В. И. БАРАНОВ
Б. С. СТЕЧКИН

Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2004

УДК 519.1
ББК 22.18
Б 24

Баранов В. И., Стечкин Б. С. **Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения.** — 2-е изд., исправ. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 240 с. — ISBN 5-9221-0493-4.

Изложены три широких класса экстремальных комбинаторных задач: о разбиениях чисел, о системах множеств и о системах векторов. Продемонстрированы возможности практического использования решений экстремальных комбинаторных задач в информатике и вычислительной технике.

Особое место отведено новому направлению – экстремальным задачам о разбиении чисел, основывающемуся на понятии вложимости разбиений чисел. Вложимость разбиений чисел позволяет формализовать важные практические постановки: проектирование технических и программных средств, распределение ресурсов ЭВМ, задачу о рюкзаке, задачу о заполнении мешков, транспортные задачи.

Первое издание — 1989 г.

Для научных работников в области математики, кибернетики, информатики и вычислительной техники, а также для студентов и инженеров.

Табл. 4. Ил. 54. Библиогр. 198 назв.

ISBN 5-9221-0493-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 4

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ГЛАВА 5

ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

После выхода первого издания книги в 1989 г. был опубликован издательством KLUWER в 1995 г. сильно переработанный и увеличенный в объеме ее английский перевод.

Книга неоднократно использовалась как учебное пособие для преподавания начал дискретной математики в университетах и институтах России и за рубежом. Этот опыт не остался замкнутым. В частности, он проявил увеличение интереса к основаниям дискретной математики и ее простейшим понятиям, следуя чему в настоящем издании мы постарались дополнить соответствующие разделы, для этого в ряде случаев даже снимая тексты доказательств, отсылая за ними в предыдущие издания.

Вообще, на наш взгляд (сознавая, что для многих на сегодня — спорный) комбинаторика перестает быть прежде всего «служкой» практических нужд, но начинает отважно претендовать на место одного из фундаментальных разделов математики. Надеемся, книга поспособствует объективизации этого вопроса.

Настоящее издание пополнено приложением, в целом посвященном идейному развитию понятия «Анализа Положений», введенному Г. Лейбницем, в котором большую роль сыграла работа Л. Эйлера, русский перевод которой приводится здесь впервые.

Мы по-прежнему стремились сохранить общий внутренний строй книги как учебного пособия, справочника и оригинальной монографии. И если это в какой-то мере удалось, то во многом благодаря нашим коллегам, друзьям и помощникам. Спасибо им большое.

Данная книга служила учебным пособием для курса «Дискретная математика» в течение трех последних лет в МГТУ им. А. Н. Косыгина, за что авторы выражают свою признательность проф. А. С. Охотину и проф. П. А. Севостьянову.

Настоящее издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-14061), которому авторы выражают особую признательность.

Москва, 2003 г. В. И. Баранов, Б. С. Стечкин

ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Английская версия русскоязычного издания существенно дополнена новыми материалами и почти на пятьдесят процентов больше первоначальной по объему. Часть новых материалов была подготовлена в сотрудничестве с коллегами. Это:

А. Климов, А. Косточка, И. Кан, И. Райвал, В. Шматков, К. Рыбников, А. Малых, С. Сальников, Н. Зауер, А. Сидоренко, Ж. Макинтош, В. Кокей, К. Додсон, С. Радзисовский, В. Редл, Р. Вильсон, Д. Катона.

В частности, Жак Макинтош предложил использовать слово «packability» для нового русского термина «вложимость».

Особую благодарность выражаем переводчику. Нами неоднократно предпринимались попытки перевода комбинаторной литературы на русский язык, и мы знаем, насколько трудно корректно передать мысли, которые часто выражаются тяжелым языком и перегружены значением. Однако мы полагаем, что даже настоящий абзац был переведен вполне успешно.

Мы благодарим издательство «КЛЮВЕР», которое отважилось осуществить этот проект, хотя мы и считаем, что риск был существенно снижен благодаря превосходной координации всей работы со стороны Маргарет Дейгнан, которой мы выражаем нашу глубочайшую признательность. Для второго автора подготовка английской версии книги осуществлялась частично за счет гранта по алгебраической комбинаторике Российского фонда фундаментальных исследований № 93-011-1442.

Москва, 1993 г. В. И. Баранов, Б. С. Стечкин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Данная книга является результатом тесного сотрудничества инженера и математика по разработке методов решения задач, возникающих при создании автоматизированных систем управления (АСУ). Основным результатом этого сотрудничества явилась представленная в книге комбинаторная модель — вложимость разбиений чисел.

Исследованию вложимости разбиений чисел предшествовал анализ ряда практических задач, возникающих при проектировании эффективных методов управления распределением памяти ЭВМ, разработке методов анализа структуры программных средств АСУ и т. д. Выбор комбинаторных методов для исследований предопределил разработку новой, важной для практики тематики — экстремальных комбинаторных задач о вложимости разбиений чисел. Это комбинаторное направление оказалось полезным не только для формализации и решения ряда инженерных задач — с его помощью решен класс экстремальных задач о графах.

Целью данной книги является знакомство инженеров и математиков с разработанными авторами методами решения ряда прикладных и математических задач. Материал книги представлен пятью главами.

Глава 1 представляет собой краткий справочник по необходимым комбинаторным понятиям. В частности, наряду со всеми элементарными комбинаторными схемами излагается предлагаемая авторами схема списка, позволяющая унифицировать простейшие комбинаторные схемы.

