Веретенников В.Г.
Синицын В.А.

Теоретическая механика (дополнения к общим разделам)

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 531
ББК 22.21
В 31

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 05-01-14009д

Веретенников В. Г., Синицын В. А. **Теоретическая механика (дополнения к общим разделам).** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 416 с. — ISBN 5-9221-0703-8.

Книга посвящена основным положениям механики. Основу содержания составляют очерки, которые включены в традиционную схему общих разделов курса теоретической механики.

Ряд тем объединяют общие приемы исследования, имеющие характер мысленного эксперимента. Объектом, на котором демонстрируется теория, часто является система переменного состава. Применение теории показано на примерах и задачах.

Книга предназначена научным работникам и преподавателям и может быть рекомендована в качестве учебного пособия для аспирантов и студентов, изучающих теоретическую механику.

ISBN 5-9221-0703-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Посвящается 75-летию Московского авиационного института.

Предисловие

Второе издание сохранило направленность книги на использование её в качестве учебного пособия. Однако цель книги не только в том, чтобы «разъяснить» положения теоретической механики и продемонстрировать их «работу» при решении задач, но и в том, чтобы показать, как они развиваются. Новый материал возвращает читателя к началам и составляет очередной (можно сказать, третий) «концентр» изучения механики.

Дополнительно написаны четыре главы, в основном посвященные принципам механики, и заключительная глава о преподавании. Кроме того, сделаны небольшие вставки в материал первого издания и устранены обнаруженные неточности.

Интегральные принципы механики представлены с позиций единого принципа изменяемого действия при различных способах варьирования функций и функционалов (см. гл. 9).

Законы Ньютона рассматриваются во взаимосвязи, для описания свойств массы используются принцип инерции Галилея и принцип инерционности, основанный на идее Э. Маха о пространстве с бесконечно удаленными массами со сферической симметрией (см. гл. 10).

В ситуациях с неединственным решением предложено различным решениям придать смысл разных моделей (см. гл. 11). В гл. 12 дана краткая характеристика принципов построения математических моделей динамических систем.

При работе над книгой авторам оказана финансовая поддержка Минобрнауки по научной программе «Развитие научного потенциала высшей школы», раздел «Университеты России» (проект 04.01.126).

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 05-01-14009.

Предисловие к первому изданию

Книга посвящена основным положениям механики, восходящим к Ньютону, Даламберу и Лагранжу, с учетом их развития в работах М.В. Остроградского, И.В. Мещерского, Н.Г. Четаева и других ученых.

Основу содержания составляют очерки, которые включены в традиционную схему общих разделов курса теоретической механики.

Ряд тем объединяет общие приемы исследования, имеющие характер мысленного эксперимента. Объектом, на котором демонстрируется теория, часто является система переменного состава. Применение теории показано на примерах и задачах.

Многочисленность затронутых вопросов не позволила привести детальные исторические обзоры и дать полную библиографию с указанием приоритетов.

Ссылки на литературу сделаны в двух вариантах: работы, которые упоминаются неоднократно, даны в общем списке; одноразовое обращение к источнику вынесено в подстрочник контекста.

Книга предназначена научным работникам и преподавателям и может быть рекомендована в качестве учебного пособия для аспирантов и студентов, изучающих теоретическую механику.

Издание подготовлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект номер 94-01-00241).

ВВЕДЕНИЕ

Издатели книги задали авторам вопрос: нельзя ли указать, к какому учебнику ближе всего предлагаемое пособие, чтобы издать их одновременно? Ответив, что это дополнение к общим разделам, а не к конкретному учебнику, приведем также краткую справку о наблюдаемой тенденции развития учебной литературы по механике и о месте, занимаемом данной работой.

Примерно до середины XX века в учебниках по механике всесторонне освещался достигнутый уровень знаний [2, 61, 36, 66, 25, 37]. Затем возникла практика дополнять учебники учебными пособиями, которые писались теми же авторами, например учебники [10, 23] и учебные пособия [9, 42, 24].

В последнее время в отечественных учебниках теоретическая механика представляется в компактном виде, а более подробно раскрывается её связь (взаимополезная) с какой-либо другой дисциплиной: с логикой [26], геометрией [4], дифференциальными уравнениями [39, 18, 56], функциональным анализом, физикой [34, 52], с техническими науками [10, 30]. Трактовка оснований классической механики дается в соответствующем спектре понятий: логические категории, «эмпирические факты», «законы», «принципы», и далее по шкале общности и неопределенности от принципов к «препринципам» [1], вплоть до «натуральной философии» И. Ньютона [49], воззрений Э. Маха [40] и новой механики А. Пуанкаре [57]. Последние уровни долгое время по известным историческим причинам почти полностью были вынесены за рамки компетенции отечественных механиков.

Указанная «классификация», конечно, является грубой, поскольку не менее важно отразить и связь с другими теориями: небесной механикой, механикой деформируемого тела, жидкости, газа, физикой, теорией управления и т. д.

Мы не будем каждый раз различать термины «закон», «принцип» и «препринцип», чтобы не возникло излишнего многословия и кажущегося несогласия с уже имеющейся терминологией (подобное различие при желании нетрудно сделать в зависимости от контекста).

Основные понятия механики — пространство, время, масса, а также сила, энергия, действие (за исключением последнего) — обычно без труда воспринимаются студентами в процессе учебы как «физически» ясные и как «эмпирические факты». Если затем «аксиоматически» или опираясь на «законы» быстро перейти к методам составления математических моделей, то в естественном фундаментальном образовании

---

[1] *Veljko A. Vujicic.* Preprinciples of Mechanics. — Beograd: Mat. Inst. SANU, 1999.

останется пробел, на заполнение которого практически наилучшим претендентом является теоретическая механика.

Материал первого издания можно рассматривать как расширенную демонстрацию принципа освобождаемости, теории импульсивных движений и механики систем с переменными массами.

Методы теоретической механики обладают большей общностью, чем это демонстрирует их применение при исследовании непрерывного движения по законам Ньютона и движения при ударе. Важнейшие из них основаны на принципах Даламбера и Лагранжа и используются наряду с другими при составлении уравнений несвободного движения системы. Принцип Даламбера состоит в разложении движения, «которым тело обладало до встречи с препятствием, на два таких движения, из которых одному препятствие ни в какой мере не является помехой, а другое им уничтожается» [21]. Затем устанавливается закон равновесия, для чего при идеальных связях в механических системах применяется принцип виртуальных скоростей Лагранжа [33]. Выполняемые при этом действия, как показал М.В. Остроградский [51], определяются порядком уравнения второго закона Ньютона (уравнения для ускорения). Разложение движения по Даламберу в теории стереомеханического удара производится в уравнении для скорости. Для систем с ускорениями высших порядков принцип Даламбера изложен в книге [56]. Все перечисленные модели являются «однородными» в том смысле, что «уничтожаемое» движение характеризуется кинематической характеристикой одного порядка для всех материальных точек системы. Причем ею является та кинематическая характеристика, в уравнение которой вводится реакция (сила реакции, импульс силы реакции и т. д.).

В задаче о вынужденных движениях [73] указанная «однородность» отсутствует. Четаев рассматривает систему, состояние которой описывается как уравнениями механики Ньютона, так и уравнениями для отдельных параметров. При этом «уничтожение» движения производится силами реакций в уравнениях второго порядка для механической части системы и «принуждениями реакций» в уравнениях первого порядка, описывающих изменение параметров. Таким образом, обнаруживается, что применение принципа Даламбера требует указания уравнений, которые используются при разложении движения. В дальнейшем мы будем называть их *основными*. Так, в задаче Н.Г. Четаева изучается система, основные уравнения которой имеют различные порядки.

Разложение движения согласно принципу Даламбера и прием получения виртуальных скоростей Лагранжа, указанный М.В. Остроградским, можно рассматривать как мысленный эксперимент над движениями. Мысленное изменение кинематических характеристик, описываемых основным уравнением динамики, проводится с целью выделения из всех мыслимых (кинематически возможных или кинематически допустимых) движений действительного движения. Роль, отводимая виртуальным скоростям Лагранжа, состоит в том, чтобы на основе сравнения мыслимых движений (к которым принадлежит и действительное) сформировать понятие идеальной связи, условия ослабления неудерживающей связи и т. д. Объединенный принцип Даламбера–Лагранжа дает общее уравнение аналитической динамики. При изучении систем, описываемых основными уравнениями различных порядков, мы также будем ставить мысленные эксперименты по схеме, построенной на основе принципов Даламбера и Лагранжа. Естественно, что в общем случае мысленное изменение кинематических характеристик по смыслу может и не совпадать с виртуальной скоростью.

