, так и все интегралы движения, что и позволяет решать уравнение равновесия в прямой постановке. Тем самым появляется нетривиальная возможность аналитического исследования течений. Подробному введению в аналитические методы анализа уравнения Грэда–Шафранова и посвящена настоящая книга.

Необходимо сразу подчеркнуть, что обсуждаемые ниже аналитические методы позволяют получить решение лишь в исключительных случаях. Поэтому на самом деле нашей основной задачей будет не построение работоспособных моделей конкретных компактных объектов, а выяснение некоторых ключевых свойств, которыми должны обладать МГД-течения в окрестности реальных космических источников. Одновременно на простых примерах будут прояснены возможности и пределы применимости метода уравнения Грэда–Шафранова. Таким образом, настоящая книга посвящена не астрофизическим, а чисто физическим аспектам теории. Однако все приложения являются астрофизическими, так что можно надеяться, что книга будет интересна и для астрофизиков. Тем более что ключевые физические результаты, полученные в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова, естественно, не должны зависеть от метода вычислений.

ГЛАВА 1

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ — КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АККРЕЦИИ И ЭЖЕКЦИИ

1.1. Астрофизическое введение — аккреция на компактные объекты

Вопрос о гидродинамической аккреции и эжекции находится в центре внимания астрофизики компактных объектов с самого начала ее возникновения. С ним связаны, например, проблема активности галактических ядер и квазаров [Зельдович, Новиков, 1967a], механизм образования и устойчивости струйных выбросов [Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987; Торн, Прайс, Макдональд, 1988], а также природа галактических рентгеновских источников [Сюняев и др., 1991; Mirabel et al., 1992].

Последовательная теория таких течений была заложена еще в сороковых-пятидесятых годах, когда Х. Бонди и Ф. Хойл подробно исследовали задачу о трансзвуковой аккреции идеального газа на гравитирующий центр [Bondi, Hoyle, 1944; Bondi, 1952], а Е. Паркер рассмотрел сферически-симметричное трансзвуковое истечение изотермического газа [Parker, 1958]. Особого же расцвета теория гидродинамической аккреции достигла после обнаружения в начале семидесятых годов галактических рентгеновских источников, связанных с аккрецирующими нейтронными звездами и черными дырами солнечных масс, а также квазаров и других активных галактик, в центрах которых, как полагают, находятся сверхмассивные черные дыры. Тогда стало ясно, что основным источником активности всех перечисленных объектов является гравитационная энергия, выделяющаяся при аккреции. Например, для аккреции на нейтронную звезду энерговыделение L должно полностью определяться величиной темпа аккреции \dot{M} (массы, падающей на нейтронную звезду в единицу времени):

$$L = \frac{GM\dot{M}}{R}. \quad (1.1)$$

При этом важнейшим аргументом, подтверждающим правильность теории, явилось отсутствие рентгеновских источников со светимостями, превышающими эддингтоновский предел:

$$L_{\text{Ед}} \approx 10^{38} \frac{M}{M_{\odot}} \text{ эрг/с}. \quad (1.2)$$

При аккреции на черную дыру значительная часть излучения, вообще говоря, может поглощаться ею. Тем не менее для грубой оценки энерговыделения в аккреционном диске обычно используют формулу

$$L \sim \eta \dot{M} c^2, \quad (1.3)$$

где $\eta \approx 0,06 \div 0,4$. Отметим, что даже для адиабатических течений с нулевой вязкостью точные решения были получены лишь для ряда частных случаев, например для сферически-симметричной аккреции. В этом случае структура течения фактически определена: движение происходит по радиусу, а наличие интегралов движения позволяет полностью определить характеристики течения.

Все сказанное выше относится и к проблеме эжекции газа из звезд (прежде всего, ранних спектральных классов). В этом случае также отсутствуют точные двумерные решения, хотя численно данный вопрос исследован достаточно подробно [Черепашук, 1988; Bjorkman, Cassinelli, 1993; Owocki, Cranmer, Blondin, 1994]. Напомним, что здесь одна из главных задач связана с проблемой предельной скорости истечения. Дело в том, что в середине прошлого века существовало две точки зрения на вопрос о структуре солнечного ветра. Они отвечали двум различным асимптотикам уравнений гидродинамики, соответствующим сверхзвуковому («ветер») и дозвуковому («бриз») режиму истечения. Именно Паркеру принадлежит заслуга в выяснении выделенности трансзвукового режима и роли гравитационного поля, позволяющего преодолеть звуковой барьер. Понятно, что прямое доказательство сверхзвукового режима истечения солнечного ветра стало возможным лишь после прямых измерений, выполненных с искусственных спутников Земли.

1.1.1. Аккреционные диски. Простейшие адиабатические (в том числе и сферически-симметричные) модели аккреции и эжекции позволили существенно прояснить многие особенности излучения реальных астрофизических объектов. Вместе с тем такие модели, конечно же, не всегда позволяют получить даже качественное согласие с наблюдаемыми данными. В частности, достаточно скоро стало очевидно, что при адиабатической аккреции газа на черную дыру его излучение оказывается слишком мало. Подобный результат находится уже в прямом противоречии с данными наблюдений кандидатов в черные дыры. Впрочем, объяснение этого факта было быстро найдено — сильное энерговыделение может происходить в аккреционных дисках, в которых эффекты неидеальности неизбежно становятся определяющими. Такие аккреционные диски естественным образом возникают в двойных системах, у которых удельный угловой момент аккрецирующего вещества достаточно велик.

Очевидно, что движение газа в аккреционных дисках не может быть описано в рамках уравнений идеальной гидродинамики. Действительно, аккреционный диск представляет собой газ, который приближается к компактному объекту (нейтронной звезде, черной дыре)

по спирали за счет вязкого трения, выделяя свою гравитационную энергию в виде тепла и излучения. Если газ излучает значительную часть своей энергии и, значит, сам остается холодным, то диск является тонким. Приближение тонкого диска хорошо выполняется во внешних его областях. Так, оценки показывают, что для активных ядер этот режим реализуется при $r \gg r_g$, где величина

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.4)$$

представляет собой гравитационный радиус. Другой крайний случай — толстый диск, в котором излученная энергия полностью поглощается аккрецирующим веществом. Он может быть реализован лишь при достаточно больших темпах аккреции. При этом приближение толстого диска может быть выполнено лишь вблизи черной дыры ($r < 20r_g$), где и происходит основное энерговыделение.

Для активных ядер рентгеновский спектр, ассоциируемый с центральными областями аккреционного диска ($r < 10r_g$), обычно можно представить в виде суммы двух компонент: жесткой степенной (до 100 кэВ) и более мягкой в континууме и линиях излучения (в основном в отраженной линии железа — 6,4 кэВ). Поэтому вероятнее всего, что в аккреции на центральный объект участвует как горячий ($T > 10^8$ К), так и сравнительно холодный ($T \sim 10^6$ К) газ [Mushotzky, Done, Pounds, 1993]. Горячая и холодная фазы, скорее всего, интенсивно взаимодействуют, но рассмотреть это взаимодействие не представляется возможным до тех пор, пока не будет определена геометрия источника — взаимное расположение горячей и холодной фаз.

В модели *диск + корона* холодная фаза представляет собой диск, а горячая — оптически тонкую корону над ним. В этой модели нагрев короны может быть связан, например, с перезамыканием мелкомасштабного магнитного поля, выносимого из области диска за счет турбулентной диффузии. Предположение о наличии короны наиболее последовательно объясняет особенности спектров дисков [Liang, 1977; Haardt, Marashi, 1991, 1993]. Действительно, в таком случае мягкие фотоны от диска претерпевают обратное комптоновское рассеяние на горячем веществе короны, что и дает наблюдаемый жесткий степенной спектр. При этом часть высокоэнергетичных фотонов возвращается к диску, нагревая его, что мы и наблюдаем в виде эмиссионных линий. Как показывает моделирование, распределение энергии по спектру лучше объясняется, если предположить, что корона неоднородна, поэтому энергия выделяется порциями, а не однородно во времени, подобно тому, как это имеет место в звездных коронах [Haardt, Marashi, Ghisellini, 1994]. Как мы увидим, корона может играть заметную роль и в формировании струйных выбросов.

Альтернативная модель объясняет некоторые особенности спектра в предположении, что система представляет собой *холодную облака, поруженные в горячую среду* [Guilbert, Rees, 1988; Celotti, Fabian, Rees, 1992; Kuncic, Celotti, Rees, 1997]. В этом случае вблизи цен-

трального объекта диск как таковой отсутствует. Важным преимуществом данной модели является то, что в ней легко добиться теплового и вязкого равновесия. Основное ее отличие от предыдущей модели заключается в том, что линия железа не обязательно излучается в непосредственной близости от центрального объекта. Эта модель дает хорошие результаты для источников нашей Галактики, связанных с аккреционными дисками. Кроме того, она может объяснить некоторые особенности спектров галактических ядер.

Теория гидродинамической дисковой аккреции на компактные объекты (нейтронные звезды, черные дыры) активно развивается с конца шестидесятых годов [Lynden-Bell, 1969; Шакура, 1972; Shakura, Sunyaev, 1973; Novikov, Thorne, 1973], однако до сих пор многие ее детали оставались невыясненными. Поэтому приходилось пользоваться упрощенными решениями, такими как стандартная модель (α -диск) [Shakura, Sunyaev, 1973], а также их различными модификациями [Abramowicz et al., 1988; Narayan, Yi, 1994].