Глава 2 содержит основные математические результаты исследований вложимости разбиений чисел и составляет наиболее полную на сегодняшний день сводку результатов в этом направлении. В качестве иллюстрации применимости этих результатов отмечена их связь со старинной задачей о взвешиваниях и другими постановками. В виде упражнений приводятся задачи и утверждения о вложимости разбиений чисел.

Глава 3 посвящена знакомству с экстремальными задачами о графах и системах множеств; показана их связь с результатами о вложимости разбиений чисел.

Глава 4 представляет некоторые экстремальные геометрические задачи и применения результатов их решения.

В главе 5 показаны методы использования результатов решения экстремальных комбинаторных задач о вложимости разбиений чисел при проектировании АСУ. Здесь приведены комбинаторные модели для исследования процессов управления выполнением заданий АСУ и распределения памяти ЭВМ. Демонстрируется применение теорем о вложимости для расчета размера оперативной памяти ЭВМ, приводятся определения ряда новых инженерных понятий, связанных с применением методов комбинаторного анализа для исследования функционирования АСУ. Предлагается новый способ оценки эффективности алгоритмов, характеризуемых экстремальными границами.

Авторы выражают признательность всем специалистам, которые способствовали получению результатов, изложенных в книге, а именно: О. В. Вискову, Р. Л. Грэхему, Я. Деметровичу, Д. Катоне, Ю. В. Матиясевичу, С. Г. Сальникову, П. Эрдёшу; авторы также благодарят А. Ф. Сидоренко, пополнившего материал гл. 3 результатами о запрещенных подграфах и числах Рамсея и принявшего участие в написании первых двух параграфов гл. 4. Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Гущину, В. К. Кривощекову и А. А. Цыпкину за большую помощь, оказанную при составлении компьютерных программ для получения численных результатов гл. 2.

Особую благодарность авторы адресуют рецензентам, замечания которых не только способствовали улучшению книги, но и повлияли на ее структуру.

Москва, 1989 г. В. И. Баранов, Б. С. Стечкин

ВВЕДЕНИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Насколько нам известно, это — первая русская книга по общей комбинаторике, которая переводится на английский язык. Последние десятилетия имел место обратный процесс: на русский язык переводились и печатались большими тиражами западные монографии, труды конференций и некоторые сборники статей по комбинаторике.

В послевоенный период в России происходило очень активное развитие комбинаторных исследований: переводные издания наряду с книгами на русском языке, труды конференций и статьи и специализированный журнал по комбинаторике. Стало быть, российские комбинаторики были лучше информированы, чем их западные коллеги. При чтении настоящей книги может создаться впечатление, что мы недостаточное внимание уделяем иностранным результатам. В действительности мы несколько удивлены появлению этого перевода, поскольку изначально книга адресовалась российским читателям с российскими целями.

Одна из таких целей — привлечь молодых людей к тематике экстремальных задач и к комбинаторике как к предмету исследований. Таким образом, отчасти настоящая книга имеет особенности как учебника, так и справочника, и подходит для студентов — математиков и начинающих инженеров. Мы рады тому, что эта цель достигнута хотя бы в том, что работа одного из студентов представлена в английской версии продвижениями по проблеме Фробениуса.

Другая цель состоит в нашей попытке расширить экстремальные подходы к решению большого класса задач, включая рассматривавшиеся ранее как исключительно алгоритмические. К сожалению, проблема «$P = NP$» порою оказывалась неразрешимой не для одних лишь теоретиков.

Взаимосвязанной с этим является и третья цель (хронологически она первая): расширить свободу выбора теоретических оснований для моделирования реальных явлений, приводящих к полному решению практических задач.

Реальное явление, которое подсказало весь настоящий проект, состоит в следующем: если большое число задач (скажем, 108) одновременно решаются на компьютере, происходит «толкучка» (фрагментация памяти), которая приводит к резкому увеличению как общего времени, так и отдельного времени решения каждой задачи. Иной раз это имеет существенное и даже фундаментальное значение, например, при обнаружении и обслуживании (уничтожении) серии быстролетящих целей. И если их подлетное время (например, до Москвы) составляет от пяти до восьми минут, то выигрыш каждой секунды в работе компьютера превращается во вполне конкретную реальность.

Этот метод достаточно универсален, так как у каждого компьютера есть память — она имеется даже у счетов (абака), которые до сего дня отличает непревзойденная конфигурация. Счеты одновременно являются носителем памяти, процессором и монитором, но непременно с человеком.

Москва, 27 января 1993 г. В. И. Баранов, Б. С. Стечкин

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Данная книга представляет сравнительно новое проблемное направление экстремальных комбинаторных задач — о разбиениях чисел, о графах и системах множеств, о системах векторов в линейном нормированном пространстве.

Для дополнительного обоснования значимости этого направления даются приложения экстремальных задач, в частности, излагаются элементы теоретического расчета и проектирования систем обработки информации. Поэтому нам представляется целесообразным изложить свое понимание того, какое место занимает проблематика экстремальных задач в комбинаторике наряду с ее другими проблемными направлениями.

Начало систематических комбинаторных исследований положено трудами Б. Паскаля и П. Ферма. Вопрос об азартной игре шевалье де Мере был сведен к различимости отдельных комбинаций и подсчету благоприятных исходов. Три главы труда Я. Бернулли «Ars Conjectandi» составили первое систематизированное изложение комбинаторных фактов. Работы Я. Бернулли и Г. Лейбница способствовали выделению комбинаторики в самостоятельный раздел. Именно Г. Лейбниц осуществил первую попытку целостного осмысления комбинаторики в своей диссертации «Ars Combinatoria», откуда, по-видимому, и пошел термин «комбинаторика».