Кинематический по форме анализ связей в первой главе ориентирован на применение принципов Даламбера и Лагранжа с учетом порядка основных уравнений, описывающих переменные. Определение несвободного движения и понятие о виртуальном перемещении и виртуальном изменении параметра учитывают порядок основного уравнения динамики и уравнения для изменения параметра. Доказаны теоремы, позволяющие по виду уравнения связи установить, является связь внутренней или нет. Приводятся примеры связей в виде уравнений с частными дифференциалами, допускающих «твердые» и «квазитвердые» виртуальные перемещения. Обсуждаются правила варьирования так называемых параметрических связей.

Во второй главе традиционный раздел «Геометрия масс» расширен за счет «кинематики масс», которую представляют кинематические свойства движения осей координат. Положение и движение осей системы, используемых для представления внешнего (переносного) движения, определяются состоянием материальных точек и изменением масс в системах переменного состава. Причины, вызывающие и изменяющие движение (как и причины, изменяющие состав), во внимание не принимаются. В качестве осей системы рассматриваются главные оси инерции, средние оси, средние оси Тиссерана, оси тела, «незавихренного» в среднем.

В третьей главе приводятся формулы для вычисления основных динамических величин, обычный список которых дополнен понятиями элементарного действия и функционала «действие». Главный вектор и главный момент количеств движения представляются в виде единого дуального комплекса, называемого мо́тором (винтом). Кинетическая энергия и энергия ускорений — скалярные динамические величины (тензоры нулевого ранга) — даются в виде тензорного обобщения (тензоры второго ранга). Тензор второго ранга получается с помощью операции над векторами (тензорами первого ранга), известной под названием «диадное произведение» ($\mathbf{ab}$) и обозначаемой двумя рядом стоящими векторами без знака между ними. Тензор $\mathbf{ab}$, записанный в форме матрицы, имеет сумму диагональных элементов, равную скалярному произведению:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Транспонированная матрица получается путем перестановки множителей в диадном произведении. В свою очередь, коммутативное соотношение ($\mathbf{ab} - \mathbf{ba}$) дает кососимметричный тензор второго ранга, соответствующий вектору, равному векторному произведению $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Отсюда следует, что в отличие от тензорного представления векторов тензорное обобщение скалярных динамических величин, таких как кинетическая и потенциальная энергия, энергия ускорений, мощность силы, элементарная работа, вириал силы, содержит больше информации о данной величине. Например, тензор кинетической энергии позволяет находить кинетическую энергию в заданном направлении.

В четвертой главе обсуждаются первая основная задача механики, а также задача о приведении тензора вириала системы сил к центру и формулы вычисления обобщенных сил инерции.

Пятая глава посвящена принципу освобождаемости и вопросам реализации (осуществления) связи с помощью реакций и «принуждения реакций». Анализируется представление реакций идеальных связей по Лагранжу, сервосвязей Бегена и реакций неидеальных связей по Бобылеву и Пэнлеве. Приводится пример идеальной реализации акатастатической неголономной связи в скользящем режиме.

В шестой главе излагаются теоремы об изменении основных динамических величин. Рассматриваются ситуации, в которых внутренние перемещения приводят к изменению главного вектора внешних сил и как следствие происходит изменение движения центра масс системы. Доказаны различные формы теоремы об изменении количества движения системы переменного состава с учетом внешних сил, действующих на отделяющиеся и присоединяющиеся частицы. Получено обобщение закона площадей. Теорема об изменении кинетической энергии дается в тензорной форме.

В седьмой главе метод Даламбера применяется при составлении уравнений непрерывного и импульсивного движений, а также движения систем с «непрерывными ударами» и систем с параметрическими связями. Получены условия некорректности уравнения движения несвободной точки переменной массы. Исследуется движение растущей сферической капли в насыщенной атмосфере.

С помощью общего уравнения динамики в моторной форме составлено уравнение моментов «преобразованного» тела (по Жуковскому) для твердого тела с полостью, заполненной идеальной моментной жидкостью при ее потенциальном движении.

Восьмая глава посвящена принципу наименьшего отклонения, который устанавливает правило выбора истинного движения при сравнении некоторого множества кинематически возможных движений с истинным движением системы, полученной в результате освобождения от части связей. Дан видоизмененный принцип Четаева. Найдены новые формы принципа наименьшего отклонения для систем с неудерживающими связями при непрерывных и импульсивных движениях. Анализируются примечания Бертрана к «Аналитической механике» [16] по поводу теоремы Лагранжа «об общих свойствах движений, касающихся вращений, вызванных импульсами, и свойств, связанных с живой силой».

Некоторые главы первого издания были несколько расширены.

В гл. 6 включен новый пункт, 6.6.3, в котором приведен подробный анализ энергетических соотношений в первой задаче Циолковского, позволяющий дать ответ на вопросы о том, можно ли создать высокоэнергетический объект за счет реактивных сил, приложенных к ракете, и как связана кинетическая энергия ракеты с её внутренней энергией.

Использование реактивных сил имело место с начала нашей эры. Первое вычисление соответствующей величины осуществил Д. Бернулли. Принципиальной особенностью реактивных сил является то, что не только они выступают причиной изменения движения, но и движение предшествует их появлению в процессах с присоединением масс (это роднит реактивные силы с реакциями ограничений, однако не отождествляет их). Обобщающее уравнение, объединившее случаи отделения и присоединения масс и являющееся основным для описания реактивного движения и ракетодинамики, связывают с именем И.В. Мещерского [43].

Бесконечно малые «непрерывные удары» при присоединении или отделении частиц отвечают классу задач, относящихся к динамике систем переменного состава. Переменность состава материальных точек в системе является проявлением переменности массы системы (см., например, [28]). При рассмотрении изменения инерционных свойств (в широком смысле, а не только с использованием понятия о массе) класс систем с переменными массами не оказывается более бедным, чем класс систем переменного состава. Это придает новый статус системам с переменными массами: возникают задачи, представляющие не только прикладной, но и фундаментальный интерес.

В § 7.2 включена уточненная постановка классической «кембриджской задачи» о движении цепи как системы с «непрерывными ударами». Остановимся на ней несколько подробнее.

Первые задачи о движении цепи с увеличивающейся длиной движущейся части за счет вовлечения в движение покоящихся звеньев были решены в середине XIX века в Англии. Исторически они объединены под названием «кембриджские задачи» [53].

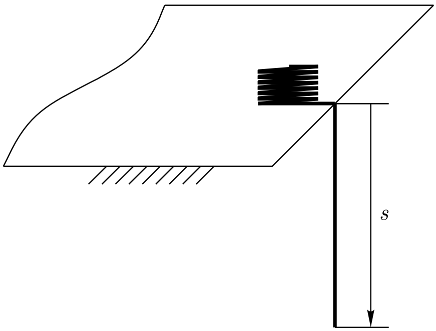

Рис. В.1

Одна из таких задач по всем признакам (простота постановки, «простота» решения, частое использование в учебной литературе) стала хрестоматийной. Это задача А. Кэли (A. Cayley). Она состоит в следующем (цитируем по кн. [43]): определить движение тяжелой однородной цепи, одна часть которой лежит на столе у самого края, а другая часть свешивается вниз и представляет движущуюся систему (рис. В.1).

Уравнение движения свободной части цепи принимается автором задачи в виде
$$s\ddot{s}+\dot{s}^2-gs=0, \tag{В.1}$$
где g — ускорение свободного падения в однородном поле силы тяжести; s — отсчитываемая вниз от уровня стола длина прямолинейной части цепи; точками обозначены производные по времени t.

При начальных условиях $s_0=0$, $\dot{s}_0=0$ Кэли находит функцию
$$s=gt^2/6, \tag{В.2}$$
которая до настоящего времени и рассматривается как закон движения свободного конца цепи. Очевидно, что при точном выполнении указанных начальных условий причин движения не существует, поскольку реактивная сила, «присоединяющая» новые звенья, просто отсутствует. Поэтому в качестве закона движения должно быть принято другое частное решение уравнения (В.1): $s=\mathrm{const}=0$. Однако закон вида (В.2) привлекателен тем, что он нетривиален и прост.