Не нужно забывать и о том, что в случае аккреции на черную дыру эффекты общей теории относительности приводят к двум новым существенным свойствам.

1. Во-первых, как хорошо известно, на малых расстояниях от черной дыры отсутствуют устойчивые круговые орбиты. Так, для шварцшильдовской (невращающейся) черной дыры радиус r_0 предельной орбиты составляет [Шапиро, Тьюколски, 1985]

$$r_0 = 3r_g. \quad (1.5)$$

Это значит, что аккрецирующее вещество, попавшее в область $r < r_0$, достаточно быстро, точнее, за динамическое время

$$\tau_d \sim \left[\frac{v_r(r_0)}{c} \right]^{-1/3} \frac{r_g}{c}, \quad (1.6)$$

приблизится к горизонту черной дыры. Важно, что такое движение будет иметь место и при отсутствии вязкости. При аккреции же на нейтронную звезду со слабым магнитным полем медленное движение по спирали происходит вплоть до самой поверхности. Отметим, что в большинстве случаев при анализе релятивистских эффектов, учет которых необходим при построении последовательной модели аккреции на черную дыру, обсуждение ограничивалось использованием модельного гравитационного потенциала Пачинского–Вииты [Paczynski, Wiita, 1980]:

$$\varphi_g = -\frac{GM}{r - r_g}, \quad (1.7)$$

который, хотя и позволяет во многих случаях смоделировать реальную ситуацию (например, рассчитать радиус последней устойчивой орбиты), все же не полностью соответствует метрике Шварцшильда.

2. Во-вторых, принципиально важным является то обстоятельство, что аккреция на черную дыру должна иметь трансзвуковой характер.

Действительно, как будет показано ниже, на горизонте черной дыры течение должно быть сверхзвуковым. С другой стороны, как будет видно из оценки (1.14), в рамках стандартного подхода условие малости радиальной скорости ($v_r \ll c_s$) остается справедливым вплоть до последней устойчивой орбиты, по крайней мере для не слишком больших темпов аккреции. Поэтому звуковая поверхность, на которой по определению полоидальная скорость вещества сравнивается со скоростью звука, расположена где-то между горизонтом и последней устойчивой орбитой. Таким образом, вопрос о структуре аккреционного течения на черную дыру требует последовательного анализа трансзвукового режима течения.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что для потенциала Пачинского–Вииты (1.7):

а) радиус последней устойчивой орбиты, как и в метрике Шварцшильда, задается соотношением (1.5);

б) орбитальная скорость $v = v_\varphi$ на последней устойчивой орбите отличается от релятивистского значения $v_{\text{рел}} = c/2$:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} c \quad (1.8)$$

(соответственно будет отличаться и удельный угловой момент $L = rv_\varphi$).

Здесь же можно упомянуть и еще один чрезвычайно интересный вопрос, который также связан с использованием упрощенных уравнений. Он касается проблемы причинности, возникающей в случае стандартной записи вязких членов в уравнениях гидродинамики [Narayan, 1992; Narayan, Loeb, Kumar, 1994]. При использовании стандартного подхода приходилось ставить дополнительные граничные условия на горизонте черной дыры [Narayan, Kato, Honma, 1997; Chen, Abramowicz, Lasota, 1997], который по определению не может быть причинно связан с аккрецирующей плазмой.

Следует отметить, что интерес к теории аккреционных дисков со временем не ослабевает, что не удивительно, поскольку увеличение чувствительности приемной аппаратуры постоянно дает новую и новую информацию о свойствах аккрецирующих систем. Поэтому в последнее время наблюдался несомненный рост количества публикаций, посвященных данному вопросу [Igumenshchev, Abramowicz, Narayan, 2000; Artemova et al., 2001]. При этом все чаще исследование аккреции проводится с использованием метрики Keppa [Riffert, Herold, 1995; Peitz, Appl, 1997, 1998; Gammie, Popham, 1998ab; Beloborodov, 1998], позволяющей естественным образом включить также и эффекты, связанные с вращением черной дыры. Большое внимание было уделено гидродинамическим уравнениям с ненулевой вязкостью, в которых, однако, не возникает трудностей, связанных с причинностью [Gammie, Popham, 1998ab; Kley, Papaloizou, 1997]. Это позволило снять многие вопросы, относящиеся к проблеме граничных условий.

1.1.2. Стандартная модель. Напомним, что в основе стандартной модели лежат два упрощающих предположения (см., например, [Шапиро, Тьюколски, 1985]):

1) предположение о том, что тензор вязких напряжений $t_{r\varphi}$, приводящий к потере углового момента плазмы и, следовательно, к ее аккреции, может быть представлен в модельном виде:

$$t_{r\varphi} = \alpha_{SS} P, \quad (1.9)$$

где P — давление газа, а феноменологический параметр $\alpha_{SS} < 1$ считается постоянной величиной;

2) предположение о полном переизлучении *in situ* энергии, выделяемой в результате вязкого трения:

$$F^+ = F^-. \quad (1.10)$$

При этом величина F^+ соответствует вязкому нагреву плазмы единичной площади диска:

$$F^+ \approx H t_{r\varphi} r \frac{d\Omega}{dr}, \quad (1.11)$$

а тепловое излучение единицы площади, пропорциональное четвертой степени температуры, обычно оценивается как

$$F^- \approx \frac{2}{3} \frac{a T^4 c}{\kappa \rho H}. \quad (1.12)$$

Здесь H — толщина аккреционного диска; угловая скорость $\Omega = v_\varphi/r$; κ — коэффициент непрозрачности; a — постоянная излучения.

Как хорошо известно, сделанных предположений оказывается достаточно для того, чтобы в случае тонкого диска все параметры течения можно было найти с помощью простых аналитических соотношений. В частности, в рамках этой модели

— вращение плазмы происходит практически с кеплеровской скоростью: $v_\varphi \approx v_K = (GM/r)^{1/2}$;

— толщина диска H определяется балансом силы гравитации и градиента давления:

$$\frac{H}{r} \approx \frac{c_s}{v_K}; \quad (1.13)$$

— радиальная скорость на расстояниях, больших радиуса звуковой поверхности, мала по сравнению с азимутальной:

$$\frac{v_r}{v_K} \approx \alpha_{SS} \frac{c_s^2}{v_K^2}; \quad (1.14)$$

— звуковая поверхность находится вблизи последней устойчивой орбиты.

При этом величинами, полностью характеризующими аккрецию, являются естественные физические параметры: масса компактного объекта M , скорость аккреции \dot{M} и параметр α_{SS} . Именно чрезвычай-

ная простота стандартной модели и стала причиной того, что в течение многих лет она рассматривалась как базовая [Шапиро, Тьюколски, 1985; Липунов, 1987].

С другой стороны, сама природа ключевого параметра модели — величины α_{SS} — до сих пор остается неясной. Во всяком случае она не может быть связана с обычной молекулярной вязкостью, поскольку тогда величина α_{SS} не превышала бы значений 10^{-6} [Шапиро, Тьюколски, 1985]. Однако, как непосредственно следует из наблюдений, α_{SS} оказывается значительно больше. Естественно было бы связать ее с турбулентностью (магнитной) [Balbus, Hawley, 1998]; вместе с тем лишь в самое последнее время появились первые работы, в которых удалось определить величину параметра α_{SS} «из первых принципов» [Brandenburg et al., 1995; Hawley, Gammie, Balbus, 1995; Stone et al., 1996; Arlt, Rüdiger, 2001].

Кроме того, в последние годы возникла проблема так называемой медленной аккреции: было обнаружено, что многие ядра галактик излучают намного меньше, чем предсказывает стандартная модель (до $10^{-7} \dot{M} c^2$). Именно этот случай реализуется в нашей собственной Галактике [Narayan et al., 1998; Mahadevan, 1998], а также в гигантских эллиптических галактиках, проявляющих активность, но с низкой светимостью [Reynolds et al., 1996a; DiMatteo, Fabian, 1997; Mahadevan, 1997]. Относительно неэффективной (в смысле регистрируемого излучения) является и сверхкритическая аккреция, при которой темпы аккреции существенно превышают эддингтоновский предел и достигается равновесие между давлением падающего вещества и давлением излучения, выходящего из внутренних слоев. Подобная ситуация может реализоваться в радиоспокойных квазарах и в квазарах с широкими линиями поглощения.

Объяснить малую излучательную способность в указанных случаях можно следующим образом. Черные дыры отличаются от других астрофизических объектов тем, что не имеют поверхности и поглощают не только падающее на них вещество, но и излучение. Поэтому если «заставить» газ либо не излучать свою гравитационную или магнитную энергию, либо направлять излученный поток прямо на черную дыру, то вся энергия поглотится вместе с веществом, а удаленный наблюдатель увидит, что переработка гравитационной энергии в уходящее излучение происходит с низкой эффективностью. Первый случай реализуется, если темпы аккреции очень малы. Второй же может реализоваться в оптически толстых дисках, когда выделяемая в виде тепла энергия не успевает излучиться и в конечном счете все равно попадает в черную дыру вместе с веществом.

