П.С. ГЕВОРКЯН

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЫ, РЯДЫ, ТФКП, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области экономики и управления, техники и технологии

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 517.52+53+37+91
ББК 22.16
Г 27

Геворкян П. С. **Высшая математика. Интегралы, ряды, ТФКП, дифференциальные уравнения.** Ч. 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 272 с. — ISBN 978-5-9221-0710-5.

Настоящая книга вместе с другой книгой автора, «Высшая математика. Основы математического анализа», охватывает весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» в высших учебных заведениях, за исключением вопросов линейной алгебры и аналитической геометрии. Она содержит следующие разделы высшей математики: «Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля», «Ряды», «Дифференциальные уравнения» и «Теория функции коплексного переменного».

Для студентов инженерно-технических и экономических специальностей вузов, а также для изучающих в том или ином объеме высшую математику.

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области экономики и управления, техники и технологии.

Рецензенты:
д.ф.-м.н., проф. Петрушко И. М.,
д.ф.-м.н., проф. Смирнов Ю. М.

ISBN 978-5-9221-0710-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Светлой памяти своего отца
школьного учителя математики
Самвела Павловича Геворкяна
посвящает автор эту книгу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга вместе с нашей другой книгой, изданной под названием «Высшая математика. Основы математического анализа», охватывают весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений, за исключением раздела «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», который готовится к печати в виде отдельной книги.

В предлагаемой книге нашли отражение следующие разделы высшей математики: «Кратные интегралы» (гл. 1), «Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля» (гл. 2), «Ряды» (главы 3–6), «Дифференциальные уравнения» (главы 7 и 8) и «Теория функции комплексного переменного» (гл. 9).

В книге даются ссылки на предыдущую книгу: *Геворкян П. С.* Высшая математика. Основы математического анализа. — М.: Физматлит, 2004.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. М. Петрушкó за ценные замечания при написании глав 3–6.

Москва, март, 2006 г. *П.С. Геворкян*

Глава 1

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1.1. Задача об объеме цилиндрического бруса. Определение двойного интеграла

Подобно тому, как задача о площади криволинейной трапеции привела к понятию определенного интеграла, задача об объеме цилиндрического бруса приводит к понятию *двойного* (*определенного*) *интеграла*.

Пусть

$$z = f(x, y) \tag{1.1}$$

— непрерывно-дифференцируемая и положительная функция двух переменных, определенная на ограниченном подмножестве (S) плоскости $\mathbf{R}^2$.

Рассмотрим тело (V), которое сверху ограничено поверхностью (1.1), снизу плоскостью $z = 0$, а с боков — цилиндрической поверхностью, проходящей через границу γ плоского множества (S), с образующей, параллельной оси Oz (рис. 1.1). Требуется найти объем V тела (V), который представляет собой цилиндрический брус.

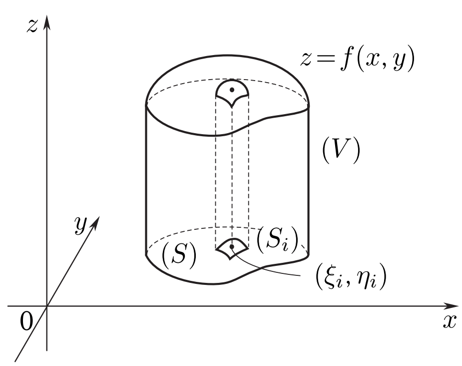

Рис. 1.1

Для решения этой задачи прибегнем к обычному в интегральном исчислении приему: разобьем множество (S) с помощью сети кривых на элементарные части (S_1), (S_2), ..., (S_n). Возникают цилиндрические столбики (V_1), (V_2), ..., (V_n) с основаниями (S_1), (S_2), ..., (S_n). Объединение этих цилиндрических столбиков совпадает с телом (V). Мы предполагаем, что все плоские фигуры (S_1), (S_2), ..., (S_n) квадрируемы, т. е. имеют площади, которые соответственно обозначим через S_1, S_2, ..., S_n.