Имеется ли здесь неоднозначное решение «правильно» составленного уравнения или, возможно, неверно «угадано» само уравнение? Точнее говоря, уравнение не угадывалось, а было получено с помощью предварительно составленного общего уравнения динамики системы с присоединяющимися массами. Оказывается, что возникшие сомнения в решении задачи (а не в решении уравнения) не беспочвенны.

В девятой главе вариационные и невариационные интегральные принципы объединяются в единый принцип изменяемого действия (понятие о действии дано в § 3.5). Принцип изменяемого действия известен своими эвристическими возможностями при составлении математических моделей. В качестве его общей оценки приведем высказывание А. Пуанкаре, который отмечал, что при кризисе всех основных принципов физики в начале XX века «пока остается вне сомнений принцип наименьшего действия... он является *более общим и неопределенным*» (курсив наш). Действительно, принципам присущи общность и неопределенность. «Техническая» работа начинается после формирования функционала и выбора способа варьирования, позволяющего использовать условия стационарности и другие условия минимума функционала. Синхронное варьирование применяется при составлении интегрального равенства принципа Гамильтона–Остроградского, а асинхронное изоэнергетическое — для получения интегрального принципа Лагранжа. Варьирование по способу Гельмгольца приводит к интегральному принципу Гёльдера [11].

Кроме того, в гл. 9 рассматривается интегральный принцип равенства действия и противодействия.

В десятой главе обсуждаются взаимосвязи законов классической механики с постньютоновскими дополнениями. Со времен А. Пуанкаре (выдвинувшего свой, более общий принцип инерции) высказываются сомнения в самостоятельности первого закона (закона инерции Галилея): ему отводится лишь роль следствия второго закона, и делаются попытки обойтись только вторым и третьим законами

Ньютона. Имеется даже парадокс противоречия первого и второго законов. Причину недоразумений мы видим, в частности, в отсутствии в классической механике ещё одного принципа — принципа инерционности, основанного на использовании идеи Э. Маха о пространстве с бесконечно удаленными сферически-симметричными массами (принцип «изменения нарушения симметрии»).

Принцип инерции Галилея не только позволяет ввести инерциальную систему отсчета, но и вместе с принципом инерционности используется при описании свойств массы.

В одиннадцатой главе рассматриваются задачи статики и динамики. Иногда их достаточно трудно различить; в частности, это происходит в тех случаях, когда имеется неединственное решение дифференциального уравнения, «описывающего» движение системы. Неоднозначность решения дифференциального уравнения приводит к альтернативе: исключить объект из числа объектов, изучаемых механикой, или дать различную физическую трактовку разным решениям. Примеры такого рода хорошо известны.

Пусть движение системы с одной степенью свободы в случае действия позиционной обобщенной силы описывается дифференциальным уравнением (где сила отнесена к массе, а точкой обозначена производная по времени t):

$$\ddot{x} = \alpha x^{\beta}; \quad \alpha = \text{const} > 0; \quad \beta = 1/3.$$

В положении $x = 0$ сила равна нулю, и в состоянии $x\,(0) = 0$, $\dot{x}\,(0) = 0$ система находится в покое. Однако наряду с решением $x \equiv 0$ уравнение имеет и другие решения:

$$x = \pm a t^{b}; \quad a = \left(\frac{\alpha}{6}\right)^{3/2}; \quad b = 3,$$

указывающие на отсутствие равновесия на любом конечном интервале времени.

Возникают следующие вопросы: является ли состояние $x\,(0) = 0$, $\dot{x}\,(0) = 0$ состоянием равновесия или нет, и как в этом случае применять принцип возможных перемещений? Принцип детерминированности Ньютона (согласно которому по заданному состоянию в начальный момент времени можно найти состояние во все последующие моменты времени) в примере не выполняется. Следовательно, можно сделать вывод о том, что рассматриваемое движение не подлежит изучению методами теоретической механики. В гл. 11 предлагается альтернативный конструктивный выход.

Условия «невозможности» и «неединственности» движения являются, в частности, следствием закона сухого трения и модели абсолютно твердого тела и часто возникают при одних и тех же условиях при разных направлениях движения (см. ссылку на с. 152). В ситуации «невозможности» движения (см. пример в гл. 13) необходимость перехода к новой модели движения стала очевидна в результате дискуссии, продолжавшейся сто лет. В случае «неединственности» решений дифференциальных уравнений также возможно исследование с помощью разных моделей.

Кроме того, здесь обсуждаются применение принципа виртуальных перемещений в системах с неудерживающими связями, прием разделения сил на «статические» и «динамические», вопросы эквивалентности систем сил, различные точки зрения на силы инерции.

В двенадцатой главе применение принципов механики распространяется на проблемные задачи составления математических моделей динамических систем. Приводятся примеры математических моделей точечных объектов, в уравнениях движения которых присутствуют электрический заряд, термодинамические свойства, релятивистская переменность массы. Обсуждаются геометрические свойства траекторий, характеризуемых как «прямейший путь» и «прямой путь». Уточняются демонстрационные возможности примера сравнения действия на прямом и «окольных» путях в задаче о движении тела в однородном поле силы тяжести (автор Ф.А. Слудский).

Здесь же показана возможность использования экстраполяции принципов механики на динамические системы; приводятся математические формулировки «принципа детерминированности». Проводится сравнение базового вариационного уравнения Л.И. Седова [64] с принципом изменяемого действия; рассматривается связь понятия энергии с понятиями массы и времени.

В заключительной главе содержатся некоторые мысли о преподавании теоретической механики.

Новый материал второго издания настоящего учебного пособия в большей своей части касается принципов и препринципов механики.

В приложениях приведено описание некоторых математических понятий, применяемых в основном тексте.

В первом приложении излагаются сведения из векторного анализа и теории поля. Второе и третье приложения содержат основные операции над векторами конечных поворотов, кватернионами и винтами, являющимися математическими объектами кинематики сферического и винтового движения абсолютно твердого тела. С помощью композиции оператора Гамильтона и оператора конечного поворота представлен класс силовых полей, частным случаем которых являются потенциальные силовые поля. Приводится пример специального силового поля, с помощью которого можно изменять интенсивность вихревого поля сплошной среды.

Кроме того, вводятся понятия R-линейного и D-линейного преобразования дуальных переменных, используемые при формировании свойства дифференцируемости функций дуальной переменной и «принципа перенесения» (аналоги операций над векторами и над винтами).

Мы благодарны всем авторам, к замечательным трудам которых мы имели возможность приобщиться, и просим извинения у тех, чьи публикации не были здесь упомянуты.

Глава 1
НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ НЕСВОБОДНЫХ СИСТЕМ

В настоящей главе обсуждается смысл понятий свободного и несвободного движения. Метод виртуальных скоростей по Лагранжу [33] и Остроградскому [51] применяется как мысленный эксперимент, в котором варьируемые величины увязываются с порядком основных уравнений движения. Этот метод экстраполирован на связи в системах, чье описание содержит основные уравнения различных порядков для механической части и для параметров, изменение которых описывается уравнениями первого порядка (задача в постановке Четаева [73]).

1.1. Свободное и несвободное движение точки

Положение точки в ортогональном трехмерном евклидовом пространстве можно задать тремя декартовыми координатами: x, y и z. Если в процессе движения не существует ограничений на положение точки и ее скорость $\mathrm{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ в выбранной инерциальной системе координат, то движение называют *свободным*. Очевидно, что указанные условия выполнимы, если пространство не содержит других материальных тел, которые могут ограничить полную свободу состояний. Практически такое глобальное освобождение невозможно, и приведенное определение имеет ценность, если встреча точки с препятствием не происходит на рассматриваемом промежутке времени. Поэтому поставим вопрос о свободе движения точки на сколь угодно малом промежутке времени с учетом информации о движении как точки, так и препятствия. Предполагается, что известно состояние материальной точки (которое задается радиусом-вектором положения и вектором скорости) и имеется возможность предсказания его изменения на рассматриваемом промежутке времени. В рамках механики Ньютона подобное предсказание основывается на принципе детерминированности Ньютона. Принцип детерминированности предполагает возможность определения состояния точки в последующие моменты времени, если оно задано в некоторый (конкретный) момент времени.

В частности, изменение скорости v за бесконечно малый промежуток времени dt определяется ускорением w:

$$d\mathrm{v} = \mathrm{w}\, dt. \tag{1.1}$$

Будем называть движение точки в момент времени t *свободным в некотором состоянии*, если связи допускают это состояние и точка может иметь произвольное конечное ускорение.