Русская математическая речь термином «комбинаторика» пополнилась не сразу; предпочтение отдавалось «теории соединений» — это название вполне отражает суть. Основным объектным понятием комбинаторики является понятие соответствия. Комбинирование есть перебор соответствий между свойствами объектов с целью изучения их природы. Сложность такого перебора предопределяется взаимной зависимостью этих свойств. Предмет комбинаторики состоит в изучении соответствий и комбинаций простейших математических объектов — чисел, множеств и фигур. В методологической основе комбинаторики лежит комбинирование тремя атрибутными свойствами множества — различимостью, очередностью и целостностью. Это комбинирование порождает весь простейший комбинаторный инструментарий: различимость — мультимножество, очередность — перестановку, целостность — разбиение.

Объектами комбинаторных соединений могут служить понятия не только математические, но и любые практические, будь то предметы, люди, знакомства, высказывания. Именно эта свобода выбора объектов исследования обеспечивает простоту, доступность и практическую значимость комбинаторных постановок, а подчас и их мистическую широту.

Во второй половине XIX в. основы теории соединений стали входить в обязательные курсы алгебры для гимназий и реальных училищ России и других стран. Углубленное изучение комбинаций и соединений объектов проводилось в тех разделах математики, которым эти объекты принадлежали, — анализу, алгебре, геометрии, теории чисел, теории множеств, логике. Это, в свою очередь, нашло отражение в специфике и многообразии применяемых методов, а также в становлении основных проблемных направлений. Вместе с тем все комбинаторные тематики тесно взаимосвязаны и объединяются единым предметом — комбинаторикой; все они составляют общую комбинаторику.

К началу XX в. комбинаторный анализ как и математический анализ функций дискретного аргумента, по образному выражению Мак-Магона, «занимал землю между алгеброй и высшей арифметикой»; тогда же наметилась тенденция «комбинаторной атаки и на иные территории». Процесс этот тем мощнее, чем действенней методы комбинаторики, в том числе и благоприобретенные в ходе этого процесса.

На становление исследований и их формирование в отдельные направления и тематики влияют два фактора:

– предметный, т. е. выбор объекта исследований,

– проблемный, т. е. выбор цели исследований.

Выбор зависит от осознанной необходимости и имеющихся возможностей; развитие тематики обогащает и то и другое.

Простейший количественный анализ комбинаций и соединений составляет основу традиционного проблемного направления комбинаторики — перечислительные задачи. Развитие этого направления служит главным источником построения комбинаторного анализа. Исторически первым и общим для комбинаторного анализа явился метод производящих функций. Разработанный Эйлером в первую очередь для нужд теории разбиений чисел, этот аналитический метод оказался эффективным инструментом и для комбинаторики; он был развит до таких тонких форм, как метод производящих функций Дирихле, метод тригонометрических функций — методов, применяемых не только в комбинаторике и теории чисел. Развитие метода производящих функций во многом шло за счет задач о разбиениях. Один из самых ярких моментов этого развития — создание «кругового» метода, первоначально для подсчета всех разбиений фиксированного числа.

Иное проблемное направление комбинаторики составляют структурные задачи. Наиболее явственно проявилось оно в теории графов.

Теория графов представляет собой раздел комбинаторики, изучающий различного рода простейшие отношения на множествах и системах множеств. Однако зарождение этого раздела пришлось на то время, когда понятия соответствия и отношения еще не выделились как самостоятельные математические, но лишь проявились через иные — прежде всего, геометрические и топологические — понятия.

«Но не довольно мне одной алгебры, ибо ни кратчайших доказательств, ни красивейших конструкций геометрии не доставляет. Надобен еще один анализ, геометрический или линейный, непосредственно оперирующий с позиций, алгебра с величиной... Analysis situs. Думаю, что располагаю таким средством, и что фигуры и даже машины и движения можно было бы представлять с помощью символов, как алгебра представляет числа и величины... Мне остается добавить еще одно замечание о том, что я считаю возможным распространить характеристику на вещи, недоступные чувственному воображению; но это слишком важно и слишком далеко заходит для того, чтобы я мог объясниться на этот счет в немногих словах». Так писал Г. Лейбниц К. Гюйгенсу 8 сентября 1679 г. В этом письме на примере некоего геометрического этюда Лейбниц ищет общие способы формального оперирования с соответствиями. Самый термин *situs* (позиция, положение) можно понимать как соответствие объекта месту. Всю жизнь не оставлял Лейбница этот замысел, и через 15 лет он писал Лопиталю: «... я хотел бы иметь возможность его реализовать, но сухие и отвлеченные поначалу размышления меня слишком возбуждают... Будучи в этом году более нездоров, чем в течение уже долгого времени, я принуждаю себя воздерживаться, хотя мне это и не удается в такой мере, как следовало бы». Замысел Лейбница опережал свое время, но как оказалось — ненадолго.