Теперь в каждой фигуре (S_i) возьмем произвольную точку (ξ_i, η_i) и заметим, что

$$f(\xi_i, \eta_i)S_i$$

есть приближенное значение объема столбика (V_i). Следовательно, приближенное значение объема всего тела (V) будет

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)S_i.$$

Диаметр множества (S_i) обозначим через d_i:

$$d_i = \sup_{P, P' \in (S_i)} \rho(P, P'),$$

где $\rho(P, P')$ — расстояние между точками $P, P' \in (S_i)$. Положим

$$d = \max\{d_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Теперь объем тела (V) естественно определить как предел

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)S_i. \tag{1.2}$$

Если отвлечься от задачи об объеме цилиндрического бруса, то вышеизложенным способом приходим к понятию двойного интеграла от функции $z = f(x, y)$ по области (S).

Определение 1.1.1. Если существует предел

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)S_i$$

независимо от выбора точек $(\xi_i, \eta_i) \in (S_i)$ и независимо от разбиения множества (S) на элементарные части, то он называется *двойным интегралом* функции $z = f(x,y)$ по области (S) и обозначается

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS,$$

или

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

В этом случае говорят также, что функция $z = f(x,y)$ *интегрируема* на множестве $(S) \subset \mathbf{R}^2$, которое называется *областью интегрирования*. Величина dS (или $dx\,dy$) называется *элементом площади*, а x и y называются *переменными интегрирования*.

Понятие двойного интеграла позволяет полученную выше формулу (1.2) переписать в виде

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS. \tag{1.3}$$

§ 1.2. Задача о вычислении массы тела. Определение тройного интеграла

Пусть дано некоторое тело (V) в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$. Предположим, что известна плотность $\rho(x,y,z)$ распределения массы в каждой точке $M(x,y,z)$ тела (V). Требуется *определить всю массу* m *тела* (V).

Для решения этой задачи разобьем тело (V) на n частей (V_1), (V_2), ..., (V_n) и выберем в каждой из этих частей по точке $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. Теперь предположим, что плотность во всех точках части (V_i) приближенно равна плотности $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. Тогда масса m_i части (V_i) приближенно равна

$$\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i,$$

где V_i — объем части (V_i). Следовательно, масса m всего тела (V) приближенно будет

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i.$$

Максимальный из всех диаметров частей (V_1), (V_2), ..., (V_n) обозначим через d. Тогда точное значение массы m тела (V) вычислится следующим образом:

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i. \tag{1.4}$$

Итак, поставленная задача о вычислении массы тела полностью решена. Если отвлечься от этой задачи и рассматривать произвольную функцию $f(x, y, z)$ вместо функции плотности $\rho(x, y, z)$, то вышеизложенным способом мы придем к понятию тройного интеграла функции $f(x, y, z)$ по телу (V).

Определение 1.2.1. Если существует предел

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

независимо от выбора точек (ξ_i, η_i, ζ_i) и независимо от разбиения множества (V) на элементарные части, то он называется *тройным интегралом* функции $u = f(x, y, z)$ по множеству (V) и обозначается

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV,$$

или

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

В этом случае говорят также, что функция $u = f(x, y, z)$ *интегрируема* на множестве (V).

Теперь полученную выше формулу (1.4) для вычисления массы тела можем представить в виде

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x, y, z)\, dV.$$

Замечание 1.2.1. Во всех рассуждениях, сделанных выше, мы предположили, что все множества V, V_1, V_2, ..., V_n кубируемы, т. е. имеют объемы. Для этого достаточно было потребовать, чтобы границы всех этих элементарных частей представляли собой гладкие или кусочно-гладкие поверхности.

§ 1.3. Свойства двойных интегралов. Теоремы существования

Теорема 1.3.1. *Справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} dS = S, \tag{1.5}$$

где S площадь фигуры (S).

Доказательство непосредственно следует из определения двойного интеграла. □

Теорема 1.3.2. *Пусть функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены на одном и том же множестве (S) плоскости $\mathbf{R}^2$ и на этом множестве имеют двойные интегралы. Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{(S)} [Af(x,y) \pm B\varphi(x,y)]\, dS = A \iint\limits_{(S)} f(x,y)\, dS \pm B \iint\limits_{(S)} \varphi(x,y)\, dS, \tag{1.6}$$

где A и B — постоянные числа.