В общем случае связь есть всякое представление (описание) ограничений движения: алгебраическое, дифференциальное (для обыкновенных или частных дифференциалов) либо иное аналитическое, или даже не имеющее аналитического выражения.

П р и м е ч а н и е. Введенное понятие о движении, свободном в данном состоянии, не является чисто кинематическим, поскольку оно учитывает тот факт, что основное уравнение динамики Ньютона определяет ускорение материальной точки. В других моделях механики, например в стереомеханической теории удара, допускаются мгновенные изменения скоростей точек на конечную величину. В задачах управляемого движения рассматриваются воздействия, изменяющие не ускорения точки, а его производные по времени (ускорения высших порядков [56]). Понятие о свободном движении в данном состоянии применительно к этим моделям формируется аналогично: произвольной может быть кинематическая характеристика, изменение которой описывает основное уравнение динамики. Например, в упомянутой стереомеханической теории удара основное уравнение динамики описывает изменение скорости.

Приведем примеры движения, свободного в данном состоянии.

П р и м е р 1.1. Пусть ограничение на движение точки состоит в том, что она не допускается внутрь неподвижной сферы постоянного радиуса, но может находиться на поверхности сферы и вне ее. В таком случае говорят, что имеется стационарная неудерживающая связь, описываемая неравенством (центр сферы принят за начало координат)

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geqslant 0. \tag{1.2}$$

В тех положениях, в которых для координат точки x, y, z в (1.2) имеет место строгое неравенство, точка является свободной. Выполнение в некотором положении равенства

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{1.3}$$

еще не означает, что связь (1.2) будет препятствовать движению. Пусть скорость v точки удовлетворят строгому неравенству (точкой обозначено скалярное произведение векторов)

$$\mathrm{v} \cdot \nabla f > 0, \tag{1.4}$$

где ∇f — градиент функции поверхности ($f = x^2+y^2+z^2-R^2$) (см. приложение 1). Тогда движение точки в состоянии, удовлетворяющем условиям (1.3) и (1.4), согласно определению является свободным.

В общем случае, задавая ограничение на движение функцией поверхности $f\,(x, y, z)$, будем предполагать, что в рассматриваемых положениях функция f является дважды дифференцируемой и регулярной ($\nabla f \neq 0$).

При отсутствии регулярности ($\nabla f = 0$) точка с координатами, удовлетворяющими уравнению $f\,(x, y, z) = 0$, может и не принадлежать поверхности, заданной этим уравнением (так называемые лишние точки [1]). Например, двигаясь в области $f(x, y, z) > 0$, материальная точка не может попасть в точки локального максимума функции f.

Действительно, пусть в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ выполняются равенства $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $\nabla f\,|_{x_0, y_0, z_0} = 0$. Разлагая функцию поверхности в ряд Тейлора в окрестности точки M_0, получаем

$$\begin{aligned} a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 + \\ + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) + \\ + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) + \varphi(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\varphi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ — члены степени выше второй в разложении функции f.

Если матрица коэффициентов a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ является знакоопределенной, то в достаточной близости к M_0 ни одна точка пространства (кроме M_0) не удовлетворяет уравнению $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Приведем пример функции с нерегулярной точкой.

Пример 1.2. При ограничении

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right) = 0 \tag{1.6}$$

геометрическое место допустимых положений — поверхность сферы (1.3) и начало координат $x = y = z = 0$. Очевидно, что двигаясь по поверхности сферы, невозможно попасть в точку с координатами (0,0,0). Функция (1.6) является отрицательно определенной и имеет в точке (0,0,0) изолированный максимум. Для материальной точки с координатами (0,0,0) условие (1.6) не будет нарушено, только если ее скорость тождественно равна нулю.

Пример 1.3. Допустим, что снова имеется неудерживающая связь (1.2), однако радиус сферы меняется с течением времени. Кроме того, пусть функция $R(t)$ непрерывна вместе со своей производной по времени $(\dot{R}(t))$.

Для положений, удовлетворяющих условию (1.3), неравенство (1.2) в последующий момент времени не нарушается, если

$$\frac{df}{dt} > 0$$

Рассмотренные примеры показывают, что для неудерживающих связей вида

$$f\,(x, y, z) \geqslant 0 \tag{1.9}$$

при движении точки со скоростью v целесообразно введение понятия скорости ослабления связи ν:

$$\mathrm{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} = \nu \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Если $\nu > 0$, то при скорости v связь (1.9) ослабляется.

Таким образом, движение точки в положении «на связи» ($f = 0$) будет свободным, если связь ослабляется ($\nu > 0$).

В случаях, когда скорость ослабления связи равна нулю, вопрос о том, препятствует ли связь движению или нет, решается с учетом ускорения точки. При этом ускорения w, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \mathrm{w} \cdot \nabla f + d\,(\mathrm{r}, \mathrm{v}, t) \geqslant 0 \qquad \left(f = 0, \;\; \dot{f} = 0\right), \tag{1.11}$$

называются *кинематически допустимыми* (возможными или мыслимыми). Функция $d\,(\mathrm{r}, \mathrm{v}, t)$ в (1.11) обозначает все члены в производной $d^2 f / dt^2$, не содержащие ускорения.

1.2. Виртуальные скорости и виртуальные перемещения

Математически строгое понятие виртуальной скорости восходит к Ж. Лагранжу [33] и М.В. Остроградскому [51].

Формулируя общий принцип статики, Ж. Лагранж использовал понятие виртуальной скорости. «Под виртуальной скоростью следует понимать скорость, которую тело, находящееся в равновесии, готово принять в тот момент, когда равновесие нарушено, т. е. ту скорость, какую тело фактически получило бы в первое мгновение своего движения» [33]:

$$\delta\,\mathrm{v} = \mathrm{w}'\,dt. \tag{1.12}$$

Обозначение $\delta\mathrm{v}$ (а не $d\mathrm{v}$) подчеркивает, что w' не является действительным ускорением (в действительности рассматривается равновесие — скорость и ускорение равны нулю); w' — одно из возможных (допускаемых связями) ускорений, которые можно, не нарушая связи, использовать в мысленном эксперименте.

Если материальная точка имеет в действительном движении отличную от нуля скорость v, то в одном и том же состоянии можно мысленно представить себе поочередно два различных движения, т. е. движения с разными ускорениями (оба из множества ускорений, допускаемых связями). Обозначим одно из них через w, а другое — w'.

В первом мысленном движении за время dt произойдет перемещение

$$\Delta \mathrm{r} = \mathrm{v}\, dt + \mathrm{w} \frac{(dt)^2}{2} + \ldots, \tag{1.13}$$

а во втором — перемещение

$$\Delta' \mathrm{r} = \mathrm{v}\, dt + \mathrm{w}' \frac{(dt)^2}{2} + \ldots. \tag{1.14}$$

В (1.13) и (1.14) опущены члены с dt в степени выше второй. В модели движения Ньютона этими членами пренебрегают, поскольку dt — бесконечно малая величина. Разности

$$\delta \mathrm{r} = \Delta' \mathrm{r} - \Delta \mathrm{r} = (\mathrm{w}' - \mathrm{w}) \frac{(dt)^2}{2} \tag{1.15}$$

и называются *виртуальными перемещениями материальной точки* [39].

Определения виртуальных перемещений (1.15) и виртуальных скоростей Лагранжа согласованы в том смысле, что векторы $\delta\mathrm{r}$ и $\delta\mathrm{v}$ пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности не зависит от состояния $(\delta\mathrm{r} = \delta\mathrm{v}\ dt/2)$.

Виртуальные перемещения образуют множество, определяемое наложенными связями.

1.2.1. Виртуальные перемещения точки при наличии удерживающей связи. Пусть движение материальной точки происходит по поверхности (удерживающая связь):

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (\nabla f \neq 0). \tag{1.16}$$

Двукратное дифференцирование равенства (1.16) по времени приводит к уравнению, которому удовлетворяют ускорения w, w' в (1.13) и (1.14):

$$\mathrm{w} \cdot \nabla f + d = 0, \quad \mathrm{w}' \cdot \nabla f + d = 0. \tag{1.17}$$

Слагаемые, не зависящие от ускорения точки, обозначены здесь буквой d. После вычитания в (1.17) первого равенства из второго и умножения на $(dt)^2/2$ получаем уравнение $(\delta\, \mathrm{r} = (\delta\, x, \delta\, y, \delta\, z))$

$$\delta \mathrm{r} \cdot \nabla f = 0$$

Они совпадают при $\partial f/\partial t = 0$, т. е. элементарное действительное перемещение принадлежит множеству виртуальных перемещений в любой момент времени, если уравнение (1.16) явно от времени не зависит. Можно считать также, что виртуальные перемещения δx, δy, δz представляют собой вариации координат x, y, z в (1.16) при условии, что время t фиксировано. Поэтому виртуальные перемещения при связи вида (1.16) часто называют *изохронными* (*или синхронными*) *вариациями координат* [38].