Решая казалось бы шуточный топологический вопрос-головоломку об обходе семи кенигсбергских мостов, Л. Эйлер вывел необходимые и достаточные условия существования таких обходов во всей общности, положив тем самым начало теории графов. Исходный вопрос состоял в следующем: можно ли пройти по всем мостам лишь единожды и возвратиться в исходную точку? Полагая связные части суши за точки, а мосты — за линии, можно нарисовать граф и сформулировать вопрос как возможность обхода графа по точкам (вершинам) и линиям (ребрам) с условием однократности прохождения по последним. Л. Эйлер в 1735 г. оформил работу «Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis», где установил локальные условия осуществимости такого обхода, именуемого теперь *эйлеровым циклом*: *граф обладает эйлеровым циклом тогда и только тогда, когда он связен и из каждой его вершины исходит четное число ребер.* Граф кенигсбергских мостов этому условию не удовлетворяет. В этой же работе Л. Эйлер установил, что сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному числу его ребер.

Таким образом, понятие графа как системы двухэлементных подмножеств (ребер) некоторого множества (вершин) возникло и изучалось на основе его топологической природы. Выведенный Куратовским *критерий планарности графа* расширил представление о нем: *граф может быть изображен на плоскости точками и соединяющими их линиями без пересечения последних тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов,* *гомеоморфных графам K_5 и $K_{3,3}$*. Это значит, что «топологичность» графа полностью определяется его теоретико-множественной структурой. Поэтому топологические задачи теории графов выделяются в отдельную тематику: сюда относятся, в частности, вопросы о раскраске карт и размещениях графов на многообразиях.

Вопросы укладки графа на плоскости и других поверхностях имеют свое начало в трудах Л. Эйлера, который установил, что для любого полиэдра, имеющего V вершин, E ребер и F граней, справедливо равенство $V - E + F = 2$.

Графическое представление комбинаций и соединений геометрическими фигурами в сопоставлении с евклидовой геометрией привело к созданию теории матроидов, комбинаторных и конечных геометрий. Высокая абстрактность алгебры, логики и теории множеств не только обусловила их применение для изучения соединений объектов любой природы, но и сделала возможным разрешение вопросов о самих реализациях конкретных структурных явлений, заложив тем самым начало еще одного направления — алгоритмического.

Характеризация предельных возможностей комбинаторных соединений составляет суть еще одного проблемного направления — экстремальных комбинаторных задач, т. е. в общем виде поиска ответа на вопрос, который можно сформулировать словами П. Л. Чебышева: «Как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды?» Практическая важность экстремальной тематики в целом охарактеризована П. Л. Чебышевым: «Большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, совершенно новым для науки, и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного... Сближение теории с практикой дает самые благоприятные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее, она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки, практика явно обнаруживает неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и таким образом выигрывает на изыскание совершенно новых методов. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике».

Одно из первых самостоятельных проявлений тематики экстремальных задач оказалось геометрическим и восходит к 1611 г., когда Иоганн Кеплер впервые описал способ, которым можно обложить сферу двенадцатью шарами того же радиуса, чтобы все эти шары касались центральной сферы. Спустя 83 г. между Исааком Ньютоном и Дэвидом Грегори возник спор о том, сколько равновеликих шаров можно разместить таким образом вокруг центральной сферы того же радиуса; при этом первый из них утверждал, что 12, а второй — что можно и 13. Разрешение их спора затянулось без малого на 200 лет, а упрощение доказательства правоты первого спорщика продолжается и поныне.

В процессе изучения корпускулярной модели строения вещества М. В. Ломоносовым были даны оценки коэффициентов сжатия вещества, исходя из сравнения плотностей заполнения пространства единичными шарами при различных способах заполнения ими пространства.

Примерно тогда же случился успешный опыт математического подхода к разгадке шифров, предпринятый по просьбе русского правительства Гольдбахом (за что тот даже удостоился лестной аттестации канцлера Бестужева: «Всему, что в цифрах написано, искусством господина Гольдбаха ключ имеется»). Многие задачи нынешней теории кодирования могут быть сформулированы как экстремальные геометрические задачи для пространства Хемминга. Так, например, максимальная мощность равновесного кода веса k с кодовым расстоянием a равна максимальному числу векторов нормы k в пространстве Хемминга, среди которых разность любой пары по норме не меньше, чем a, что, очевидно, есть аналог контактного числа.

Тем самым уже в период зарождения тематики экстремальных геометрических задач начал определяться круг ее возможных использований.

Расширение областей применения теоретических комбинаторных результатов приводит к зарождению важного проблемного направления — комбинаторного моделирования. При этом выбор наиболее подходящей комбинаторной трактовки прикладных задач определяется конечными целями их решения. Широкая степень абстракции каждой комбинаторной модели позволяет с их помощью исследовать некоторый определенный круг процессов или явлений из различных областей знаний. Следовательно, объединение таких моделей в комплексы, чей состав будет определяться путем нахождения правил соответствия между ними, которые, в свою очередь, будут зависеть от задач, решаемых с помощью таких комплексов моделей, существенным образом расширит области их применения. Это приводит к образованию еще одного проблемного направления — изучению соответствий между различными моделями. Основная цель, которая преследуется этим проблемным направлением: создание унифицированных комплексов комбинаторных моделей, пригодных для адекватного описания не только специализированных задач практики, но и для описания процессов и явлений, принадлежащих некоторому кругу предметных областей знаний.

Комбинаторика может служить практикой и теорией. В период становления она была практикой для теории вероятностей, подтверждая и подсказывая ее методы и законы; теорией выступала, решая задачи. Эта замечательная двойственность проявляется и в экстремальных задачах, которые являются не только рабочим инструментом решения чисто практических вопросов, но сами же характеризуют эффективность этого разрешения, являясь тем самым удобным мерилом основного критерия истинности — практики.