Доказательство. Согласно определению двойного интеграла имеем

$$\iint\limits_{(S)} [Af(x,y) \pm B\varphi(x,y)]\, dS = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} [Af(\xi_i,\eta_i) \pm B\varphi(\xi_i,\eta_i)]\, S_i =$$

$$= A \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i) S_i \pm B \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i,\eta_i) S_i =$$

$$= A \iint\limits_{(S)} f(x,y)\, dS \pm B \iint\limits_{(S)} \varphi(x,y)\, dS.$$

□

Следующие две теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам для функции одной переменной.

Теорема 1.3.3. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на квадрируемом подмножестве (S) плоскости $\mathbf{R}^2$. Предположим, что* *множество* (S) *некоторой кусочно-гладкой кривой разложено на два квадрируемые подмножества* (S') *и* (S''). *Тогда из существования двойного интеграла функции* $f(x,y)$ *по области* (S) *следует существование двойных интегралов этой функции в обоих областях* (S') *и* (S''), *и обратно. При этом имеет место разложение*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{(S')} f(x,y)\,dS' + \iint\limits_{(S'')} f(x,y)\,dS''. \tag{1.7}$$

Теорема 1.3.4. *Пусть* $f(x,y) \leqslant \varphi(x,y)$ *для всех* $(x,y) \in (S)$ *и существуют двойные интегралы функций* $f(x,y)$ *и* $\varphi(x,y)$ *по* (S). *Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS \leqslant \iint\limits_{(S)} \varphi(x,y)\,dS. \tag{1.8}$$

Теорема 1.3.5. *Справедлива формула*

$$\left|\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS\right| \leqslant \iint\limits_{(S)} |f(x,y)|\,dS. \tag{1.9}$$

Доказательство. Рассмотрим очевидное двойное неравенство

$$-|f(x,y)| \leqslant f(x,y) \leqslant |f(x,y)|.$$

Применяя формулу (1.8) к этим неравенствам, получим

$$-\iint\limits_{(S)} |f(x,y)|\,dS \leqslant \iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS \leqslant \iint\limits_{(S)} |f(x,y)|\,dS,$$

что равносильно неравенству (1.9). □

Теорема 1.3.6 (о среднем). *Пусть функция двух переменных* $z = f(x,y)$ *определена и интегрируема на замкнутом множестве* $(S) \subset \mathbf{R}^2$. *Тогда существует такая точка* $(\xi,\eta) \in (S)$, *что*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS = f(\xi,\eta)\,S. \tag{1.10}$$

где S *— площадь фигуры* (S).

Доказательство. Наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ на замкнутом множестве $(S) \subset \mathbf{R}^2$, которые существуют согласно известной теореме Вейерштрасса, обозначим через m и M соответственно. Тогда

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M \tag{1.11}$$

для всех точек $(x, y) \in (S)$.

Из неравенства (1.11), учитывая теорему 1.3.4, получим

$$\iint\limits_{(S)} m\, dS \leqslant \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS \leqslant \iint\limits_{(S)} M\, dS,$$

откуда в силу теоремы 1.3.1 имеем

$$mS \leqslant \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS \leqslant MS,$$

или

$$m \leqslant \frac{1}{S} \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS \leqslant M.$$

Учитывая последнее двойное неравенство, согласно известной теореме Больцано–Коши можем найти такую точку $(\xi, \eta) \in (S)$, что

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS\,,$$

откуда и получаем формулу (1.10).

Теорема доказана. □

Теперь сформулируем две *теоремы существования двойного интеграла*.

Теорема 1.3.7. *Всякая непрерывная в области (S) функция $z = f(x, y)$ интегрируема.*

Теорема 1.3.8. *Если функция $z = f(x, y)$ ограничена и имеет разрывы только лишь на конечном числе гладких кривых области (S), то она интегрируема.*

Напомним, что *областью* называется открытое и связное подмножество плоскости.

Замечание 1.3.1. Все теоремы этого параграфа, с соответствующими поправками, справедливы и для тройных интегралов.

§ 1.4. Приведение двойного интеграла к повторному

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена на прямоугольнике
$$\Delta = [a, b] \times [c, d],$$
т. е. на множестве точек $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, которые удовлетворяют условию
$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$
где $a < b$, а $c < d$.