Рассмотрим ограничения, налагаемые не только на положение, но и на скорость точки. При этом зависимость от скорости может быть как линейной, так и нелинейной.

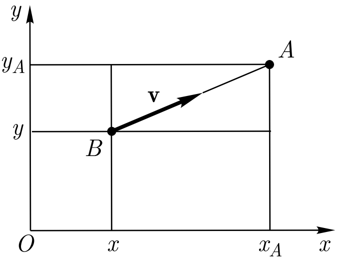

Рис. 1.1

Пример 1.4. Рассмотрим программное представление задачи преследования. Точка B с координатами x, y движется на плоскости Oxy так, что ее скорость v в любой момент времени направлена к точке A, закон движения которой — $x_A(t)$, $y_A(t)$ (рис. 1.1). Идеальное поведение, реализующее указанное правило, представляет ограничение на скорость v в виде уравнения

$$(y_A - y)\,\dot{x} - (x_A - x)\,\dot{y} = 0. \tag{1.20}$$

Очевидно, что для практической реализации условия (1.20) необходима идеально работающая система управления.

Пример 1.5. Пусть к движению точки предъявлено требование: обеспечить изменение модуля скорости по заданному закону (для реализации закона, как и в примере 1.4, возможно, потребуется система управления). Тогда ограничение можно представить уравнением

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - c\,(x, y, z, t) = 0 \quad (c > 0)\,. \tag{1.21}$$

Связи (1.20) и (1.21) являются частными случаями уравнения следующего вида:

$$\varphi\,(x, y, z,\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \qquad (\varphi\,(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0)\,. \tag{1.22}$$

В отличие от (1.16) в числе аргументов функции φ имеются производные по времени от координат точки (дифференциальная связь).

Составим уравнение для виртуальных перемещений точки, движение которой ограничено условием (1.22). Допускаемые связью (1.22) ускорения w, w$'$ должны удовлетворять уравнению, полученному из (1.22) дифференцированием по времени:

$$\begin{gathered}\mathbf{w}\cdot\nabla_v\varphi + d\,(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad \mathbf{w}'\cdot\nabla_v\varphi + d\,(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0,\\ \nabla_v\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_x}, \frac{\partial\varphi}{\partial v_y}, \frac{\partial\varphi}{\partial v_z}\right), \quad \nabla_v\varphi \neq 0.\end{gathered} \tag{1.23}$$

Примечание. Заметим, что уравнения для виртуальных перемещений (или виртуальных скоростей), полученные сравнением мыслимых движений с разными ускорениями, и уравнения, получаемые варьированием координат (или скоростей), несмотря на совпадение по форме имеют одно существенное различие: первые составлены *при фиксированном состоянии* с учетом движения согласно закону Ньютона и поэтому являются *точными,* а не приближенными [51]. Правило варьирования старших производных при фиксированном времени и фиксированных кинематических характеристиках более низкого порядка можно экстраполировать на движения, не описываемые уравнением второго закона Ньютона. При этом требуется соблюдать аналогичные требования: основное уравнение движения должно быть линейно относительно старшей производной; уравнения связей также должны быть линейны относительно старших производных (или приводиться к такому виду дифференцированием по времени).

Продемонстрируем основные классификационные признаки удерживающих связей на примерах. Пусть удерживающие связи имеют следующий вид (эти уравнения записаны для одной точки, а свойства мы будем формулировать для системы точек):

1) $f(x, y, z) = 0;$

2) $f(x, y, z, t) = 0;$

3) $a(x, y, z)\,\dot{x} + b(x, y, z)\,\dot{y} + c(x, y, z)\,\dot{z} = 0;$

4) $a(x, y, z, t)\,\dot{x} + b(x, y, z)\,\dot{y} + c(x, y, z)\,\dot{z} = 0;$

5) $a(x, y, z)\,\dot{x} + b(x, y, z)\,\dot{y} + c(x, y, z)\,\dot{z} + d(x, y, z) = 0;$

6) $a(x, y, z, t)\,\dot{x} + b(x, y, z)\,\dot{y} + c(x, y, z)\,\dot{z} + d(x, y, z) = 0.$

Связи вида 1, 2, не зависящие от скоростей точек, называются голономными (конечными, геометрическими). Возможно также, что к виду конечной связи приводится (путем интегрирования ее уравнения) связь, зависящая от скоростей. После интегрирования условие связи будет включать константу интегрирования (такие связи иногда называют полуголономными). Последняя определяется состоянием системы. Голономные связи налагают ограничения на положение системы в течение некоторого времени при условии, что скорости и ускорения точек удовлетворяют уравнениям, полученным в результате двукратного дифференцирования уравнения связи по времени.

Ограничения вида 3–6 являются кинематическими, и если уравнения не интегрируемы, то связи называются неголономными. Связи 3, 4 — линейные однородные относительно скоростей (не содержат свободного слагаемого); связи 5, 6 — неоднородные линейные относительно скоростей. Для связей 3, 4 используются термины «катастатические» [55] (или «обратимые» [39] применительно к импульсивным движениям), а для связей 5, 6 — «акатастатические» [55]. Происхождение этих терминов становится понятным в контексте свойства идеальности связей (см. § 5.3).

Склерономными («твердыми») называются связи, которые не меняются с течением времени (связи 1, 3, 5). При явной зависимости уравнения связи от времени она называется реономной («текущей») (связи 2, 4, 6).

Кроме того, употребляются термины «стационарная связь» (связи 1, 3) и «нестационарная связь» (для остальных связей). Иногда терминам «стационарная» и «нестационарная» однозначно сопоставляются определения «склерономная» и «реономная». Действительно, склерономная голономная связь всегда является стационарной, а реономные и нестационарные неголономные связи можно различать, например, в зависимости от определения скорости. Если полагать, что скорость есть производная от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по времени:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

то в уравнении связи 5 будет фигурировать элементарный промежуток времени dt и её нельзя называть склерономной. Определение скорости через производную пригодно только для движений, траектории которых являются кривыми класса C^1 (т. е. при которых $\mathbf{r}$ — непрерывные дифференцируемые функции времени). Для нахождения же скорости в данный момент времени t требуется информация об однозначном положении точки в момент $t + dt$, т. е. фактически в «будущем».

Вместе с тем имеется и более общее определение скорости: «О всяком теле, которое движется, говорят, что оно имеет быстроту или скорость, и эта скорость измеряется тем расстоянием, которое тело, двигаясь равномерно, проходит в данное время» (см. определение 5 в [76]). Эйлер для измерения скорости описывает условия мысленного эксперимента: «Скорость, которую имеет движущееся неравномерно тело в какой-либо точке проходимого пути, должна измеряться тем расстоянием, которое *могло бы* пройти в данное время тело, движущееся равномерно с этой же скоростью» (см. следствие 2 в [76]; курсив наш). Курсивом выделена отмеченная Эйлером виртуальность событий, происходящих в последующие моменты времени. Например, в теории импульсивных движений пренебрегается изменением положения и времени за время удара, поэтому связи с непрерывными коэффициентами рассматриваются как склерономные.

Отметим некоторые свойства связей, часто используемые при решении задач:

— из уравнения стационарной голономной связи после дифференцирования по времени получается уравнение в форме катастатической склерономной связи;

— из уравнения нестационарной голономной связи после дифференцирования по времени в общем случае получается уравнение в форме акатастатической реономной связи (если голономная связь зависит от времени линейно, то мы получим уравнение акатастатической склерономной связи);

— при катастатических связях действительные элементарные перемещения точки, $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, могут быть приняты в качестве виртуальных перемещений, поскольку они удовлетворяют той же системе уравнений; если $\mathbf{v} = 0$, то среди возможных (допускаемых связями) ускорений находятся и ускорения, равные нулю;

— акатастатические связи в положениях, удовлетворяющих равенствам вида $d\,(x, y, z) = 0$ (свободный член равен нулю), допускают состояние равновесия ($\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{w} = 0$).