Авторская концепция этой книги, в сущности, сводится к мысли, высказанной Дж. Сильвестром: «Число, место и комбинация — три взаимно скрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи». Стало быть, она состоит в том, что в комбинаторике понятие соответствия является столь же основополагающим, как величина в алгебре, число в теории чисел, фигуры в геометрии; стало быть, в конечном итоге, наряду с алгеброй, теорией чисел и геометрией комбинаторика займет одно из «атомических» мест в структурном единстве математики.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\prod$ — знак произведения
$\sum$ — знак суммы
$\varnothing$ — пустое множество
$\cap$ — пересечение
$\cup$ — объединение
$\setminus$ — разность
o — симметрическая разность
$\in$ — принадлежность
$\subseteq$ — включение подмножеств и вложимость разбиений
$\subset$ — строгое включение подмножеств и вложимость разбиений
$|A|$ — мощность множества A
$\overline{Y}$ — дополнение множества Y
$X \cdot Y$ — произведение множеств X и Y
$X^{(n)}$ — n-я декартова степень множества X
$T(X)$ — множество всех упорядоченных разбиений множества X
$T^k(X)$ — множество всех упорядоченных разбиений с k блоками
$B(X)$ — беллиан множества X
$B^k(X)$ — множество всех разбиений с k блоками
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел
$[A]$ — первичная спецификация мультимножества A
$[[A]]$ — вторичная спецификация мультимножества A
$S(A)$ — основание мультимножества A
$k_A(a)$ — кратность элемента a в мультимножестве A
$C(A) = C^{|A|}(A)$ — оператор целостности мультимножества A
$[r] = \{1, 2, \ldots, r\}$
$[x, y] = \{z : x \leqslant z \leqslant y\}$ — интервал бинарного отношения $(\leqslant)$
$x \mid y$ — x делит y нацело
$(n_1, \ldots, n_r) \vdash n$ — разбиение числа n
P — множество всех разбиений всех натуральных чисел
$P(n)$ — множество всех разбиений числа n
P_r — множество всех разбиений ранга r
$P_r(n)$ — множество всех разбиений ранга r числа n
2^x или $\mathcal{P}(X)$ — булеан множества X
$C^k(X) = \{S \subseteq X \; |S| = k\}$

S_n — n-элементное множество или множество всех перестановок n-элементного множества
$G(S_n)$ или $G^2(S_n)$ — граф на множестве вершин S_n
G_n^2 — граф на некотором множестве из n вершин
$\overline{G} = C^2(S)\backslash G$ — граф, дополнительный к графу G
$G(S) = G(S_n) \cap C^2(S)$ — порожденный подграф
K_n — полный граф на n вершинах
$K_{p,q}$ — полный двудольный граф
Z_n — звезда
F_k — k-вершинный граф с $[k/2]$ независимыми ребрами (паросочетание)
F'_k — паросочетание с «вилкой»
$\chi(G)$ — хроматическое число графа G
$\chi'(G)$ — внешнее хроматическое число графа G
$t(G)$ — наибольшее число независимых ребер в графе G
$\Delta(G)$ — наибольшая степень в графе G
C_k — простой цикл на k вершинах
P_k — простой путь на k вершинах
$d_G(a) = |\{e \in G : a \in e\}|$ — степень вершины a в графе G
$v(S, q, G) = |\{e \in G : |S \cap e| = q\}|$ — валентность
$G^l(S)$ — l-граф на множестве вершин S
$\sigma(n, k)$ — число Стирлинга второго рода
$B(n)$ — число Белла
$T(n, k, l)$ — число Турана
$R(r, s)$ — число Рамсея
$W(n)$ — число ван дер Вардена
$n! = n(n-1)\dots 1$ — факториал, $0! = 1$
$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент
$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ — полиномиальный коэффициент
$[x]$ — целая часть числа x, $]x[= -[-x]$
$\{x\}$ — дробная доля (часть) числа x
$\chi\{\dots\}$ — индикаторная функция
$\mathbb{R}^d$ — d-мерное евклидово пространство
H — гильбертово пространство
$\|x\|$ — норма вектора x
(x, y) — скалярное произведение
$\sigma_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ — система из n векторов
$(\sigma) = \sum_{x \in \sigma} x$
$\|\sigma\| = \|(\sigma)\| = \|\sum_{x \in \sigma} x\|$
$k(X)$ — контактное число пространства X
$N(A)$ — матричная норма матрицы A
$\|A\|_2$ — спектральная норма матрицы A
$r(A)$ — числовой радиус матрицы A
$r_c(A)$ — обобщенная матричная норма матрицы A
$\operatorname{tr} A$ — след матрицы A
I — единичная матрица

Посвящается нашим матерям

ГЛАВА 1
НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КОМБИНАТОРИКИ

Данная глава представляет определения необходимых для изложения материалов книги комбинаторных понятий; их более углубленное изучение можно продолжить по специализированным руководствам [15, 53, 55–57, 60–63, 94, 100, 101].

1.1. Множества и операции со множествами

1.1.1. Понятие множества и мультимножества. *Множество — это целое, состоящее из различных частей.* Ясно, что такое словесное описание трудно посчитать четким определением. Дело в том, что множество, являясь понятием категориальным, не поддается четкому определению; его отсутствие восполняют различного рода описания. Цель таких описаний — отразить важнейшие (атрибутные) свойства множества, а именно: различимость всех частей множества, неупорядоченность частей множества и целостность множества.