Теорема 1.4.1. *Пусть для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл*
$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy$$
и также при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует обычный интеграл
$$I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,dy.$$
Тогда существует повторный интеграл
$$\int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right\} dx \equiv \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy$$
и выполняется равенство
$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{1.12}$$

Доказательство. Разобьем стороны прямоугольника на части с помощью точек
$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$
и
$$c = y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d.$$

Тогда прямоугольник Δ разобьется на элементарные прямоугольники

$$\Delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

$i = 1, \ldots, n-1$ и $j = 1, \ldots, m-1$.

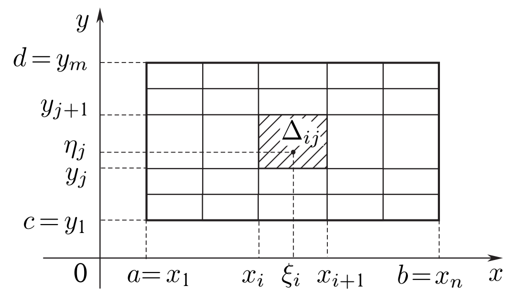

Рис. 1.2

Заметим, что соответствующую разбиению Δ_{ij} интегральную сумму двойного интеграла $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy$ можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, а $(\xi_i, \eta_j) \in \Delta_{ij}$ (рис. 1.2). Следовательно,

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0\\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0\\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0\\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j)\Delta y_j \right\} \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0\\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\,dy \right\} \Delta x_i = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy,$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 1.4.1. Оказывается, для выполнения условия последней теоремы, а, стало быть, и формулы (1.12), достаточно потребовать непрерывность функции $f(x,y)$ на прямоугольнике Δ. В этом случае справедлива также формула

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \tag{1.13}$$

а значит, и равенство

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \tag{1.14}$$

Таким образом вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла.

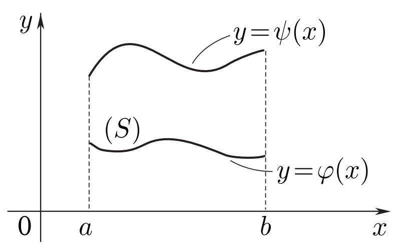

Рис. 1.3

Теперь предположим, что функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на множестве $(S) \subset \subset \mathbf{R}^2$, которое ограничено гладкими кривыми

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$
$$(\varphi(x) \leqslant \psi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b)$$

и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.3.). Тогда, аналогично последней теореме, доказывается формула

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{1.15}$$

Пример 1.4.1. Вычислить площадь S фигуры (S), ограниченной эллипсом (рис. 1.4)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

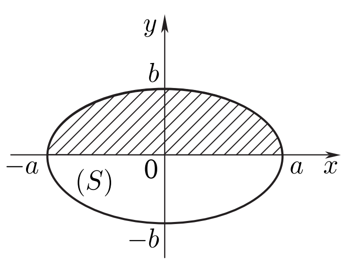

Рис. 1.4

Согласно теореме 1.3.1 имеем

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\,dy.$$

Для вычисления последнего двойного

интеграла применим формулу (1.12):

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\,dy = 2\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{2b}{a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{4b}{a}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\quad a\cos t\,dt =$$

$$= 4ab\int\limits_{0}^{\pi/2} cos^2 t\,dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi/2}(1+cos2t)\,dt = 2ab\Big(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Выше была произведена замена переменной $x = a\sin t$. □

§ 1.5. Вычисление тройного интеграла

Пусть функция $u = f(x,y,z)$ определена и непрерывна на множестве $(V) = [x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\times[z_1,z_2]$, который представляет собой параллелепипед (рис. 1.5). Как и в случае двойного интеграла, можно доказать, что справедлива следующая формула вычисления тройного интеграла функции $u = f(x,y,z)$ по множеству (V):