Важным наблюдательным тестом здесь было бы сравнение эффективности излучения слабых источников, ассоциируемых с черными дырами, и других аккректоров, например нейтронных звезд. Если бы оказалось, что аккрецирующие черные дыры излучают существенно менее эффективно, появился бы сильный аргумент в пользу того,

что поглощение энергии черной дырой действительно имеет место. Однако ясности в данном вопросе пока нет, поскольку имеются публикации как подтверждающие [Garcia et al., 2001], так и опровергающие [Abramowicz, Kluźniak, Lasota, 2002] это утверждение. Подобная неопределенность связана со сложностями в выделении группы самых слабых источников.

Ясно, что для объяснения природы слабоизлучающих объектов нужно включить в рассмотрение радиальный перенос энергии. Впервые такой анализ был выполнен в работе Б. Пачинского и Г. С. Бисноватого–Когана [Paczynski, Bisnovaty-Kogan, 1981]. Они показали, что усредняя двумерные (т. е. осесимметричные стационарные) уравнения гидродинамики в направлении, перпендикулярном плоскости тонкого диска, можно свести их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых все величины будут зависеть лишь от радиальной координаты r . В простейшей нерелятивистской версии соответствующая система уравнений выглядит следующим образом [Artemova et al., 2001]:

— уравнение непрерывности:

$$\dot{M} = 2\pi r H \rho v; \quad (1.15)$$

— r -компонента уравнения Эйлера:

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + (\Omega^2 - \Omega_K^2) r; \quad (1.16)$$

— φ -компонента уравнения Навье–Стокса, проинтегрированная по r :

$$\frac{\dot{M}}{4\pi} (l - l_0) + r^2 H t_{r\varphi} = 0; \quad (1.17)$$

— θ -компонента уравнения Эйлера, эквивалентная (1.13):

$$H = \frac{c_s}{\Omega_K}; \quad (1.18)$$

— уравнение энергии:

$$F^+ - F^- = -\frac{\dot{M}}{2\pi r} \left[\frac{dE}{dr} + P \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]. \quad (1.19)$$

Здесь $E = 3RT/2 + aT^4/\rho$ есть полная энергия на одну частицу (где \mathcal{R} — газовая постоянная); $l = \Omega r^2$ — удельный угловой момент; l_0 — константа интегрирования. При этом плотность ρ , давление P , скорость $v = v_r$ и энергия E соответствуют своим значениям в экваториальной плоскости. В девяностых годах XX века анализ уравнений (1.15)–(1.19) и их обобщений, позволяющих включить в рассмотрение эффекты общей теории относительности, представлял собой одно из основных направлений, посвященных дисковой аккреции на компактные объекты [Riffert, Herold, 1995; Peitz, Appl, 1997, 1998; Gammie, Popham, 1998ab; Beloborodov, 1998].

1.1.3. ADAF, ADIOS и другие. В качестве еще одного из решений проблемы неэффективности энерговыделения при аккреции были предложены течения с доминирующей адвекцией (переносом) энергии аккрецирующим веществом — так называемые ADAF (advection dominated accretion flows) [Ichimaru, 1977; Narayan, Yi, 1994]. Такое течение должно иметь вид толстого квазисферического диска, в котором радиальная скорость близка к тороидальной: $v_r \sim v_\varphi$. Этот режим может быть осуществлен в случае достаточно медленной ($\dot{M} \ll \dot{M}_{\text{Ед}}$) аккреции оптически тонкого газа.

В основе указанных моделей лежит хорошо известное свойство, согласно которому при вязком трении нагрев приводит к увеличению температуры тяжелых частиц (ионов), тогда как легкие частицы (электроны), с которыми связан механизм излучения, могут оставаться холодными [Брагинский, 1963]. Если предположить, что ионы и электроны достаточно медленно обмениваются энергией, то вязкий нагрев не должен сопровождаться эффективной ее потерей. Поэтому энергия будет переноситься вместе с аккрецирующим веществом и в итоге поглощаться черной дырой. Эта модель была разработана достаточно детально [Narayan, Yi, 1995ab; Abramowicz et al., 1995; Chen et al., 1995; Igumenshchev, Abramowicz, Novikov, 1998; Medvedev, Narayan, 2000] и позволила объяснить множество наблюдательных фактов, например светимость и спектр центрального источника в нашей Галактике [Narayan, Mahadevan, Quataert, 1998; Mahadevan, 1998]. Она также обсуждалась в связи с активными эллиптическими галактиками с низкой светимостью [Reynolds et al., 1996a; DiMatteo, Fabian, 1997; Mahadevan, 1997], с галактикой NGC4258 [Lasota et al., 1996] и с некоторыми другими источниками в нашей Галактике. Вместе с тем иногда возникали и сложности с согласованием модели с наблюдениями. В частности, не наблюдался предсказанный ею поток от источников в радиодиапазоне [Herrnstein et al., 1998; DiMatteo et al., 1999] (см., однако, [Celotti, Rees, 1999]).

Кроме того, и в физическом описании рассматриваемой модели имеют место явные пробелы.

1. В рамках ADAF предполагается, что нагрев ионов происходит более эффективно, чем нагрев электронов, и что обмен энергией между двумя сортами частиц является малоэффективным. Поэтому вещество диска должно существовать в виде двухтемпературной плазмы, так что вблизи внутреннего края аккреционного диска температуры ионов и электронов должны сильно отличаться друг от друга ($T_i \sim 10^{12}$ K, $T_e \sim 10^9$ K) [Quataert, 1998; Gruzinov, 1998; Begelman, Chiueh, 1988; Blackman, 1999; Quataert, Gruzinov, 1999]. Однако подобные предположения не являются очевидными. Например, не учтена возможность нагрева электронов за счет пересоединения магнитных силовых линий [Bisnovatyi-Kogan, Lovelace, 1997], хотя этот процесс, несомненно, имеет место (он непосредственно наблюдается в солнечных вспышках) и очень эффективен.

2. Предполагается, что суммарная энергия падающего газа положительна, а значит диск в целом не является гравитационно связанным. В результате в такой системе после перераспределения энергии и падения части газа на черную дыру могут возникнуть истекающие струи (джеты), которые в рамках ADAF не учитываются [Blandford, Begelman, 1999].

3. Рассмотренное решение является автомодельным; поэтому в его рамках невозможно удовлетворить естественным граничным условиям на бесконечности и вблизи гравитирующего центра.

4. Есть указания на то, что подобный режим аккреции неустойчив относительно тепловых возмущений, концентрации вещества в сгустки и т. п. [Blandford, 2002].

Недавно была предложена модифицированная модель течений с доминирующей адвекцией, в принципе решившая проблему положительной энергии связи, — так называемая ADIOS (advection dominated inflow-outflow solutions) [Blandford, Begelman, 1999]. Помимо втекающего потока с отрицательной суммарной энергией в ней введен истекающий более или менее изотропный ветер. В рамках этой модели только малая часть вещества, поступающего с больших расстояний, в итоге падает на черную дыру. Тем самым объясняется низкая эффективность излучения и решается проблема избытка излучения в радиодиапазоне [Beckert, 2000; Becker, Subramanian, Kazanas, 2001].

Однако и эта модель сталкивается с определенными трудностями.

1. Для эжекции вещества необходимо, чтобы его энергия (величина интеграла Бернулли E) была положительной. Вместе с тем при дисковой аккреции энергия связи газа, вращающегося по кеплеровским орбитам, заведомо отрицательна. Как показал подробный анализ, для достаточно малой вязкости ($\alpha_{SS} < 0,1$) такой режим истечения оказывается невозможным [Abramowicz, Lasota, Igumenshchev, 2000]. Об этом говорят как условия регулярности на особых поверхностях, однозначно показывающие, что энергия падающего вещества должна быть отрицательной, так и прямые численные расчеты [Narayan, Kato, Honma, 1997; Chen, Abramowicz, Lasota, 1997; Abramowicz et al., 1988; Gammie, Popham, 1998ab; Ogilvie, 1999].

2. Положительная величина энергии связи является необходимой, но не достаточной причиной истечения (как известно, интеграл Бернулли в сферически-симметричной аккреции Бонди положителен).

Таким образом, в целом можно сделать вывод о том, что даже в простейшем гидродинамическом приближении теория аккреции на компактные объекты еще очень далека от своего завершения. В частности, в рамках чисто гидродинамического подхода пока не удалось построить достаточно убедительную модель центральной машины в активных галактических ядрах, которая приводила бы к эффективному истечению вещества и, следовательно, давала начало струйным выбросам, уносящим значительную часть освобождаемой энергии. Истечение могло бы быть связано с сильно нагретой короной, но в этом случае рентгеновая светимость активных ядер должна была

бы быть значительно выше, чем следует из наблюдений. Кроме того, несмотря на различные модификации, модели течений с доминирующей адвекцией пока не дают последовательного объяснения неэффективно излучающих источников. Однако несомненно, что для полного описания аккреции учет адвекции — как перемешивания вещества, так и явлений переноса энергии — совершенно необходим [Bisnovatyi-Kogan, Lovelace, 2001].