Различают два типа частей множества — элементы и подмножества. Элемент понимают как неделимую и непустую часть множества, все иные его части считают подмножествами. Каждый элемент множества можно рассматривать как его одноэлементное подмножество. Особо выделяют часть, которую называют пустым множеством (т. е. не содержащим ни одного элемента) и обозначают $\varnothing$. Считается, что каждое множество обладает такой частью.

Отказ от различимости элементов множества приводит к понятию мультимножества, т. е. совокупности элементов, среди которых могут быть и одинаковые (неразличимые). Всякое мультимножество можно представить его основанием, т. е. множеством всех его различных элементов, и кратностями — числом повторений каждого элемента основания этого мультимножества.

Одна и та же горсть мелочи может быть и множеством, и мультимножеством: если в ней есть монеты одинакового достоинства, то для тратящего между ними нет разницы, т. е. для него это мультимножество, в то время как нумизмату интересны и даты выпуска монет, и если они на монетах одинакового достоинства различны, то для него эта горсть монет — множество.

1.1.2. Обозначения. Если a является *элементом* множества A, то говорят, что a принадлежит множеству A, и записывают $a \in A$; в противном случае пишут $a \notin A$. В случае, когда B является подмножеством A, пишут $B \subseteq A$. Включение множеств $\subseteq$ обладает свойством рефлексивности ($A \subseteq A$) и транзитивности (если $B \subseteq A$ и $A \subseteq C$, то $B \subseteq C$). Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$. Подмножество B называется *собственным подмножеством* A, если $B \subseteq A$ и $B \neq A$. Этому соответствует запись $B \subset A$.

Простейшей численной характеристикой множества как целого является указание количества его элементов, т. е. *мощность множества*. Множество A является *конечным*, если его мощность есть целое неотрицательное число, которое обозначается $|A|$. Если число элементов множества не ограничено, то такое множество называется *бесконечным*. Пусть $|A| = n$ и $|B| = m$; тогда если $B \subseteq A$, то $m \leqslant n$, причем если $B \subset A$, то $m < n$.

Задавать множество можно списком его элементов $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, причем порядок a_i-х несуществен. Однако столь явный способ задания множества либо не всегда осуществим, либо неудобен. Так, множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ не допускает явного задания списком, поскольку $\mathbb{N}$ бесконечно. В таких случаях множество задается описанием свойств, однозначно определяющих принадлежность элементов данному множеству. Этому способу задания множества A соответствует запись $A = \{a : a \text{ обладает свойством } R\}$, которая означает, что множество A состоит из всех тех и только тех a, которые обладают свойством $R(a) = R$. Например, если свойство $R(a)$ состоит в том, что a — простое число, то A — множество всех простых чисел (т. е. непредставимых суммой одинаковых слагаемых, отличных от самого числа и единицы). Возможно также рекурсивное задание множества, при котором каждый последующий элемент описывается через предыдущие. Так, заданию множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ может соответствовать запись:

$$\mathbb{N} = \{i : \text{ если целое } i \in \mathbb{N}, \text{ то } i + 1 \in \mathbb{N}, i \geqslant 1 \in \mathbb{N}\}.$$

Способы задания мультимножества аналогичны заданию множества. Например, мультимножество $A = \{a, a, b, b, b, c\}$ имеет основание $\{a, b, c\}$ и кратности $k(a) = 2$, $k(b) = 3$, $k(c) = 1$. Кратности элементов основания мультимножества иногда записываются в виде показателей, тогда заданию мультимножества A соответствует запись $A = \{a^2, b^3, c^1\}$. Список кратностей мультимножества $A = \{a^v, b^w, \dots\}$ называется его *первичной спецификацией* и обозначается $[A] = [v, w, \dots]$. Согласно этому определению первичная спецификация тоже может быть мультимножеством, состоящим из натуральных чисел. *Вторичной спецификацией* мультимножества $A = \{a^v, b^w, \dots\}$ называется первичная спецификация его первичной спецификации, т. е. $[[A]] = [[v, w, \dots]]$. Отсюда следует, что если A — множество, состоящее из m элементов, то $[A] = [1^m]$, $[[A]] = [[1^m]] = \{m\}$.

В заключение важно заметить, что любое задание множества должно быть корректным. Несоблюдение последнего может привести к трудностям типа парадокса Б. Рассела. Этот парадокс обычно иллюстрируется на примере парикмахера, определившего множество людей, которых он бреет, как совокупность всех жителей своего городка, не бреющихся самостоятельно. При таком задании множества остается неясным — принадлежит ли сам парикмахер этому множеству или нет? Следовательно, любой способ задания множества должен обеспечивать его целостность, будь то задание его элементами, подмножествами, с помощью операций и т. п.

1.1.3. Операции со множествами. *Пересечение множеств* X и Y есть множество $X \cap Y$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и X и Y, т. е. $X \cap Y = \{x\colon x \in X \text{ и } x \in Y\}$. Например, для $X = \{1,2,3\}$ и $Y = \{2,3,4\}$ получим $X \cap Y = \{2,3\}$, а для $A = \{1,2\}$ и $B = \{3,4\}$ получим $A \cap B = \varnothing$ — такие множества A и B называются *непересекающимися*. Ясно, что $X \cap \varnothing = \varnothing$. Пересечение двух и более множеств *коммутативно*: $X \cap Y = Y \cap X$, и *ассоциативно*:

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z.$$

Объединение множеств X и Y есть множество $X \cup Y$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат X либо Y, т. е. $X \cup Y = \{x\colon x \in X \text{ или } x \in Y\}$. Например, если $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,3,4\}$, то $X \cup Y = \{1,2,3,4\}$; ясно, что $X \cup \varnothing = X$. Объединение двух или более множеств коммутативно: $X \cup Y = Y \cup X$, и ассоциативно:

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z.$$

Дистрибутивность — это важное свойство, которым обладают операции объединения и пересечения:

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z), \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

Разность множеств X и Y есть множество $X \backslash Y$, состоящее из всех тех элементов X, которые не принадлежат Y, т. е. $X \backslash Y = \{x : x \in X \text{ и } x \notin Y\}$. Например, если $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,3,4\}$, то $X \backslash Y = \{1\}$; ясно, что $X \backslash \varnothing = X$ и $\varnothing \backslash X = \varnothing$. Из определения разности следует, что $(X \backslash Y) \cup (X \cap Y) = X$.

