

П.С. ГЕВОРКЯН

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ИНТЕГРАЛЫ, РЯДЫ, ТФКП, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям и специальностям в области экономики
и управления, техники и технологии*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 517.52+53+37+91

ББК 22.16

Г 27

Геворкян П. С. **Высшая математика. Интегралы, ряды, ТФКП, дифференциальные уравнения. Ч. 2.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 272 с. — ISBN 978-5-9221-0710-5.

Настоящая книга вместе с другой книгой автора, «Высшая математика. Основы математического анализа», охватывает весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» в высших учебных заведениях, за исключением вопросов линейной алгебры и аналитической геометрии. Она содержит следующие разделы высшей математики: «Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля», «Ряды», «Дифференциальные уравнения» и «Теория функции комплексного переменного».

Для студентов инженерно-технических и экономических специальностей вузов, а также для изучающих в том или ином объеме высшую математику.

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области экономики и управления, техники и технологии.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. Петрушко И. М.,

д.ф.-м.н., проф. Смирнов Ю. М.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава 1. Кратные интегралы	9
§ 1.1. Задача об объеме цилиндрического бруса. Определение двойного интеграла	9
§ 1.2. Задача о вычислении массы тела. Определение тройного интеграла	11
§ 1.3. Свойства двойных интегралов. Теоремы существования	13
§ 1.4. Приведение двойного интеграла к повторному	16
§ 1.5. Вычисление тройного интеграла	19
§ 1.6. Замена переменных в двойном интеграле	21
§ 1.7. Двойной интеграл в полярных координатах	24
§ 1.8. Замена переменных в тройном интеграле	25
§ 1.9. Тройной интеграл в сферических координатах	26
§ 1.10. Тройной интеграл в цилиндрических координатах	28
Глава 2. Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля	30
§ 2.1. Скалярные и векторные поля. Линии и поверхности уровня	30
§ 2.2. Криволинейные интегралы первого рода	32
§ 2.3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода	34
§ 2.4. Криволинейные интегралы второго рода	35
§ 2.5. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Связь с криволинейным интегралом первого рода	38
§ 2.6. Формула Грина	41
§ 2.7. Площадь поверхности	43
§ 2.8. Поверхностные интегралы первого рода	46

§ 2.9. Поверхностные интегралы второго рода	47
§ 2.10. Вычисление поверхностного интеграла второго рода . . .	49
§ 2.11. Поток вектора через ориентированную поверхность . . .	51
§ 2.12. Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция	52
§ 2.13. Формула Стокса	54
§ 2.14. Линейный интеграл от вектора. Циркуляция. Ротор . . .	57
§ 2.15. Потенциальное поле	59
§ 2.16. Соленоидальное поле	64
Глава 3. Числовые ряды	66
§ 3.1. Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды	66
§ 3.2. Действия с рядами. Основные свойства	68
§ 3.3. Остаток ряда. Необходимое условие сходимости ряда . .	71
§ 3.4. Положительные ряды. Теоремы сравнения рядов	73
§ 3.5. Признак Даламбера	77
§ 3.6. Признак Коши	79
§ 3.7. Интегральный признак Коши	81
§ 3.8. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница	85
§ 3.9. Абсолютно и условно сходящиеся ряды	87
§ 3.10. Переместительное свойство абсолютно сходящегося ря- да. Теорема Дирихле	89
§ 3.11. О перестановке членов условно сходящегося ряда. Тео- рема Римана	91
Глава 4. Функциональные ряды	95
§ 4.1. Функциональные последовательности. Сходимость и равномерная сходимость	95
§ 4.2. Функциональные ряды. Сходимость и равномерная схо- димость	98
§ 4.3. Достаточный признак Вейерштрасса о равномерной схо- димости функционального ряда	100
§ 4.4. Непрерывность суммы функционального ряда	101
§ 4.5. Почленное интегрирование функциональных рядов . . .	104
§ 4.6. Почленное дифференцирование функциональных рядов	105