С другой стороны, нельзя не отметить, что подробные расчеты показали достаточную устойчивость стандартной модели. В частности, для широкого класса аккреционных течений и в широком интервале расстояний от гравитирующего центра азимутальная скорость вращения аккрецирующего вещества мало отличается от кеплеровской скорости, а звуковая поверхность находится вблизи последней устойчивой орбиты. Отличие возникает лишь вблизи горизонта черной дыры, когда становятся существенными релятивистские эффекты.

1.2. Основные свойства трансзвуковых гидродинамических течений

1.2.1. Основные уравнения. Перейдем к подробному описанию осесимметричных стационарных гидродинамических течений. Начнем с самого начала. Запишем уравнения идеальной стационарной ($\partial/\partial t = 0$) гидродинамики в плоском пространстве [Ландау, Лифшиц, 1986]. Полная система уравнений включает в себя

— уравнение непрерывности:

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0; \quad (1.20)$$

— уравнение Эйлера:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{m_p n} - \nabla\varphi_g; \quad (1.21)$$

— условие идеальности:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0; \quad (1.22)$$

— уравнение состояния:

$$P = P(n, s). \quad (1.23)$$

Последнее соотношение может быть переписано в виде

$$dP = m_p n dw - n T ds. \quad (1.24)$$

Здесь n [см⁻³] — концентрация; s — энтропия на одну частицу (безразмерна); w [см²/с²] — удельная энтальпия; m_p [г] — масса частиц ($\rho = m_p n$ — плотность); T [эрг] — температура в энергетических единицах; ниже c_s [см/с] — скорость звука. Для политропного уравнения состояния:

$$P = k(s)n^\Gamma, \quad (1.25)$$

которым мы для простоты будем пользоваться в дальнейшем, для $\Gamma = \text{const} \neq 1$ имеем

$$c_s^2 = \frac{1}{m_p} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_s = \frac{1}{m_p} \Gamma k(s) n^{\Gamma-1}; \quad (1.26)$$

$$w = \frac{c_s^2}{\Gamma - 1}; \quad (1.27)$$

$$T = \frac{m_p}{\Gamma} c_s^2. \quad (1.28)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Воспользовавшись термодинамическим тождеством (1.24) и явными выражениями (1.25)–(1.28), покажите, что для $\Gamma = \text{const} \neq 1$ функция $k(s)$ должна иметь вполне определенный вид:

$$k(s) = k_0 e^{(\Gamma-1)s}. \quad (1.29)$$

Уже здесь можно сделать ряд важных замечаний.

1. Уравнение Эйлера (1.21) вместе с соотношениями (1.20), (1.22) и (1.24) может быть переписано в виде закона сохранения потока энергии:

$$\nabla \cdot \left[n \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w + \varphi_g \right) \right] = 0. \quad (1.30)$$

Используя теперь уравнение непрерывности (1.20), получаем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla E = 0, \quad (1.31)$$

где

$$E = \frac{v^2}{2} + w + \varphi_g. \quad (1.32)$$

Это хорошо известный интеграл Бернулли, который, как мы видим, должен сохраняться на линиях тока.

2. Уравнение энергии (1.30) вместе с уравнением Эйлера (1.21) могут быть переписаны в форме четырехмерного закона сохранения энергии-импульса:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.33)$$

где для $\varphi_g = 0$

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{nm_p v^2}{2} + n\epsilon & nm_p \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \\ m_p n v^i & P \delta^{ik} + nm_p v^i v^k \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Здесь ϵ — внутренняя энергия. В дальнейшем греческие индексы α, β будут соответствовать четырехмерным величинам, а латинские индексы i, j, k — трехмерным.

3. Уравнения гидродинамики представляют собой систему из пяти нелинейных уравнений для пяти неизвестных: двух термодинамических функций и трех компонент скорости \mathbf{v} .

УПРАЖНЕНИЕ. Проверьте соотношения (1.30)–(1.34).

1.2.2. Сферически-симметричное течение. В качестве простейшего, но очень важного примера рассмотрим сферически-симметричное течение. Поскольку, как мы видели, уравнения идеальной гидродинамики могут быть записаны в виде законов сохранения, для чисто радиального течения имеем

— уравнение непрерывности:

$$\Phi = 4\pi r^2 n(r) v(r) = \text{const}; \quad (1.35)$$

— условие идеальности:

$$s = \text{const}; \quad (1.36)$$

— уравнение энергии:

$$E = \frac{v^2(r)}{2} + w(r) + \varphi_g(r) = \text{const}. \quad (1.37)$$

В результате, зная три параметра, Φ , s и E , можно определить все физические характеристики течения. Действительно, переписав уравнение Бернулли (1.37) как

$$E = \frac{\Phi^2}{32\pi^2 n^2 r^4} + w(n, s) + \varphi_g(r), \quad (1.38)$$

мы видим, что оно содержит лишь одну неизвестную величину — концентрацию n . Следовательно, это алгебраическое уравнение в неявной форме задает концентрацию n как функцию трех инвариантов и радиуса r :

$$n = n(E, s, \Phi; r). \quad (1.39)$$

Вместе с энтропией s данное соотношение дает возможность определить и все остальные термодинамические функции, а благодаря соотношению (1.35) — и скорость течения v .

Необходимо подчеркнуть, что уравнение (1.38) имеет особенность на звуковой поверхности. Чтобы показать это, определим производную dn/dr . Дифференцируя уравнение (1.38) по r , для гравитационного потенциала $\varphi_g = -GM/r$ имеем

$$\frac{dn}{dr} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_s - \frac{\Phi^2}{16\pi^2 n^3 r^4} \right] - \frac{\Phi^2}{8\pi^2 n^2 r^5} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (1.40)$$

Воспользовавшись термодинамическим соотношением (1.24), для логарифмической производной η_1 получаем

$$\eta_1 = \frac{r}{n} \frac{dn}{dr} = \frac{2v^2 - GM/r}{c_s^2 - v^2} = \frac{2 - GM/(rv^2)}{-1 + c_s^2/v^2} = \frac{N}{D}. \quad (1.41)$$

Видно, что производная (1.41) имеет особенность, если скорость вещества равна скорости звука: $v = c_s = c_*$ ($D = 0$). Следовательно, для гладкого прохождения звуковой поверхности $r = r_*$ должно быть вы-

полнено дополнительное условие:

$$N(r_*) = 2 - \frac{GM}{r_* c_*^2} = 0. \quad (1.42)$$

Иными словами, трансзвуковые течения являются двухпараметрическими. Как показано на рис. 1.1, звуковая поверхность является X -точкой на плоскости «расстояние r —скорость v ».

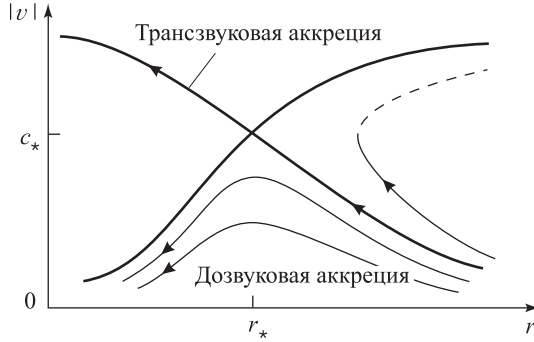


Рис. 1.1. Структура сферически-симметричной аккреции. Трансзвуковое течение соответствует критической скорости аккреции $\Phi = \Phi_{\text{crit}}$ (см. (1.55)); кривые ниже X -точки — дозвуковой аккреции с $\Phi < \Phi_{\text{crit}}$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Для случая сферически-симметричной трансзвуковой аккреции (так называемой аккреции Бонди), при которой аккрецирующее вещество имеет нулевую скорость при $r \rightarrow \infty$, интеграл Бернулли E может быть выражен через скорость звука на бесконечности:

$$E = w_\infty = \frac{c_\infty^2}{\Gamma - 1}.$$

Используя соотношения (1.35)–(1.37) и (1.42), получите известные выражения для скорости звука c_* и концентрации n_* на звуковом радиусе r_* [Bondi, 1952]:

$$c_*^2 = \left(\frac{2}{5 - 3\Gamma} \right) c_\infty^2; \quad (1.43)$$

$$n_* = \left(\frac{2}{5 - 3\Gamma} \right)^{1/(\Gamma-1)} n_\infty; \quad (1.44)$$

$$r_* = \left(\frac{5 - 3\Gamma}{4} \right) \frac{GM}{c_\infty^2}. \quad (1.45)$$

2. Покажите, что

$$\eta_1(r_*) = \frac{-4 \pm \sqrt{10 - 6\Gamma}}{\Gamma + 1}, \quad (1.46)$$

где знак *плюс* соответствует аккреции, а знак *минус* — эжекции.