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz. \tag{1.16}$$

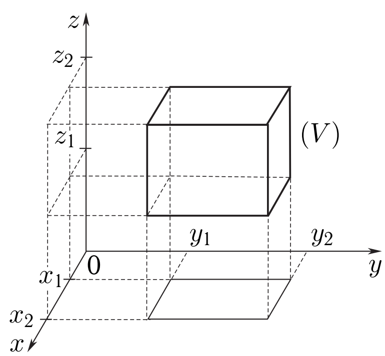

Рис. 1.5

Пусть теперь функция $u = f(x,y,z)$ определена и непрерывна

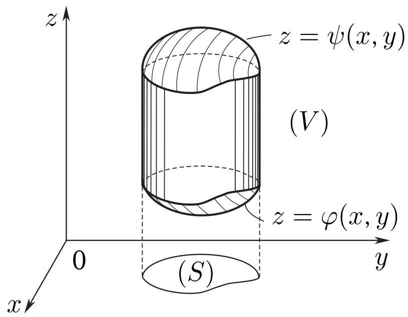

Рис. 1.6

на теле (V), имеющем форму цилиндрического бруса, ограниченного снизу поверхностью $z = \varphi(x,y)$, сверху — поверхностью $z=\psi(x,y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Проекцию тела (V) на координатную плоскость Oxy обозначим через (S) (рис. 1.6). Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{1.17}$$

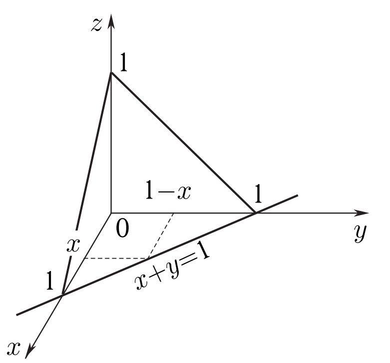

Рис. 1.7

Пример 1.5.1. Вычислить объем V тела (V), ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$ (рис. 1.7).

Искомый объем равняется тройному интегралу

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

который вычислим по формуле (1.17):

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-1)^2\,d(x-1) = \frac{1}{2}\;\frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$\square$

§ 1.6. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на области (D) с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy \tag{1.18}$$

и в нем произведем замену переменных

$$\begin{aligned} x &= a\xi + b\eta, \\ y &= c\xi + d\eta, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где

$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, как видоизменится двойной интеграл (1.18) при замене переменных (1.19).

Предположим, что преобразование, обратное к (1.19), отображает область (D) с кусочно-гладкой границей в область (Δ) также с кусочно-гладкой границей (рис. 1.8).

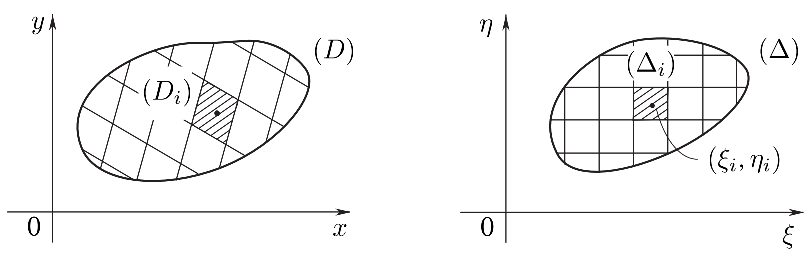

Рис. 1.8

На плоскости $O\xi\eta$ рассмотрим квадратную сетку со стороной длины h. Этой сеткой область (Δ) разобьется на части (Δ_i), $i = 1, \ldots, n$. С помощью преобразования (1.19) получим соответствующее разбиение (D_i), $i = 1, \ldots, n$, области (D), где каждое (D_i) представляет собой некоторый параллелограмм («полный» или «неполный»). Докажем, что

$$D_i = |J|\Delta_i, \tag{1.20}$$

где D_i и Δ_i — площади (D_i) и (Δ_i) соответственно.

Квадрат (Δ_i) определяется двумя векторами $(h, 0)$ и $(0, h)$. Преобразованием (1.19) эти векторы отображаются в векторы (ah, ch) и (bh, dh) соответственно, которые и определяют параллелограмм (D_i). Следовательно, площадь этого параллелограмма вычисляется по формуле

$$D_i = \left| \begin{vmatrix} ah & bh \\ ch & dh \end{vmatrix} \right| = h^2 \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = h^2 |J| = |J| \Delta_i.$$