Симметрическая разность множеств X и Y есть множество $X \circ Y$, состоящее из всех тех элементов X, которые не принадлежат Y, и всех тех элементов Y, которые не принадлежат X, т. е. $X \circ Y = \{x : x \in X \text{ и } x \notin Y \text{ или } x \in Y \text{ и } x \notin X\}$. Например, если $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,3,4\}$, то $X \circ Y = \{1,4\}$; ясно, что $\varnothing \circ X = X \circ \varnothing = X$. Из определения симметрической разности следует: $X \circ Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$.

Дополнение множества Y относительно множества X определяется только тогда, когда $Y \subseteq X$, и в этом случае это есть множество $\overline{Y} = X \backslash Y$. Например, для $Y = \{2,3\}$, $X = \{1,2,3\}$ дополнением Y относительно X является множество

$$\overline{Y} = X \backslash Y = \{1\}.$$

Законы де Моргана: если X и Y — подмножества некоторого множества Z, то $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Покрытие множества X образуют множества $X_1, X_2, \ldots$, если $X \subseteq \cup_i X_i$; множества X_i в этом случае называют блоками покрытия. Например, покрытием множества натуральных чисел является $\{1,2,\ldots\} \subset \cup_{i \geqslant 1}\{0, i, i+1\}$.

Разбиение множества X есть представление его непересекающимися множествами: $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots$, где $X_i \cap X_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Например,

$\{1, 2, \ldots\} = \cup_{i=1}^{\infty}\{i\}$. Множества X_i называются *блоками* или *частями разбиения*. Если число блоков разбиения конечно, то это число называется *рангом разбиения*. Изображать разбиения принято списком его блоков, ибо по определению список представляет его однозначно, и поэтому такой список также называется разбиением. Например, для множества $X = \{a, b, c\}$ запись (a, bc) обозначает разбиение множества X на две части, a и bc, отделяемые друг от друга запятой.

Спецификацией или *типом разбиения* $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$ называется список мощностей его блоков $[|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_r|]$. Так, разбиение (a, bc) имеет тип $[1, 2]$. *Подразбиением* (или *расщеплением*) некоторого разбиения называется разбиение, полученное разбиением блоков исходного разбиения. Так, разбиение (a, b, c) есть расщепление разбиения (a, bc). Иными словами, путем объединения блоков из расщепления всегда можно «склеить» исходное разбиение. Наконец, различают разбиения *упорядоченные* и *неупорядоченные* — в зависимости от того, учитывается или не учитывается очередность их блоков, причем все возможные спецификации, отличные от обычного (неупорядоченного) разбиения, оговариваются особо.

Правило суммы следует из определения разбиения множества: для каждого разбиения конечного множества $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$, где $X_i \cap X_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, справедливо равенство

$$|X| = |X_1| + \ldots\ldots |X_r|.$$

Обобщенное правило суммы выполняется для покрытия конечного множества $X \subseteq X_1 \cup \cdots \cup X_r$ и имеет вид

$$|X| \leqslant |X_1| + \cdots + |X_r|.$$

Произведением множеств $X_1, \ldots, X_r$ называется множество $\prod_{i=1}^{r} X_i = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_r$, состоящее из всех упорядоченных списков $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, где $x_i \in X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Такое произведение множеств называется *прямым* или *декартовым*. Пусть $X = \{1, 2\}$ и $Y = \{2, 3\}$, тогда $X \cdot Y = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$. Следовательно, каждый элемент прямого произведения $(x_1, \ldots, x_r) \in \prod_{i=1}^{r} X_i$ можно рассматривать как r-мерный вектор, где $x_i \in X_i$ является i-й координатой этого вектора $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Принято считать, что $X \cdot \varnothing = \varnothing$. Декартово произведение $X \cdots X$ с n сомножителями называется n-й *декартовой степенью множества* X и обозначается $X^{(n)}$. Так, если $X = \{1, 2\}$, то $X^{(3)} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$.