3. Покажите, что для сферически-симметричной аккреции

а) при $r \gg r_*$ (дозвуковой режим) течение можно считать несжимаемым:

$$n(r) \approx \text{const}; \quad (1.47)$$

$$v(r) \propto r^{-2}; \quad (1.48)$$

б) при $r \ll r_*$ (сверхзвуковое течение) движение частиц близко к свободному падению:

$$n(r) \propto r^{-3/2}; \quad (1.49)$$

$$v(r) \approx \left(\frac{2GM}{r} \right)^{1/2}. \quad (1.50)$$

4. Покажите, что для сферически-симметричного трансзвукового истечения (истечения Паркера [Parker, 1958])

а) физические параметры при звуковой поверхности $r = r_*$, где

$$r_* = \frac{GM}{2c_*^2}, \quad (1.51)$$

связаны с соответствующими значениями на поверхности звезды $r = R$ как

$$c_*^2 = \left(\frac{2}{5-3\Gamma} \right) c_R^2 + \left(\frac{\Gamma-1}{5-3\Gamma} \right) \left(v_R^2 - \frac{2GM}{R} \right); \quad (1.52)$$

$$n_* = n_R \left(\frac{c_*^2}{c_R^2} \right)^{1/(\Gamma-1)}; \quad (1.53)$$

б) радиальная скорость на поверхности звезды должна составлять

$$v_R = c_* \left(\frac{c_*^2}{c_R^2} \right)^{1/(\Gamma-1)} \left(\frac{r_*}{R} \right)^2. \quad (1.54)$$

Будучи чрезвычайно упрощенной моделью, радиальное одномерное течение тем не менее позволяет сформулировать несколько важных свойств, причем многие из них, как мы увидим, останутся справедливыми и для уравнения Грэда–Шафранова.

1. При отсутствии границ звуковая поверхность может быть пройдена лишь в гравитационном поле. Действительно, числитель N в (1.41) может быть равен нулю только в присутствии гравитационного слагаемого GM/rv^2 .

2. Решения (1.43)–(1.45) и (1.52) имеют особенность при $\Gamma = 5/3$. Это означает, что при $\Gamma = 5/3$ увеличение/уменьшение скорости звука за счет адиабатического нагрева/охлаждения в точности совпадает с изменением скорости движения вещества. В результате в нерелятивистском случае для $\Gamma > 5/3$ трансзвуковое течение не может быть реализовано.

3. Трансзвуковая задача является двухпараметрической. Это означает, что для полного определения трансзвукового течения нужно задать два граничных условия, например плотность $\rho_\infty = m_p n_\infty$ и скорость звука c_∞ на бесконечности. Тогда все остальные параметры могут быть выражены через эти величины. Например, для полного

темпа аккреции имеем $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{crit}}$, где

$$\Phi_{\text{crit}} = 4\pi r_*^2 c_* n_* = \pi \left(\frac{2}{5-3\Gamma} \right)^{(5-3\Gamma)/2(\Gamma-1)} \frac{(GM)^2}{c_\infty^3} n_\infty. \quad (1.55)$$

С другой стороны, для данных значений n_∞ и c_∞ существует бесконечное число дозвуковых течений с $\Phi < \Phi_{\text{crit}}$ (см. рис. 1.1).

4. Для заданной структуры течения числа интегралов движения достаточно для того, чтобы все его параметры могли быть определены из алгебраических соотношений.

Последнее свойство и является, фактически, ключевым свойством рассматриваемого подхода. Действительно, алгебраические соотношения (1.35)–(1.37) вместе с уравнением состояния позволяют определить все физические параметры течения (скорость $v(r)$, температуру $T(r)$ и т. д.) через инварианты E и s , а также функцию тока Φ . Это свойство остается справедливым и для произвольного двумерного течения. С другой стороны, понятно, что в общем случае структура самого течения (т. е. функция $\Phi(r, \theta)$) заранее не известна. Для ее определения необходимо использовать все пять гидродинамических уравнений.

1.2.3. Плоское потенциальное течение. В качестве простейшего примера течения, структура которого заранее не известна, рассмотрим плоское потенциальное течение без гравитации. В этом случае скорость \mathbf{v} , лежащую в плоскости xy , можно определить из условия

$$\mathbf{v} = \nabla \phi(x, y), \quad (1.56)$$

где $\phi(x, y)$ — скалярный потенциал. Кроме того, для простоты положим, что интегралы E и s постоянны во всем пространстве:

$$E = \text{const}, \quad s = \text{const}. \quad (1.57)$$

Тогда уравнение непрерывности $\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0$ может быть переписано как

$$\nabla^2 \phi + \frac{\nabla n \cdot \nabla \phi}{n} = 0. \quad (1.58)$$

Наконец, используя уравнение Эйлера для определения величины $\nabla n \cdot \nabla \phi$:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + c_s^2 \frac{\nabla n \cdot \nabla \phi}{n} = 0,$$

получаем

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \frac{(\phi_y)^2 \phi_{xx} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + (\phi_x)^2 \phi_{yy}}{(\nabla \phi)^2 D} = 0. \quad (1.59)$$

Здесь опять

$$D = -1 + \frac{c_s^2}{v^2}, \quad (1.60)$$

а нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим координатам.

Уравнение (1.59) в частных производных второго порядка хорошо известно; его можно найти во многих учебниках (см., например, [Ландау, Лифшиц, 1986]). Оно обладает следующими свойствами, большинство из которых, как мы увидим, останется справедливым и для уравнения Грэда–Шафранова.

1. Для определения величины c_s^2 уравнение (1.59) должно быть дополнено уравнением Бернулли. В случае политропного уравнения состояния скорость звука c_s может быть явно выражена через величины E и ϕ :

$$c_s^2 = (\Gamma - 1)E - \frac{\Gamma - 1}{2}(\nabla\phi)^2. \quad (1.61)$$

2. Вместе с уравнением Бернулли уравнение (1.59) содержит только потенциал $\phi(x, y)$ и инвариант E (оно не содержит энтропию s , однако знание s нужно для определения концентрации n).

3. При $n = \text{const}$ ($c_s^2 \rightarrow \infty$) уравнение становится линейным.

4. В общем случае оно нелинейно, однако всегда линейно относительно старших производных.

5. Уравнение (1.59) является эллиптическим для дозвукового течения (при $D > 0$).

6. Уравнение (1.59) является гиперболическим для сверхзвукового течения (при $D < 0$).

7. При известной структуре течения (т.е. для заданных $\phi(x, y)$, E и s) все физические параметры определяются из алгебраических соотношений.

8. Уравнение (1.59) не содержит явно координат x и y .

Последнее свойство позволяет провести так называемое преобразование годографа, т.е. замену переменных из физической плоскости xu в плоскость скоростей $v_x v_y$, где $v_x = v \sin \theta$, $v_y = v \cos \theta$. При этом вводится другой потенциал, $\phi_v(v, \theta)$, так что $\mathbf{r} = \nabla_{\mathbf{v}} \phi_v$. В результате уравнение (1.59) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 \phi_v}{\partial \theta^2} + \frac{v^2}{1 - v^2/c_s^2} \frac{\partial^2 \phi_v}{\partial v^2} + v \frac{\partial \phi_v}{\partial v} = 0. \quad (1.62)$$

Это линейное уравнение впервые было получено в 1902 году С. А. Чаплыгиным и носит его имя.

Метод преобразования годографа являлся основным направлением при анализе плоских потенциальных течений на протяжении всего XX века [Мизес, 1961; Франкль 1973]. Сформулируем два полученных в этой области важных результата, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. Для трансзвукового течения в общем случае невозможно решить прямую задачу (т.е. определить структуру течения по известной форме границы, например задавая форму сопла или крыла).

2. С другой стороны, можно решить обратную задачу. Этот факт основывается на фундаментальной теореме: трансзвуковое течение аналитично в критической точке (единственной точке, в которой звуковая поверхность ортогональна линии тока; рис. 1.2) [Франкль 1973; Ландау, Лифшиц, 1986].

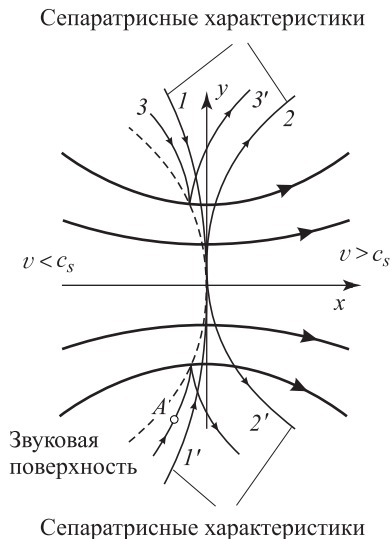


Рис. 1.2. Структура «аналитического сопла» вблизи особой точки $x = y = 0$. Характеристические поверхности (тонкие линии), пересекающие звуковую поверхность (штриховая линия) не в особой точке, имеют на ней точку возврата. Сепаратрисные характеристики касаются звуковой поверхности в особой точке

Прокомментируем приведенные утверждения. Наиболее наглядный пример, проясняющий отсутствие регулярной (т.е. не итерационной) процедуры решения уравнения (1.59) для трансзвукового течения, состоит в следующем. Как известно, число граничных условий b для произвольного (не обязательно чисто гидродинамического) течения может быть определено как [Бескин, 1997; Bogovalov, 1997a]

$$b = 2 + i - s'. \quad (1.63)$$

Здесь i — число инвариантов, а s' — число особых поверхностей. В гидродинамике единственной особенностью является звуковая поверхность. Поэтому для трансзвукового течения $s' = 1$. Далее, для плоского течения мы имеем два инварианта, E и s , так что $i = 2$. Поэтому для определения структуры трансзвукового течения необходимо задать три граничных условия на некоторой поверхности. Ими могут быть две термодинамические функции, а также тангенциальная компонента скорости, задающая потенциал ϕ на этой поверхности. Вторая (и последняя для плоского течения) компонента скорости должна определяться из решения. Однако для решения уравнения (1.59) необходимо знать интеграл Бернулли ($E = v^2/2 + w$), т.е. обе компоненты скорости на этой поверхности. Следовательно, в общем

случае даже само уравнение, описывающее структуру течения, не может быть сформулировано. Для дозвуковых и сверхзвуковых течений $s' = 0$ (так что $b = 4$) и подобная трудность отсутствует.