Теперь вычислим двойной интеграл:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i =$$
$$= \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a\xi_i + b\eta_i, c\xi_i + d\eta_i)|J|\Delta_i =$$
$$= \iint\limits_{(\Delta)} f(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta)|J|\,d\xi\,d\eta.$$

Таким образом мы получили следующую *формулу замены переменных в двойном интеграле* в случае линейного преобразования (1.19):

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta)|J|\,d\xi\,d\eta. \tag{1.21}$$

Теперь в двойном интеграле (1.18) произведем произвольную замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi,\eta), \\ y &= \psi(\xi,\eta). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Предположим, что функции $\varphi(\xi,\eta)$ и $\psi(\xi,\eta)$ задают взаимнооднозначное отображение области (Δ) плоскости $O\xi\eta$ на область (D) плоскости Oxy. Предположим также, что эти функции имеют непрерывные частные производные в области (Δ) (рис. 1.9).

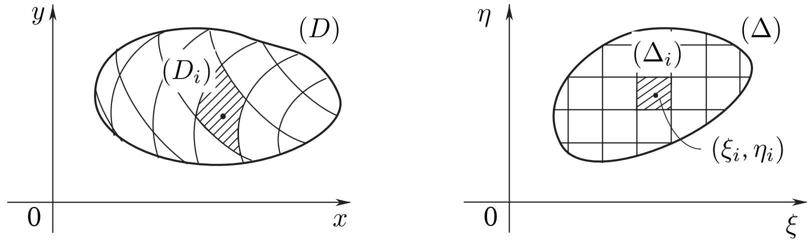

Рис. 1.9

В этом случае очевидно, что квадратному разбиению (Δ_i), $i = 1, \ldots, n$, области (Δ) с помощью преобразования (1.22) будет соответствовать разбиение (D_i), $i = 1, \ldots, n$, области (D), где каждое (D_i) уже представляет собой криволинейный параллелограмм. Площадь D_i криволинейного параллелограмма (D_i) вычисляется по формуле

$$D_i = |J(\xi_i, \eta_i)|\Delta_i, \tag{1.23}$$

где $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta_i$ — некоторая точка, а

$$J(\xi_i, \eta_i) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial\xi_i} & \dfrac{\partial\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial\eta_i} \\ \dfrac{\partial\psi(\xi_i, \eta_i)}{\partial\xi_i} & \dfrac{\partial\psi(\xi_i, \eta_i)}{\partial\eta_i} \end{vmatrix}$$

— определитель Якоби преобразования (1.22) в точке (ξ_i, η_i) (доказательство формулы (1.23) не приводим).

Теперь мы можем вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i =$$
$$= \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i, \eta_i), \psi(\xi_i, \eta_i))|J(\xi_i, \eta_i)|\Delta_i =$$
$$= \iint\limits_{(\Delta)} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))|J(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta.$$

Итак, мы получили *формулу замены переменных в двойном интеграле* в общем случае:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))|J(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta. \tag{1.24}$$

З а м е ч а н и е 1.6.1. Формула (1.21) является частным случаем формулы (1.24), поскольку определитель Якоби преобразования (1.19) есть определитель $J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

§ 1.7. Двойной интеграл в полярных координатах

Рассмотрим частный случай замены переменных, который часто применяется при вычислениях двойных интегралов. Это — замена декартовых координат x и y полярными координатами r и φ.

Как мы знаем (см. «Высшая математика. Основы математического анализа», § 7.3) преобразование полярных координат в прямоугольные декартовы осуществляется формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.25}$$

Вычислим определитель Якоби преобразования (1.25):

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \geqslant 0.$$

Теперь предположим, что функция $z = f(x,y)$ определена и непрерывна в области (D), которая ограничена лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и непрерывной кривой

$$r = r(\varphi),$$

где $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ (рис. 1.10).