1.2.2. Виртуальные перемещения точки при наличии неудерживающей связи. При ограничениях, имеющих форму неравенств $f\,(\mathbf{r}, t\,) \geqslant 0$ или $\varphi\,(\mathbf{r}, \mathbf{v},\, t\,) \geqslant 0$ (неудерживающие связи), движение точки в состоянии $\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$ является несвободным (см. § 1.1):

— если в случае геометрической связи

$$f\,(\mathbf{r}, t\,) = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \tag{1.32}$$

— если в случае дифференциальной связи

$$\varphi\,(\mathbf{r}, \mathbf{v},\, t\,) = 0. \tag{1.33}$$

Из (1.32) и (1.33) следует, что множество виртуальных скоростей (виртуальных перемещений), при которых рассматриваемые связи не нарушаются, удовлетворяет следующим неравенствам:

— для геометрической связи

$$\delta\mathbf{v} \cdot \nabla f \geqslant 0 \quad (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla f \geqslant 0)\,, \quad \nabla f \neq 0; \tag{1.34}$$

— для дифференциальной связи

$$\delta\mathbf{v} \cdot \nabla_v \varphi \geqslant 0 \quad (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla_v \varphi \geqslant 0)\,, \quad \nabla_v \varphi \neq 0. \tag{1.35}$$

Отметим, что при неудерживающей связи виртуальным скоростям и виртуальным перемещениям можно поставить в соответствие разности $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ не для любых возможных (допускаемых связями) ускорений $\mathbf{w}'$, $\mathbf{w}$, а лишь при условии, что ускорения $\mathbf{w}$ оставляют точку «на связи» (связь «не ослабляется по ускорению»). В случаях геометрической и дифференциальной связей это условие имеет вид

$$\mathbf{w} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \tag{1.36}$$

$$\mathbf{w} \cdot \nabla_v \varphi + d\,(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \tag{1.37}$$

Если связей несколько, то виртуальные скорости (виртуальные перемещения) точки должны удовлетворять условиям, налагаемым всеми связями по рассмотренным выше правилам для каждой из них.

Число независимых виртуальных перемещений точки называется *числом степеней свободы материальной точки.*

Движение точки в некотором состоянии является свободным, если имеется три произвольных виртуальных перемещения. При неудерживающей связи движение в положении «на связи» является свободным, если неудерживающая связь «ослабляется по скорости» (в этом случае она не налагает условия на виртуальные перемещения). Условия, налагаемые на виртуальные перемещения неудерживающими связями, имеют существенное отличие от условий, налагаемых удерживающими связями: они не допускают виртуальных перемещений, противоположных виртуальным перемещениям, обеспечивающим в (1.34) и (1.35) строгое неравенство.

1.2.3. Виртуальные перемещения системы материальных точек. Будем называть *виртуальной скоростью* (виртуальным перемещением) *системы материальных точек* совокупность виртуальных скоростей $\delta\,\mathbf{v}_k$ (виртуальных перемещений $\delta\,\mathbf{r}_k$; $k = 1, \ldots, n$) материальных точек системы.

Если связи геометрические:

$$f_i\,(\mathbf{r}_k, t) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots l; \;\; f\,(\mathbf{r}_k, t) = f\,(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, t))\,, \qquad (1.38)$$

то виртуальные скорости (виртуальные перемещения) удовлетворяют неравенствам

Вопросы о совместности или независимости виртуальных перемещений решаются на основе уравнений и неравенств (1.39), (1.41) по правилам линейной алгебры.

1.3. Внешние и внутренние связи

1.3.1. Внутренняя связь. Рассмотрим абсолютно твердое тело, по определению являющееся системой материальных точек, расстояния между которыми в процессе движения не изменяются. Примем некоторую точку O тела за полюс (она может быть произвольной точкой пространства, движущегося вместе с телом). Скорости $\mathbf{v}_O$ и $\mathbf{v}_k$ точки O и точки с номером k в одном и том же состоянии абсолютно твердого тела связаны соотношением

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_k \qquad (\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_O) \tag{1.42}$$

(где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела), а ускорения $\mathbf{w}_O$ и $\mathbf{w}_k$ — соотношением

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_k + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_k] \tag{1.43}$$

(где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор углового ускорения).

Отсюда для виртуальных скоростей $\delta\,\mathbf{v}_k$, $\delta\,\mathbf{v}_O$ (виртуальных перемещений $\delta\,\mathbf{r}_k$, $\delta\,\mathbf{r}_O$) получаем

$$\delta\,\mathbf{v}_k = \delta\,\mathbf{v}_O + \delta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_k; \tag{1.44}$$

$$\delta\,\mathbf{r}_k = \delta\,\mathbf{r}_O + \overrightarrow{\delta\chi} \times \boldsymbol{\rho}_k \quad (\delta\,\mathbf{w}_k = \delta\,\mathbf{w}_O + \delta\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_k)\,, \tag{1.45}$$

где $\delta\,\boldsymbol{\omega}$ — вариация вектора угловой скорости; $\overrightarrow{\delta\chi}$ — вектор, пропорциональный вариации углового ускорения $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (при фиксированных времени и угловой скорости).

Совокупность векторов $\delta\,\mathbf{r}_O$ и $\overrightarrow{\delta\chi}$ определяет виртуальное перемещение абсолютно твердого тела.

Связь, допускающая произвольные виртуальные перемещения системы как абсолютно твердого тела, называется внутренней; в противном случае связь — внешняя [66].

Среди виртуальных перемещений системы с внутренними связями имеются виртуальные перемещения свободного твердого тела, образованного «затвердеванием» конфигурации.

Пример 1.7. [1]) Пусть между координатами одной из точек системы существует удерживающая геометрическая связь вида

$$f\,(x, y, z) = 0. \tag{1.46}$$

Тогда систему можно переместить только при условии, что эта точка останется на поверхности (1.46).

[1]) Примеры 1.7, 1.8 и теорема 1.1 взяты из учебника С.А. Чаплыгина «Механика системы». Аналитическая статика. — М. Пг.: Госиздат, 1923. Ч. 1.

Если бы система внезапно «затвердела» (все точки соединились бы стержнями неизменной длины, в том числе с выделенной точкой O), то поступательное перемещение системы в направлении, перпендикулярном к поверхности (1.46), оказалось бы невозможным. Таким образом, связь (1.46) является внешней.

Пример 1.8. Пусть между координатами точек $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3\,(x_3, y_3, z_3)$ существует соотношение

$$l^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 - (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^2 \geqslant 0, \quad \mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k) \quad (k = 1, 2, 3). \tag{1.47}$$

Условие (1.47) может служить описанием следующего соединения: к точке M_2 присоединено колечко, через которое проходит гибкая нерастяжимая нить, соединяющая точки M_1, M_3. Длина нити — l.

В данном случае «затвердевание» системы не помешает ее перемещениям, аналогичным перемещениям абсолютно твердого тела. Следовательно, связь (1.47) — внутренняя.

Вывод о принадлежности связи классу внутренних связей в примерах 1.7, 1.8 сделан на основе качественного анализа. К нему же приводят теоремы, рассматриваемые в п. 1.3.2.

1.3.2. Некоторые теоремы о внутренних связях. Иногда при анализе и синтезе несвободной механической системы по виду уравнения связи можно установить, является связь внешней или внутренней. В случае голономной связи достаточные условия того, чтобы связь была внутренней, даются теоремой Чаплыгина.

Теорема 1.1. Геометрическая связь является внутренней, если уравнение связи зависит только от расстояний от одной из точек системы до остальных и от углов между прямыми, соединяющими эту точку со всеми остальными, т. е.

$$f\left\{\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right], \left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2\right], \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \left[(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2)\right], \ldots\right\} = 0. \tag{1.48}$$

При доказательстве вместо выделенной точки системы будем использовать точку O пространства с произвольными виртуальными перемещениями и уравнение связи вида

$$f\,(a_{ij}) = 0, \tag{1.49}$$

где $a_{ij} = \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_j$, $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O$ $(i, j = 1, \ldots, n)$; $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_O$ — радиусы-векторы материальных точек и точки O соответственно.