С другой стороны, структура трансзвукового течения может быть найдена путем разложения решения вблизи особой точки (в которой мы положим $x = y = 0$). Действительно, в дополнение к инвариантам E и s (последний, как уже говорилось, необходим для определения концентрации n) можно задать x -компоненту скорости $v_x(x, 0)$ вдоль оси x . При этом в первом приближении достаточно знать лишь первые два члена разложения

$$v_x(x, 0) = c_* + kx + \dots \quad (1.64)$$

Здесь $c_*^2 = 2E(\Gamma - 1)/(\Gamma + 1)$ (данное соотношение следует из уравнения Бернулли (1.61) при $v = c_s = c_*$), так что эта величина также непосредственно определяется из граничных условий. В результате, как нетрудно проверить непосредственной подстановкой, первые члены разложения потенциала $\phi(x, y)$ будут выглядеть следующим образом [Ландау, Лифшиц, 1986]:

$$\phi(x, y) = c_*x + \frac{kx^2}{2} + \frac{k^2(\Gamma + 1)}{2c_*}xy^2 + \frac{k^3(\Gamma + 1)^2}{24c_*^2}y^4 + \dots \quad (1.65)$$

Зная же все коэффициенты в разложении (1.64), можно восстановить потенциал ϕ с любой точностью. Кстати, легко проверить, что вблизи особой точки можно пренебречь y -компонентой скорости; поэтому звуковая поверхность может быть определена из условия $v_x = c_*$. Воспользовавшись явным выражением (1.65), получаем, что звуковая поверхность имеет стандартную параболическую форму:

$$x_*(y) = -\frac{k(\Gamma + 1)}{2c_*}y^2. \quad (1.66)$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Покажите, что

$$n(0, y) \approx n_* \left[1 - \frac{k^2(\Gamma + 1)}{2c_*^2}y^2 + \dots \right]; \quad (1.67)$$

$$(nv_x)(0, y) \approx n_*c_* \left[1 - \frac{k^4(\Gamma + 1)^3}{8c_*^4}y^4 + \dots \right], \quad (1.68)$$

поэтому характерный масштаб $\delta y \approx c_*/k$ изменения величин в поперечном направлении оказывается таким же, как и в продольном.

2. Покажите, что, помимо оси симметрии, геометрическое место точек, в которых вектор скорости параллелен оси x , также является параболой:

$$x_0(y) = -\frac{k(\Gamma + 1)}{6c_*}y^2. \quad (1.69)$$

Следовательно, звуковая поверхность находится в области сходящегося потока ($|x_*| > |x_0|$).

Говоря о свойствах особых точек, нельзя не упомянуть о структуре характеристических поверхностей, которые имеют место в гиперболической (т. е. сверхзвуковой) области уравнения (1.59). Как хорошо известно, для уравнения второго порядка в частных производных, записанного в канонической форме ($\mathcal{A}\phi_{xx} + 2\mathcal{B}\phi_{xy} + \mathcal{C}\phi_{yy} + \dots = 0$), дифференциальное уравнение для характеристических поверхностей имеет вид [Корн, Корн, 1984]

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\mathcal{B} \pm \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}{\mathcal{C}}. \quad (1.70)$$

Воспользовавшись явным видом коэффициентов \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} , получаем уравнение для определения характеристических поверхностей:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\phi_x\phi_y \pm (\phi_x^2 + \phi_y^2) \sqrt{-D(D+1)}}{\phi_x^2 + D(\phi_x^2 + \phi_y^2)}. \quad (1.71)$$

Поскольку в общем случае на звуковой поверхности частная производная $\phi_y \neq 0$, то, согласно (1.71), и производная $d(x - x_*)/dy$ на ней также будет отлична от нуля. Это означает, что в данной области звуковая поверхность не ортогональна линиям тока. В результате через каждую такую точку на звуковой поверхности (в отличие от любой точки в гиперболической области) будет проходить лишь одна характеристика, имеющая здесь точку возврата [Ландау, Лифшиц, 1986]. На рис. 1.2 ей соответствуют кривые \mathcal{I} и \mathcal{I}' . Подобная структура связана с тем, что на звуковой поверхности конус Маха вырождается в плоскость, а также с тем, что характеристики существуют лишь в гиперболической области уравнения (1.59). Однако в особых точках, в которых частная производная $\phi_x = 0$ (т. е. вблизи точки $x = y = 0$), для определения поведения характеристических поверхностей требуется более детальное рассмотрение. Оно вновь может быть проведено путем разложения решения в ряд по степеням малых смещений x и y . Вводя новую переменную

$$R = \frac{x - x_*}{D_1}, \quad (1.72)$$

где $D_1 = -(\partial D / \partial x)_{x=y=0}$ (так что здесь $D_1 > 0$), перепишем уравнение (1.71) в виде

$$\frac{dR}{dy} = ay \pm \sqrt{R}, \quad (1.73)$$

где

$$a = -\frac{(\partial^2 D / \partial y^2)_{x=y=0}}{D_1^2} - \frac{(\phi_{yy})_{x=y=0}}{(\phi_x)_{x=y=0} D_1}. \quad (1.74)$$

Точное решение уравнения (1.73) может быть найдено с помощью замены

$$R(y) = w^2(y) y^2. \quad (1.75)$$

Подставляя выражение (1.75) в уравнение (1.73), в неявном виде получаем

$$w(y) = w_1 + C [w_2 - w(y)]^{w_2/w_1} y^{(w_2-w_1)/w_1}. \quad (1.76)$$

Здесь C — постоянная интегрирования, а величины w_1 и w_2 соответствуют двум выделенным решениям $R_{1,2}(y) = w_{1,2}^2 y^2$, в которых коэффициенты $w_{1,2}$ не зависят от координаты y . Они могут быть получены прямой подстановкой определения (1.75) в уравнение (1.73). В результате имеем

$$2w^2 \pm w - a = 0, \quad (1.77)$$

и, следовательно,

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8a}}{4}. \quad (1.78)$$

Здесь следует особо отметить, что в случае плоского потенциального течения всегда оказывается выполненным условие $a > 0$. Это условие, отвечающее стандартной особой точке, показывает, что линии тока пересекают звуковую поверхность в области сходящегося потока ($|x_*| > |x_0|$). В таком случае через особую точку будут проходить две характеристики (две входящие ветви — 1 и 1', и две выходящие — 2 и 2'), соответствующие двум корням (1.78). Действительно, при $w(y) \approx w_1$ уравнение (1.76) дает

$$w(y) \approx w_1 + C(w_2 - w_1)^{w_2/w_1} y^m, \quad (1.79)$$

где показатель степени

$$m = -\frac{1 + 8a + \sqrt{1 + 8a}}{4a}. \quad (1.80)$$

Поэтому при $a > 0$, когда $m < 0$, второе слагаемое в (1.79) расходится при $y \rightarrow 0$. Следовательно, при $w \approx w_1$ через начало координат будут проходить лишь характеристики, соответствующие постоянной $C = 0$.

Для рассматриваемого случая легко получить, что

$$D_1 = (\Gamma + 1) \frac{k}{c_*}, \quad \left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{x=y=0} = -(\Gamma + 1)^2 \frac{k^2}{c_*^2}, \quad (\phi_{yy})_{x=y=0} = 0, \quad (1.81)$$

откуда

$$a = 1, \quad (1.82)$$

и поэтому

$$w_1^2 = \frac{1}{4}, \quad w_2^2 = 1. \quad (1.83)$$

В итоге через особую точку действительно будут проходить две характеристики, касающиеся звуковой поверхности в особой точке. При этом их входящие и выходящие ветви также имеют параболическую

форму [Ландау, Лифшиц, 1986]:

$$x^{(1,1')} = -\frac{k(\Gamma+1)}{4c_*} y^2; \quad (1.84)$$

$$x^{(2,2')} = \frac{k(\Gamma+1)}{2c_*} y^2, \quad (1.85)$$

причем входящим ветвям соответствует решение $R(y) = w_1^2 y^2$, а выходящим — решение $R(y) = w_2^2 y^2$. В случае же $a < 0$ (который может быть реализован лишь при наличии гравитационного поля) ситуация оказывается гораздо более сложной. Такая нестандартная особая точка подробно рассматривается в следующем параграфе.

УПРАЖНЕНИЕ. Получите выражения (1.81)–(1.85).

В заключение отметим еще одно чрезвычайно важное обстоятельство. Как видно из рис. 1.2, возмущение от точки A , находящейся в сверхзвуковой области течения, вдоль характеристики достигает звуковой поверхности и, следовательно, может влиять на структуру течения во всей дозвуковой области. Последнее означает, что именно сепаратрисная характеристика, а не звуковая поверхность, будет разделять две причинно несвязанные области.