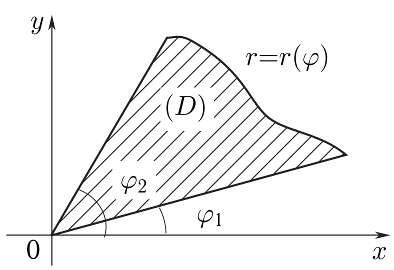

Рис. 1.10

Применяя формулу (1.24) замены переменных в двойном интеграле получим следующую *формулу вычисления двойного интеграла в полярных координатах*:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr. \tag{1.26}$$

Пример 1.7.1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{x^2+y^2} dx\,dy.$$

Произведем замену переменных (1.25), т. е. перейдем к полярным координатам и применим формулу (1.26). Тогда получим

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R e^{r^2} r\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(e^{R^2}-1\right)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,\left(e^{R^2}-1\right)\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi\left(e^{R^2}-1\right).$$

□

§ 1.8. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна в трехмерной области (D) с кусочно-гладкой границей. Произведем произвольную замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= \psi(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= \chi(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{1.27}$$

в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \tag{1.28}$$

где предполагаем, что функции $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ и $\chi(\xi, \eta, \zeta)$ задают взаимно-однозначное отображение некоторой области (Δ) пространства $O\xi\eta\zeta$ на область (D) пространства $Oxyz$. Предположим также, что эти функции имеют непрерывные частные производные в области (Δ).

В сделанных предположениях справедлива следующая *формула замены переменных в тройном интеграле*:

$$\iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{(\Delta)} f\left[\varphi(\xi, \eta, \zeta), \psi(\xi, \eta, \zeta), \chi(\xi, \eta, \zeta)\right] |J(\xi, \eta, \zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{1.29}$$

где

$$J(\xi,\eta,\zeta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} \\ \dfrac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} \\ \dfrac{\partial\chi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\chi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\chi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} \end{vmatrix}$$

является определителем Якоби преобразования (1.27).

Доказательство формулы (1.29) аналогично доказательству соответствующей формулы (1.24) для двойного интеграла.

§ 1.9. Тройной интеграл в сферических координатах

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. *Сферические*, или *полярные*, *координаты* в пространстве связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta, \end{cases} \tag{1.30}$$

где $0 \leqslant r < +\infty,\quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$

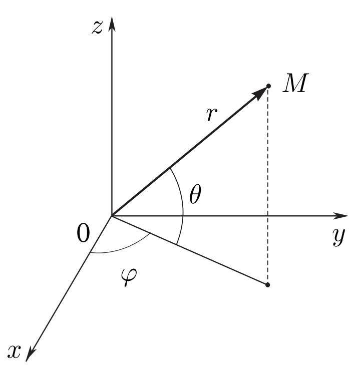

Рис. 1.11

Геометрический смысл сферических координат (r,φ,θ) точки M ясен из рис. 1.11: r есть длина радиус вектора $\overrightarrow{OM}$, θ — угол между этим вектором и его проекцией на плоскость Oxy, а φ — угол между указанной проекцией и положительным направлением оси Ox, отсчитываемый от этой оси против часовой стрелки.

Вычислим определитель Якоби преобразования (1.30):

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = r^2\cos\theta.$$

Следовательно, *при переходе к сферическим* (*полярным*) *координатам подынтегральная функция тройного интеграла умножится на* $r^2\cos\theta$.

П р и м е р 1.9.1. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(D)} xyz\,dx\,dy\,dz,$$

где (D) — область точек с положительными координатами, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и сферой $x^2+y^2+z^2=1$.

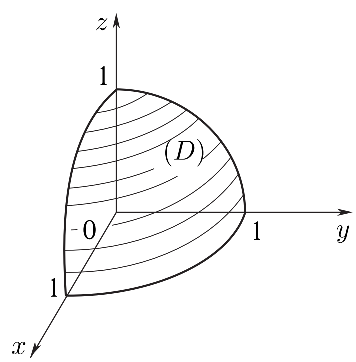

Рис. 1.12

Введем сферические координаты по формулам (1.30). Тогда нетрудно заметить, что область (D) определяется следующими неравенствами (см. рис. 1.12):

$$0 \leqslant r \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Согласно формуле (1.29) имеем

$$\iiint\limits_{(D)} xyz\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^1 r^5\cos^3\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(-\cos^3\theta\right)\,d\cos\theta \int\limits_0^{\pi/2} (-\cos\varphi)\,d\cos\varphi \int\limits_0^1 r^5 dr =$$

$$= \frac{\cos^4\theta}{4}\bigg|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\cos^2\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi/2} \cdot \frac{r^6}{6}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

□