Глава 5. Степенные ряды	107
§ 5.1. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости . .	107
§ 5.2. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда	111
§ 5.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов	112
§ 5.4. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора . .	114
§ 5.5. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена	119
Глава 6. Ряды Фурье	121
§ 6.1. Предварительные сведения о периодических функциях	121
§ 6.2. Тригонометрическая система. Ортогональность тригонометрической системы	123
§ 6.3. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье	125
§ 6.4. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций	129
§ 6.5. Ряды Фурье для $2l$ -периодических функций	131
Глава 7. Дифференциальные уравнения	134
§ 7.1. Дифференциальные уравнения. Общие понятия	134
§ 7.2. Дифференциальное уравнение первого порядка. Поле направлений. Метод изоклин	135
§ 7.3. Задача Коши. Общее решение. Теорема Коши	137
§ 7.4. Простейшие дифференциальные уравнения.	140
§ 7.5. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	142
§ 7.6. Однородные дифференциальные уравнения.	144
§ 7.7. Линейные уравнения	148
§ 7.8. Уравнение Бернулли	152
§ 7.9. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.	154
§ 7.10. Уравнения, не разрешенные относительно производной	159
§ 7.11. Уравнения Лагранжа и Клеро.	161
§ 7.12. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Общее решение	163
§ 7.13. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка	165

§ 7.14. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков	168
§ 7.15. Линейная зависимость и линейная независимость системы функций. Определитель Вронского	169
§ 7.16. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения	173
§ 7.17. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения	177
§ 7.18. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа	178
§ 7.19. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами	180
§ 7.20. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.	185
Глава 8. Системы дифференциальных уравнений	191
§ 8.1. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия	191
§ 8.2. Интегрирование нормальных систем дифференциальных уравнений	194
§ 8.3. Системы линейных дифференциальных уравнений. Теорема Коши	196
§ 8.4. Линейная зависимость и линейная независимость вектор-функций. Определитель Вронского.	197
§ 8.5. Структура общего решения линейных систем дифференциальных уравнений.	198
§ 8.6. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	201
Глава 9. Теория функции комплексного переменного	207
§ 9.1. Понятие функции комплексного переменного	207
§ 9.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного	208
§ 9.3. Производная функции комплексного переменного	210
§ 9.4. Условия Коши–Римана	211
§ 9.5. Аналитические функции	214
§ 9.6. Гармонические функции	215
§ 9.7. Геометрический смысл модуля производной	216

§ 9.8. Геометрический смысл аргумента производной. Конформные отображения	217
§ 9.9. Основные элементарные функции комплексного переменного	219
§ 9.10. Интегрирование функций комплексного переменного. Основные свойства	224
§ 9.11. Интегральная теорема Коши	227
§ 9.12. Формула Ньютона–Лейбница	231
§ 9.13. Интегральная формула Коши	232
§ 9.14. Ряды с комплексными членами	235
§ 9.15. Степенные ряды	237
§ 9.16. Ряд Тейлора	238
§ 9.17. Ряд Лорана	241
§ 9.18. Изолированные особые точки и их классификация	245
§ 9.19. Классификация особых точек. Случай бесконечно удаленной точки	250
§ 9.20. Понятие вычета. Теорема о вычетах	252
§ 9.21. Вычисление вычетов	255
§ 9.22. Применение вычетов к вычислению интегралов	258
Предметный указатель	265

Светлой памяти своего отца
школьного учителя математики
Самвела Павловича Геворкяна
посвящает автор эту книгу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга вместе с нашей другой книгой, изданной под названием «Высшая математика. Основы математического анализа», охватывают весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений, за исключением раздела «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», который готовится к печати в виде отдельной книги.

В предлагаемой книге нашли отражение следующие разделы высшей математики: «Кратные интегралы» (гл. 1), «Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля» (гл. 2), «Ряды» (главы 3–6), «Дифференциальные уравнения» (главы 7 и 8) и «Теория функции комплексного переменного» (гл. 9).