Подводя итоги, еще раз подчеркнем, что в общем случае прямой процедуры решения уравнения (1.59) не существует. Это свойство является общим для подобного класса уравнений. В частности, оно будет справедливым и для уравнения Грэда–Шафранова. Кроме того, в рамках плоского течения невозможно:

- а) рассмотреть случай $E \neq \text{const}$, $s \neq \text{const}$;
- б) рассмотреть непотенциальные течения с $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$;
- в) включить гравитацию (которая в общем случае не является плоской).

1.3. Осесимметричные стационарные течения — нерелятивистский случай

1.3.1. Основные уравнения. Покажем, как подобный подход может быть применен для осесимметричных стационарных течений. Это означает, что мы по-прежнему будем предполагать зависимость всех величин лишь от двух переменных — r и θ . Однако теперь все три компоненты скорости могут быть отличны от нуля. Поэтому осесимметричные стационарные течения гораздо богаче плоских.

В осесимметричном стационарном случае можно ввести потенциал $\Phi(r, \theta)$, связанный с полоидальной скоростью \mathbf{v}_p равенством

$$n\mathbf{v}_p = \frac{\nabla\Phi \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi r \sin\theta}. \quad (1.86)$$

Такое определение приводит к следующим свойствам (рис. 1.3).

1. Уравнение непрерывности, $\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0$, выполняется автоматически.

2. Легко проверяется, что $d\Phi = n\mathbf{v}d\mathbf{S}$, где $d\mathbf{S}$ — элемент площади. Таким образом, потенциал $\Phi(r, \theta)$ представляет собой поток вещества через круг r, θ , $0 < \varphi < 2\pi$. В частности, полный поток через поверхность сферы радиуса r есть $\Phi_{\text{tot}} = \Phi(r, \pi)$.

3. Поскольку $\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = 0$, векторы скорости \mathbf{v} лежат на поверхностях $\Phi(r, \theta) = \text{const}$.

Сформулируем законы сохранения, которые должны выполняться для осесимметричных стационарных течений. Как и ранее, компонента $\beta = t$ и проекция на направление \mathbf{v}_p закона сохранения энергии-импульса $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ дают

$$E = E(\Phi) = v^2/2 + w + \varphi_g, \quad (1.87)$$

$$s = s(\Phi). \quad (1.88)$$

Однако теперь оказывается гораздо проще описать случай, когда сами интегралы различны на разных линиях тока, поскольку это свойство формулируется через явную зависимость интегралов движения от функции Φ .

Новая информация возникает из $(\beta = \varphi)$ -компоненты закона сохранения энергии-импульса (или, что то же самое, из φ -компоненты уравнения Эйлера):

$$\nabla_\varphi \left(\frac{v^2}{2} \right) - [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_\varphi + \frac{\nabla_\varphi P}{m_p n} + \nabla_\varphi \varphi_g = 0. \quad (1.89)$$

Действительно, для рассматриваемого осесимметричного течения все градиенты ∇_φ равны нулю. Слагаемое же $[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_\varphi$, как легко проверить, может быть переписано в виде

$$\mathbf{v} \cdot \nabla (v_\varphi r \sin \theta) = 0. \quad (1.90)$$

Следовательно, в осесимметричном случае z -компонента углового момента,

$$L(\Phi) = v_\varphi r \sin \theta, \quad (1.91)$$

является третьим интегралом движения.

1.3.2. Математическое интермеццо — ковариантный подход. Поскольку в дальнейшем мы собираемся обобщить наш подход на случай сильных гравитационных полей, представляется целесо-

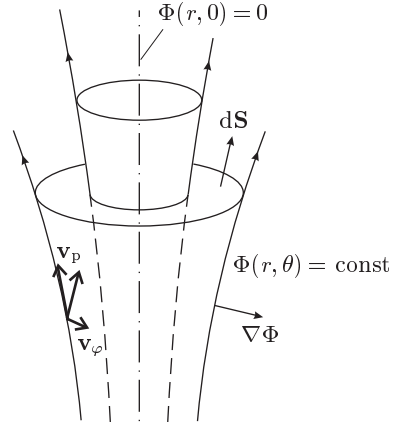


Рис. 1.3. Поверхности постоянно-го потока $\Phi(r, \theta) = \text{const}$. Векторы скорости \mathbf{v} всегда лежат на этих поверхностях, поэтому полный поток вещества сохраняется внутри каждой трубки

образным уже сейчас переписать все соотношения в ковариантной форме. Для этого напомним, что в плоском пространстве метрический тензор g_{ik} ($dl^2 = g_{ik}dx^i dx^k$) в сферических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ имеет вид

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (1.92)$$

а все остальные компоненты равны нулю. Используя выражение (1.34):

$$T_i^k = P\delta_i^k + (nm_p)v^k v_i, \quad (1.93)$$

для φ -компоненты закона сохранения энергии-импульса получаем

$$\begin{aligned} \nabla_k T_\varphi^k &= \nabla_k (\delta_\varphi^k P) + \nabla_k (nm_p v^k v_\varphi) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x^k} (nm_p v^k v_\varphi) + \Gamma_{ik}^k (nm_p) v^i v_\varphi - \Gamma_{\varphi i}^k (nm_p) v^i v_k = 0, \end{aligned} \quad (1.94)$$

где Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля.

Нетрудно проверить, что последний член в (1.94) равен нулю: $\Gamma_{\varphi i}^k (nm_p) v^i v_k = 0$. Первое слагаемое также равно нулю вследствие осесимметричности задачи (все величины не зависят от угла φ). Используя уравнение непрерывности:

$$\nabla_k (nm_p v^k) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} nm_p v^k) = \frac{\partial}{\partial x^k} (nm_p v^k) + \Gamma_{ik}^i nm_p v^k = 0, \quad (1.95)$$

где $g = \det g_{ik} = g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}$, мы видим, что условие (1.94) вновь может быть переписано в форме закона сохранения: $\nabla_k T_\varphi^k = (nm_p) \mathbf{v} \cdot \nabla v_\varphi$. Следовательно, третий инвариант имеет вид

$$L(\Phi) = v_\varphi. \quad (1.96)$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Проверьте соотношения (1.94)–(1.96).
2. Как объяснить противоречие между (1.91) и (1.96)?

Чтобы понять различие между выражениями (1.91) и (1.96), необходимо вернуться к основным соотношениям ковариантного подхода. До сих пор мы имели дело лишь с физическими компонентами векторов. Ниже в релятивистских соотношениях такие компоненты будут отмечаться шапочками над соответствующими индексами; так $v_\varphi = v^\varphi$ есть физическая компонента тороидальной скорости с размерностью см/с. Однако в ковариантных соотношениях (1.94)–(1.96) мы фактически имели дело с другими объектами — контравариантными компонентами v^i и ковариантными компонентами v_k . Воспользовавшись определением длины вектора ($\mathbf{v}^2 = g_{ik} v^i v^k = g^{ik} v_i v_k$), для диагональной метрики (1.92) получаем

$$(v_\varphi)^2 = g_{\varphi\varphi} (v^\varphi)^2 = g^{\varphi\varphi} (v_\varphi)^2; \quad (1.97)$$

то же самое справедливо для других компонент. Поэтому контравариантная (v^φ) и ковариантная (v_φ) компоненты скорости будут выражаться через физическую компоненту $v_{\hat{\varphi}}$ согласно соотношениям

$$v^\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} v_{\hat{\varphi}}, \quad (1.98)$$

$$v_\varphi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} v_{\hat{\varphi}}. \quad (1.99)$$

В частности, это означает, что размерность ковариантных и контравариантных компонент может отличаться от размерности самой физической величины. Теперь становится понятным различие соотношений (1.91) и (1.96): в (1.91) содержится физическая компонента тороидальной скорости, тогда как в (1.96) — ее ковариантная компонента.

1.3.3. Структура двумерного течения. Чтобы получить уравнение для функции потока $\Phi(r, \theta)$, необходимо вернуться к полоидальной компоненте уравнения Эйлера. Оказывается, что вместе с определениями инвариантов $E(\Phi)$, $L(\Phi)$ и $s(\Phi)$ это векторное уравнение может быть записано как произведение скалярного множителя $[\text{GS}]$ на вектор $\nabla\Phi$:

$$[\text{Эйлер}]_p = [\text{GS}] \cdot \nabla\Phi. \quad (1.100)$$

Поэтому во многих работах, посвященных магнитогидродинамическим течениям, уравнение Грэда–Шафранова — $[\text{GS}] = 0$ — получалось как проекция полоидального уравнения на направление, параллельное $\nabla\Phi$. Для чисто гидродинамических течений соответствующая проекция имеет вид

$$\frac{1}{(\nabla\Phi)^2} \nabla\Phi \cdot \left[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{\nabla P}{nm_p} + \nabla\varphi_g \right] = 0. \quad (1.101)$$

Используя определения (1.86), (1.87) и (1.91), находим

$$\begin{aligned} -\varpi^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2} \nabla^k \Phi \right) + \frac{1}{n} \nabla_k n \cdot \nabla^k \Phi - 4\pi^2 L \frac{dL}{d\Phi} + \\ + 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{dE}{d\Phi} - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{T}{m_p} \frac{ds}{d\Phi} = 0. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Здесь и до конца книги

$$\varpi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}, \quad (1.103)$$

так что для плоской метрики $\varpi = r \sin \theta$.