Доказательство. Доказательство теоремы состоит в том, чтобы показать существование произвольного вектора бесконечно малого виртуального поворота $\overrightarrow{\delta\chi}$, обладающего свойством (см. (1.45))

$$\delta\mathbf{r}_i - \delta\mathbf{r}_O = \delta\boldsymbol{\rho}_i = \overrightarrow{\delta\chi} \times \boldsymbol{\rho}_i, \tag{1.50}$$

где $\delta \boldsymbol{\rho}_i$ — виртуальные перемещения точек системы, допускаемые связью (1.49); $\delta \mathbf{r}_O$ — виртуальное перемещение точки O. Векторы $\delta \boldsymbol{\rho}_i$ несут следующий кинематический смысл: это виртуальные перемещения точек в результате виртуальных поворотов системы как единого абсолютно твердого тела относительно осей, имеющих поступательные виртуальные перемещения вместе с точкой O. Иначе говоря, $\delta \mathbf{r}_O$ — переносные виртуальные перемещения, а $\delta \boldsymbol{\rho}_i$ — относительные виртуальные перемещения. Связь (1.49) налагает ограничения только на относительные виртуальные перемещения:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \delta \left(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_j\right) = 0. \tag{1.51}$$

При произвольном векторе $\overrightarrow{\delta\chi}$ для виртуальных перемещений вида (1.50) имеем

$$\delta \left(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_j\right) = \delta \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_j + \boldsymbol{\rho}_i \cdot \delta \boldsymbol{\rho}_j = \left[\overrightarrow{\delta\chi} \times \boldsymbol{\rho}_i\right] \cdot \boldsymbol{\rho}_j + \left[\overrightarrow{\delta\chi} \times \boldsymbol{\rho}_j\right] \cdot \boldsymbol{\rho}_i = 0,$$

т. е. виртуальные перемещения (1.50) удовлетворяют уравнению (1.51) независимо от вида функций (1.49).

Таким образом, связь вида (1.49) допускает виртуальные перемещения системы как абсолютно твердого тела, и следовательно, является внутренней, что и требовалось доказать.

В примере 1.8 уравнение связи (1.47) имеет вид (1.49). Согласно доказанной теореме такая связь является внутренней.

Доказательство не изменится, если существует явная зависимость уравнения связи от времени t, т. е. связи вида

$$f\left(a_{ij}, t\right) = 0 \tag{1.52}$$

тоже являются внутренними.

Теорема 1.2. Для того чтобы удерживающая дифференциальная связь была внутренней, достаточно, чтобы уравнение связи имело вид

$$\varphi\left(a_i, a_{ij}\right) = 0, \tag{1.53}$$

$$a_i = \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i, \qquad a_{ij} = \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_j, \qquad \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O,$$

где $\overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_i$ — относительные производные векторов относительного положения точек в системе координат с центром в точке O, имеющей произвольные виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}_O$.

Доказательство. Связь (1.53) налагает на виртуальные относительные скорости $\delta \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_i$ условие

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \boldsymbol{\rho}_i \cdot \delta \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_i = 0. \tag{1.54}$$

Доказательство. Доказательство теоремы состоит в проверке выполнения уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial b_{ij}} \left(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j\right) \cdot \left(\delta \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_i - \delta \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_j\right) = 0, \tag{1.59}$$

в котором виртуальные относительные скорости $\delta \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_i = \delta \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$.

Для всех $i, j = 1, \ldots, n$ имеют место равенства

$$\left(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j\right) \cdot \left[\delta \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j\right)\right] = 0,$$

поэтому уравнение (1.59) удовлетворяется. Следовательно, связь допускает виртуальные перемещения системы как единого абсолютно твердого тела, т. е. является внутренней.

Теорема 1.3 обобщает теорему 1.2, поскольку уравнение связи (1.53) есть частный случай уравнения (1.58).

Пример 1.10. Пусть два абсолютно твердых тела находятся в контакте без проскальзывания, т. е. в геометрической точке контакта материальные точки A и B тел имеют одинаковые абсолютные скорости ($\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$). В произвольно движущейся системе координат с центром в точке O, имеющей произвольные виртуальные перемещения, относительные скорости $\overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_A$ и $\overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_B$ точек A и B, находящихся в контакте в какой-либо момент времени, также будут равны:

$$\overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_A = \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_B. \tag{1.60}$$

Уравнение (1.60) налагает на виртуальные относительные скорости условие в виде уравнения

$$\delta \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_A - \delta \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_B = 0, \tag{1.61}$$

которое выполняется при произвольном векторе $\delta \boldsymbol{\omega}$:

$$\delta \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_A - \boldsymbol{\rho}_B) = 0,$$

так как $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_B$. Заметим, что A и B не являются фиксированными материальными точкам, поскольку в другие моменты времени могут контактировать другие пары точек.

Утверждение о том, что равенство скоростей точек контактирующих тел не препятствует виртуальным перемещениям системы как единого абсолютно твердого тела, можно сразу сделать на основании теоремы 1.2, предварительно представив векторное равенство (1.60) (при $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_B$) как три скалярных равенства вида

$$\overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_A \cdot \boldsymbol{\rho}_A = \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}_B \cdot \boldsymbol{\rho}_B$$

для трех различных (некомпланарных) радиусов-векторов относительного положения, получаемых путем переноса центра O.

Пример 1.11. Пусть движение двух абсолютно твердых тел подчинено следующему условию: в каждый момент времени имеются две

Доказательство. Представим виртуальные перемещения материальных точек в виде сумм:

$$\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{r}_O + \overrightarrow{\delta\chi} \times \boldsymbol{\rho}_k + \delta' \mathbf{r}_k \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{1.67}$$

где $\delta \mathbf{r}_O$ — виртуальное перемещение произвольного центра O; $\overrightarrow{\delta\chi}$ — виртуальный поворот вокруг центра O осей, в которых $\delta' \mathbf{r}_k$ есть относительные виртуальные перемещения точек; $\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_O$.

1. Необходимость. Пусть все связи (1.64) — внутренние. Согласно определению внутренних связей среди виртуальных перемещений системы имеются ее перемещения как единого абсолютно твердого тела:

$$\delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{r}_O + \overrightarrow{\delta\chi} \times \boldsymbol{\rho}_k \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{1.68}$$

После подстановки (1.68) в уравнения (1.65) видим, что необходимое условие равенства нулю коэффициентов при независимых векторах $\delta \mathbf{r}_O$, $\overrightarrow{\delta\chi}$ совпадает с равенствами (1.66).

2. Достаточность. Допустим, что соотношения (1.66) выполнены. Тогда подстановка виртуальных перемещений (1.67) в (1.65) приводит к условиям только на виртуальные относительные перемещения:

$$\sum_k \mathbf{n}_{ik} \cdot \delta' \mathbf{r}_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l). \tag{1.69}$$

Следовательно, при $\delta' \mathbf{r}_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ перемещения вида (1.68) (с учетом (1.66)) являются виртуальными перемещениями системы, что и требовалось доказать.

Следствие. Как видно из равенств (1.69), внутренние связи (1.64) могут обеспечиваться за счет относительных ускорений точек $(\mathbf{w}_k^r)$. Действительно, замена в (1.64) абсолютных ускорений точек суммами

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_k^r + \mathbf{w}_k^e + \mathbf{w}_k^c$$

(где $\mathbf{w}_k^e$ и $\mathbf{w}_k^c$ — переносные и кориолисовы ускорения точек) с учетом (1.66) приводит к уравнениям вида

$$\begin{gathered} \sum_k \mathbf{n}_{ik} \cdot \mathbf{w}_k^r + {d'}_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l); \\ d'_i = d_i + \sum_k \mathbf{n}_{ik} \cdot \left[\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}_k) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}_k + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_k^r \right]. \end{gathered} \tag{1.70}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость осей; $\mathbf{v}_k^r$ — относительные скорости точек. Из сравнения (1.69) и (1.70) следует, что в условиях теоремы 1.4 виртуальные относительные перемещения $\delta' \mathbf{r}_k$ можно выбрать пропорциональными вариациям относительных ускорений, например в виде $\delta' \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\rho}_k$, где $\delta \boldsymbol{\varphi}$ — вектор виртуального относительного поворота.

Уравнение связи (1.71) представляет собой частный случай уравнения (1.72). Следовательно, условие неразрывности несжимаемой среды (1.71) является внутренней связью.