Правило произведения (выполняет важную роль для перечисленных комбинаторных задач): для любых конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ справедливо равенство

$$|X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n|.$$

Булеан есть множество всех подмножеств множества X, включая пустое множество $\varnothing$ и само множество X. Таким образом, элементами булеана как множества являются подмножества множества X. Например, булеан множества $X = \{1, 2, 3\}$ состоит из множеств $\{\varnothing\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. Обозначается булеан 2^X или $\mathcal{P}(X)$; обозначение 2^X используется в связи с тем, что если X конечно, то мощность его $|2^X| = 2^{|X|}$. В булеане естественно выделяются подмножества, состоящие из подмножеств множества X, имеющих одинаковую мощность: $C^k(X) = \{S \subseteq X : |S| = k\}$. В этих обозначениях, очевидно, $\mathcal{P}(X) = \bigcup_{k=0}^{|X|} C^k(X)$. Множества $C^k(X)$ имеют мощность, равную значению биномиального коэффициента: если $|X| = n$, то

$$|C^k(X)| = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Графом на множестве вершин $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ называется любое подмножество G множества $C^2(S_n)$, так что элементами графа $G \subseteq C^2(S_n)$ являются двухэлементные подмножества вершин S_n, именуемые *ребрами графа* G. Таким образом, каждый граф на множестве вершин $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ можно представить списком его ребер $G = \{(a_i, a_j), (a_k, a_l), \ldots\}$, где $(a_i, a_j) \in G$ тогда и только тогда, когда вершины a_i и a_j соединены ребром в графе G. Значит, каждую пару (a_i, a_j) из такого списка можно интерпретировать как ребро.

Полный граф — это граф $K_n = C^2(S_n)$, так что $|K_n| = C_n^2$.

Цикл — это граф вида $G = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{k-1}, a_k), (a_k, a_1)\}$; обычно цикл обозначают через C_k; ясно, что $|C_k| = k$.

Путь — это граф вида $G = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{k-1}, a_k)\}$; обычно путь обозначают P_k; ясно, что $|P_k| = k - 1$.

Графы изображают обычно графически: вершины S_n — точками, а ребра — линиями, соединяющими те пары вершин, которые образуют ребро графа, например, на рис. 1.1 для $n = 5$ представлен граф $G = \{(a_1, a_2), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_5)\}$. В этом графе имеются полный подграф K_3 (он же цикл C_3) на трех вершинах a_1, a_2, a_4 и пути P_5, например, путь, последовательно проходящий через вершины a_5, a_3, a_2, a_1 и a_4.

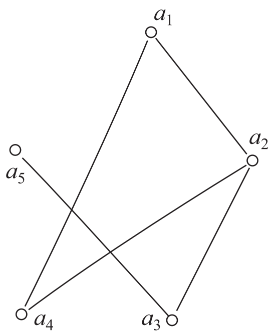

Рис. 1.1

Существует много различных модификаций графов.

Ориентированный граф: ребра G суть упорядоченные пары вершин.

Мультиграф: ребра G могут повторяться.

Гиперграф: гиперграфом на множестве вершин $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ называется любое подмножество G множества $\mathcal{P}(S_n)$, так что элементами гиперграфа $G \subseteq \mathcal{P}(S_n)$ являются подмножества вершин S_n, именуемые *гиперребрами* графа G, значит, гиперребра G могут иметь мощность, большую двух.

k-однородный гиперграф или *k-граф*: все ребра G имеют мощность, равную k.

Важными численными характеристиками графа являются:

степень вершины: если $a \in S_n$, то $d_G(a) = |\{e \in G : a \in e\}|$, т. е. степень вершины — это число ребер графа, содержащих в себе эту вершину, иначе — инцидентных этой вершине;

валентность: для множества вершин S и целого неотрицательного q валентность $v(S, q, G) = |\{e \in G : |S \cap e| = q\}|$ есть число ребер графа, пересекающихся с этим множеством вершин S по фиксированному числу вершин q; ясно, что $v(a, 1, G) = d_G(a)$. Эйлер установил, что во всяком графе степени удовлетворяют тождеству $\sum_{i=1}^{n} d_G(a_i) = 2|G|$.

Упорядоченные разбиения — это разбиения, в которых порядок блоков существенен, например, если $X = \{a, b, c\}$, то все упорядоченные разбиения множества X составляют разбиения:

- с одним блоком: (abc);
- с двумя блоками: (a, bc), (b, ac), $(c, ab$, (bc, a), (ac, b), (ab, c);
- с тремя блоками: (a, b, c), (a, c, b), (c, a, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, b, a).

Множество всех упорядоченных разбиений множества X будем обозначать через $T(X)$, а его мощность — через $T(|X|)$. Через $T^k(X)$ обозначим множество всех упорядоченных разбиений, состоящих из k блоков, а через $T^k(|X|)$ — мощность этого множества. Тогда если $|X| = n$, то

$$T(X) = \bigcup_{k=1}^{n} T^k(X), \quad T(n) = \sum_{k=1}^{n} T^k(n).$$

Для упорядоченных разбиений по-прежнему корректно понятие типа как последовательности, состоящей из объемов блоков, поэтому через $T[n_1, \ldots, n_r]$ будем обозначать множество всех упорядоченных разбиений типа $[n_1, \ldots, n_r]$, т. е. с объемами блоков $n_1, \ldots, n_r$ соответственно. Так, приведенное выше множество упорядоченных разбиений множества $X = \{a, b, c\}$ с двумя блоками состоит из множеств $T[1, 2]$ и $T[2, 1]$, имеющих по 3 $(= T(1, 2) = T(2, 1))$ разбиения в каждом из этих множеств. Мощность множества $T[n_1, \ldots, n_r]$ будем обозначать через $T(n_1, \ldots, n_r)$. Тогда, если $|X| = n = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i$, то

$$T^r(X) = \bigcup_{(n_1, \ldots, n_r)} T[n_1, \ldots, n_r],$$

$$T^r(n) = \sum_{(n_1, \ldots, n_r)} T(n_1, \ldots, n_r).$$

Здесь суммирование и объединение производятся по всем типам разбиений ранга r.

Эти численные характеристики упорядоченных разбиений могут вычисляться при помощи следующих формул:

$$T(n_1, \ldots, n_r) = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!},$$