Как и в случае плоского течения, для замыкания системы, т. е. для определения произведения $(\nabla n \cdot \nabla\Phi)$, уравнение (1.102) должно быть дополнено уравнением Бернулли (1.87), которое теперь может быть переписано в виде (ср. (1.38))

$$E = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi^2 \varpi^2 n^2} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\varpi^2} + w(n, s) + \varphi_g. \quad (1.104)$$

Уравнение (1.104) наряду с n вновь содержит лишь инварианты E , L и s , а также функцию потока Φ . Следовательно, оно, как и раньше, в неявной форме определяет концентрацию n через функцию потока Φ и интегралы движения:

$$n = n(\nabla\Phi; E, L, s; r, \theta). \quad (1.105)$$

С другой стороны, неявное алгебраическое уравнение (1.104) может быть записано в явной дифференциальной форме:

$$\nabla_k n = n \frac{N_k}{D}, \quad (1.106)$$

где

$$D = -1 + c_s^2/v_p^2, \quad (1.107)$$

а

$$\begin{aligned} N_k = & -\frac{\nabla^i \Phi \cdot \nabla_i \nabla_k \Phi}{(\nabla\Phi)^2} + \frac{1}{2} \frac{\nabla_k \varpi^2}{\varpi^2} - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{\nabla_k \varphi_g}{(\nabla\Phi)^2} + \\ & + 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{dE}{d\Phi} \frac{\nabla_k \Phi}{(\nabla\Phi)^2} - 4\pi^2 n^2 L \frac{dL}{d\Phi} \frac{\nabla_k \Phi}{(\nabla\Phi)^2} + 2\pi^2 n^2 L^2 \frac{\nabla_k \varpi^2}{\varpi^2 (\nabla\Phi)^2} - \\ & - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \left[\frac{T}{m_p} + \frac{1}{m_p n} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_n \right] \frac{ds}{d\Phi} \frac{\nabla_k \Phi}{(\nabla\Phi)^2}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Покажите, что

$$\nabla^i \Phi \cdot \nabla_i \nabla_k \Phi = \frac{1}{2} \nabla_k (\nabla\Phi)^2. \quad (1.109)$$

2. Покажите, что в сферически-симметричном случае величина N_r соответствует значению N , задаваемому выражением (1.42), а $N_\theta = 0$.

В результате уравнение для функции потока может быть записано в виде [Бескин, 1997]

$$\begin{aligned} & -\varpi^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2} \nabla^k \Phi \right) - \frac{\nabla^i \Phi \cdot \nabla^k \Phi \cdot \nabla_i \nabla_k \Phi}{(\nabla\Phi)^2 D} + \frac{\nabla \varpi^2 \cdot \nabla \Phi}{2D \varpi^2} - \\ & - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{\nabla \varphi_g \cdot \nabla \Phi}{D (\nabla\Phi)^2} - 4\pi^2 n^2 \frac{D+1}{D} L \frac{dL}{d\Phi} + 2\pi^2 n^2 \frac{\nabla \varpi^2 \cdot \nabla \Phi}{D \varpi^2 (\nabla\Phi)^2} L^2 + \\ & + 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{D+1}{D} \frac{dE}{d\Phi} - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \left[\frac{D+1}{D} \frac{T}{m_p} + \frac{1}{D m_p n} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_n \right] \frac{ds}{d\Phi} = 0, \end{aligned} \quad (1.110)$$

или, в компактной форме, в виде (ср. [Heyvaerts, 1996])

$$-\varpi^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2 n} \nabla^k \Phi \right) - 4\pi^2 n L \frac{dL}{d\Phi} + 4\pi^2 \varpi^2 n \frac{dE}{d\Phi} - 4\pi^2 \varpi^2 n \frac{T}{m_p} \frac{ds}{d\Phi} = 0. \quad (1.111)$$

На первый взгляд, уравнение (1.110) гораздо сложнее уравнения (1.59) для плоского течения. Тем не менее они имеют много общего. Как и уравнение (1.59), уравнение (1.110) начинается с линейного эллиптического слагаемого и с нелинейного слагаемого подобной же формы. Третье слагаемое в (1.59), разумеется, отсутствует — оно является результатом того, что уравнение (1.110) записано в произвольных координатах. Однако все остальные слагаемые не следует рассматривать как усложнение. Они позволяют включить в рассмотрение не только гравитацию, но и гораздо более широкий класс течений, в которых инварианты на разных токовых поверхностях различны.

В остальном же уравнение для функции потока вполне аналогично уравнению (1.59). Действительно, оно обладает следующими свойствами.

1. Уравнение (1.110) должно быть дополнено уравнением Бернулли (1.104).

2. Вместе с уравнением Бернулли уравнение (1.110) содержит лишь потенциал $\Phi(r, \theta)$ и инварианты $E(\Phi)$, $L(\Phi)$ и $s(\Phi)$ (т. е. оно имеет вид уравнения Грэда–Шаффранова).

3. При $n = \text{const}$ ($c_s^2 \rightarrow \infty$), $E = \text{const}$, $s = \text{const}$ и $L = 0$ уравнение становится линейным.

4. В общем случае оно нелинейно, однако остается линейным относительно старших производных.

5. Уравнение (1.110) является эллиптическим для дозвукового течения (при $D > 0$).

6. Уравнение (1.110) является гиперболическим для сверхзвукового течения (при $D < 0$).

7. Для заданной структуры течения (т. е. для заданной функции потока Φ) и инвариантов $E(\Phi)$, $L(\Phi)$ и $s(\Phi)$ все физические параметры определяются из алгебраических соотношений.

Здесь необходимо отметить следующее обстоятельство. Знаменатель $D = -1 + c_s^2/v_p^2$ (см. (1.107)) содержит не полную, а полоидальную скорость v_p . Последнее означает, что звуковая поверхность соответствует тому моменту, когда не полная, а полоидальная скорость сравнивается со скоростью звука. Это свойство является прямым следствием нашего основного предположения об осесимметричности течения. В результате все возмущения (волны) также должны быть осесимметричными, т. е. они могут распространяться лишь в полоидальной плоскости. Поэтому особенность в течении возникает в момент, когда полоидальная скорость вещества сравнивается со скоростью возмущений.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Введя для плоскопараллельного течения функцию потока $\psi(x, y)$ как $n\mathbf{v} = \nabla\psi \times \mathbf{e}_z$, покажите, что первые члены ее разложения вблизи особой точки $x = y = 0$, соответствующие решению (1.65), имеют вид

$$\psi(x, y) = n_* c_* \left[y - \frac{k^2(\Gamma + 1)}{2c_*^2} x^2 y - \frac{k^3(\Gamma + 1)^2}{6c_*^3} xy^3 - \frac{k^4(\Gamma + 1)^3}{40c_*^4} y^5 + \dots \right]. \quad (1.112)$$

2. Покажите, что первые члены разложения для потенциала $\phi(\varpi, z)$ в цилиндрических координатах ϖ, z вблизи особой точки для обычного осесимметричного сопла (т.е. при отсутствии гравитации и при $L = 0$) имеют вид [Гудерлей, 1960]

$$\phi(\varpi, z) = c_* z + \frac{kz^2}{2} + \frac{k^2(\Gamma + 1)}{4c_*} z \varpi^2 + \frac{k^3(\Gamma + 1)^2}{64c_*^2} \varpi^4 + \dots \quad (1.113)$$

В дальнейшем мы неоднократно будем сталкиваться с линейным оператором

$$\hat{\mathcal{L}} = \varpi^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2} \nabla^k \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (1.114)$$

Как видно из уравнения (1.102), потенциал Φ , удовлетворяющий условию $\hat{\mathcal{L}}\Phi = 0$, описывает течение однородной несжимаемой жидкости. Поэтому целесообразно сразу обсудить свойства этого оператора более подробно. Прежде всего, рассмотрим угловой оператор

$$\hat{\mathcal{L}}_\theta = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (1.115)$$

Он имеет следующие собственные функции:

$$Q_0 = 1 - \cos \theta, \quad (1.116)$$

$$Q_1 = \sin^2 \theta, \quad (1.117)$$

$$Q_2 = \sin^2 \theta \cos \theta, \quad (1.118)$$

...

$$Q_m = \frac{2^m m!(m-1)!}{(2m)!} \sin^2 \theta \mathcal{P}'_m(\cos \theta), \quad (1.119)$$

и собственные числа

$$q_m = -m(m+1). \quad (1.120)$$

Здесь $\mathcal{P}_m(x)$ — полиномы Лежандра, а штрих означает их производные. В результате без учета размерности собственные функции полного оператора $\hat{\mathcal{L}}$ имеют вид

1) для $m = 1$

— $\Phi_1^{(1)} = r^2 \sin^2 \theta$ — однородное течение (рис. 1.4, а),

— $\Phi_1^{(2)} = \sin^2 \theta / r$ — дипольное течение (рис. 1.4, б);

2) для $m = 2$

— $\Phi_2^{(1)} = r^3 \sin^2 \theta \cos \theta$ — нулевая точка (рис. 1.4, в),

— $\Phi_2^{(2)} = \sin^2 \theta \cos \theta / r^2$ — квадрупольное течение (рис. 1.4, г);

3) ...

На первый взгляд, в данном вопросе имеет место полная ясность, так что здесь невозможно встретиться с какими-либо затруднениями.