Примечание. Величины γ_{ij} в уравнении связи (1.72) имеют смысл компонент Эйлера тензора скоростей деформаций.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 1.6. Ограничение на поле относительных перемещений $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ сплошной среды в виде

$$f\left(c_{ij},\, \rho^2,\, t\right) = 0, \tag{1.75}$$

$$c_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3)\,, \quad \rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

является внутренней связью (достаточное условие).

При доказательстве используется подстановка

$$\delta \mathbf{u} = \overrightarrow{\delta\chi} \times \boldsymbol{\rho},$$

где $\overrightarrow{\delta\chi}$ — не зависящий от координат вектор бесконечно малого виртуального поворота среды как единого абсолютно твердого тела.

1.4.2. Поле виртуальных скоростей несжимаемой жидкости при однородном вихревом движении. Рассмотрим ограничения на поле скоростей несжимаемой однородной жидкости в однородном вихревом движении. Однородным вихревым называют движение, при котором вектор $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ в каждый момент времени одинаков во всех точках поля скоростей. Предполагается, что жидкость полностью заполняет полость внутри абсолютно твердого тела.

Пусть уравнение поверхности полости в неподвижной системе координат имеет вид

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1.76}$$

Полагая, что стенки полости непроницаемы для скоростей частиц, находящихся на ее поверхности, получаем условие

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = 0. \tag{1.77}$$

Введем обозначение для вихря скорости:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega}. \tag{1.78}$$

Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ в (1.78) имеет смысл угловой скорости каждой частицы жидкости, если ее рассматривать как затвердевшую.

Из (1.78) следует, что поле скоростей однородного вихревого движения можно представить как (см., например, [44])

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho} + \nabla\Phi, \tag{1.79}$$

где $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$; Φ — скалярная функция (требования к ней обсуждаются ниже).

Для поля скоростей (1.79) условие неразрывности несжимаемой жидкости (1.71) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla^2\Phi = 0, \tag{1.80}$$

т. е. функция Φ должна быть гармонической ($\Delta\Phi = 0$; $\nabla^2 = \Delta$ — оператор Лапласа). Связь (1.80), как было выяснено выше, является внутренней.

Для виртуальных скоростей частиц, находящихся на границе, из условия (1.73) получаем

$$\delta\mathbf{v} \cdot \nabla f = 0. \tag{1.81}$$

Уравнение (1.81) при $\delta\mathbf{v} = \delta\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}$ (виртуальные скорости точек системы при поворотах среды как единого твердого тела) имеет вид

$$[\delta\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}] \cdot \nabla f = 0, \tag{1.82}$$

что выполняется для произвольного вектора $\delta\boldsymbol{\Omega}$ при коллинеарности векторов $\boldsymbol{\rho}$ и ∇f. Последнее возможно только в случае сферической полости с центром, совпадающим с неподвижным центром, вокруг которого происходит поворот. Таким образом, связь (1.77) в случае формы полости, отличной от сферической, не допускает «твердых» виртуальных перемещений жидкости.

Вместе с тем возможны так называемые квазитвердые перемещения, при которых виртуальные скорости связаны с виртуальной угловой скоростью $\delta\boldsymbol{\Omega}$ более общим, чем для твердого тела, линейным соотношением:

$$\delta\mathbf{v} = \mathrm{A} \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}, \tag{1.83}$$

где A — тензор второго ранга.

Расширение (1.83) для поля скоростей (1.79) означает, что функция Φ может (оставаясь гармонической) быть составлена в виде суммы (обозначения координат x, y, z заменены на x_1, x_2, x_3):

$$\Phi = \overset{3}{}$$

ее геометрией [44]. Пусть, например, полость имеет эллипсоидальную форму:

$$f = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1 = 0 \tag{1.86}$$

(где a_i — полуоси эллипсоида). Составим с учетом (1.85), (1.86) уравнение (1.81):

$$\sum_{\{1\,2\,3\}}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\delta\Omega_2 x_3 - \delta\Omega_3 x_2 + \sum_{i=1}^{3} \delta\Omega_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \right) = 0. \tag{1.87}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta\Omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$, получаем уравнения для определения функций ψ_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - x_3 \right) + \frac{\partial f}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - x_2 \right) = 0 \quad \{1\,2\,3\}. \tag{1.88}$$

Их решение будем искать в виде

$$\psi_1 = \alpha_1 \, x_2 \, x_3 \quad \{1\,2\,3\}, \tag{1.89}$$

где постоянные α_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ пока не известны.

Функции (1.89) — гармонические. Подставим их в (1.88) и учтем, что $\partial f / \partial x_i = 2x_i / a_i^2$. Тождественное выполнение полученных равенств имеет место при следующих значениях постоянных:

$$\alpha_1 = \frac{a_3^2 - a_2^2}{a_3^2 + a_2^2} \quad \{1\,2\,3\}. \tag{1.90}$$

С учетом (1.89), (1.90) составим функцию Φ:

$$\Phi = \sum_{\{1\,2\,3\}} \frac{a_3^2 - a_2^2}{a_3^2 + a_2^2} \, \Omega_1 \, x_2 \, x_3. \tag{1.91}$$

Для рассматриваемого однородного вихревого движения жидкости внутри эллипсоидальной полости (1.86) тензор A в (1.83) имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} 0 & (\alpha_2 + 1)\, x_3 & (\alpha_3 - 1)\, x_2 \\ (\alpha_1 - 1)\, x_3 & 0 & (\alpha_3 + 1)\, x_1 \\ (\alpha_1 + 1)\, x_2 & (\alpha_2 - 1)\, x_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Виртуальные перемещения частиц жидкости представимы как

$$\delta \mathbf{r} = \mathrm{A} \cdot \overrightarrow{\delta\chi}. \tag{1.92}$$

Таким образом, эллипсоидальная полость не препятствует «квазитвердым» виртуальным перемещениям несжимаемой жидкости, находящейся в полости.

сюда входит параметр p, изменение которого описывается дифференциальным линейным относительно его первой производной по времени уравнением (основное уравнение для параметра p не связано со вторым законом Ньютона). Назовем набор переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, p *расширенным состоянием* [1]) и рассмотрим ограничение на расширенное состояние в форме уравнения

$$\psi\,(t,\,\mathbf{r},\,\mathbf{v},\,p) = 0. \tag{1.94}$$

Предполагается, что функция ψ непрерывна вместе с частными производными первого порядка по всем аргументам.

Для получения условия на производные того же порядка, что и основные уравнения для координат и параметра (т. е. относительно ускорения $\mathbf{w}$ и $\dot{p}$), продифференцируем уравнение (1.94) по времени:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{w} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\dot{p} + d\,(t,\,\mathbf{r},\,\mathbf{v},\,p) = 0, \tag{1.95}$$

где все слагаемые, не содержащие ускорений $\mathbf{w}$ и $\dot{p}$, обозначены через $d\,(t,\,\mathbf{r},\,\mathbf{v},\,p)$. Кинематически допускаются (являются возможными) только такие $\mathbf{w}$ и $\dot{p}$, которые удовлетворяют уравнению (1.95). Для двух возможных движений с $\mathbf{w}$, $\dot{p}$ и $\mathbf{w}'$, $\dot{p}'$ из одного и того же расширенного состояния имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{w} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\dot{p} + d\,(t,\,\mathbf{r},\,\mathbf{v},\,p) = 0; \tag{1.96}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{w}' + \frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\dot{p}' + d\,(t,\,\mathbf{r},\,\mathbf{v},\,p) = 0. \tag{1.97}$$

Вводя, как и в п. 1.2.1, обозначения $\delta\mathbf{w} = \mathbf{w}' - \mathbf{w}$ и $\delta\dot{p} = \dot{p}' - \dot{p}$, из (1.96) и (1.97) находим уравнение для $\delta\mathbf{w}$ и $\delta\dot{p}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{w} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\delta\dot{p} = 0. \tag{1.98}$$

Аналогичное уравнение можно получить для виртуальной скорости $\delta\mathbf{v}$ и виртуального изменения параметра δp, если варьировать $\mathbf{v}$ и p при постоянных t и $\mathbf{r}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{v} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\delta p = 0. \tag{1.99}$$

Условие регулярности связи в данном случае означает, что $\nabla_v\psi$ и $\partial\psi/\partial p$ не должны быть одновременно равны нулю.

---

[1]) Во многих задачах построения моделей сплошной среды пока еще открыта проблема введения так называемых определяющих параметров [64]. Общий подход, по-видимому, должен допускать наличие зависимостей (связей) между определяющими параметрами, в число которых могут входить и кинематические характеристики.