В книге даются ссылки на предыдущую книгу: *Геворкян П. С.* Высшая математика. Основы математического анализа. — М.: Физматлит, 2004.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. М. Петрушко́ за ценные замечания при написании глав 3–6.

Москва, март, 2006 г.

П. С. Геворкян

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**§ 1.1. Задача об объеме цилиндрического бруса.
Определение двойного интеграла**

Подобно тому, как задача о площади криволинейной трапеции привела к понятию определенного интеграла, задача об объеме цилиндрического бруса приводит к понятию *двойного (определенного) интеграла*.

Пусть

$$z = f(x, y) \quad (1.1)$$

— непрерывно-дифференцируемая и положительная функция двух переменных, определенная на ограниченном подмножестве (S) плоскости \mathbf{R}^2 .

Рассмотрим тело (V) , которое сверху ограничено поверхностью (1.1), снизу плоскостью $z = 0$, а с боков — цилиндрической поверхностью, проходящей через границу γ плоского множества (S) , с образующей, параллельной оси Oz (рис. 1.1). Требуется найти объем V тела (V) , который представляет собой цилиндрический брус.

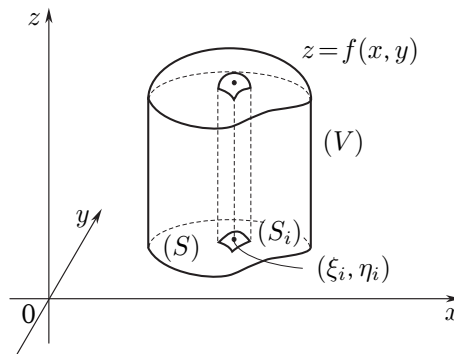


Рис. 1.1

Для решения этой задачи прибегнем к обычному в интегральном исчислении приему: разобьем множество (S) с помощью сети кривых на элементарные части $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$. Возникают цилиндрические столбики $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ с основаниями $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$. Объединение этих цилиндрических столбиков совпадает с телом (V) . Мы предполагаем, что все плоские фигуры $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ квадратуемы, т. е. имеют площади, которые соответственно обозначим через S_1, S_2, \dots, S_n .

Теперь в каждой фигуре (S_i) возьмем произвольную точку (ξ_i, η_i) и заметим, что

$$f(\xi_i, \eta_i)S_i$$

есть приближенное значение объема столбика (V_i) . Следовательно, приближенное значение объема всего тела (V) будет

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)S_i.$$

Диаметр множества (S_i) обозначим через d_i :

$$d_i = \sup_{P, P' \in (S_i)} \rho(P, P'),$$

где $\rho(P, P')$ — расстояние между точками $P, P' \in (S_i)$. Положим

$$d = \max\{d_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Теперь объем тела (V) естественно определить как предел

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)S_i. \quad (1.2)$$

Если отвлечься от задачи об объеме цилиндрического бруса, то вышеизложенным способом приходим к понятию двойного интеграла от функции $z = f(x, y)$ по области (S) .

Определение 1.1.1. Если существует предел

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)S_i$$

независимо от выбора точек $(\xi_i, \eta_i) \in (S_i)$ и независимо от разбиения множества (S) на элементарные части, то он называется

двойным интегралом функции $z = f(x, y)$ по области (S) и обозначается

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS,$$

или

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy.$$

В этом случае говорят также, что функция $z = f(x, y)$ *интегрируема* на множестве $(S) \subset \mathbf{R}^2$, которое называется *областью интегрирования*. Величина dS (или $dx dy$) называется *элементом площади*, а x и y называются *переменными интегрирования*.

Понятие двойного интеграла позволяет полученную выше формулу (1.2) переписать в виде

$$V = \iint_{(S)} f(x, y) dS. \quad (1.3)$$

§ 1.2. Задача о вычислении массы тела. Определение тройного интеграла

Пусть дано некоторое тело (V) в трехмерном пространстве \mathbf{R}^3 . Предположим, что известна плотность $\rho(x, y, z)$ распределения массы в каждой точке $M(x, y, z)$ тела (V) . Требуется *определить всю массу m тела (V)* .

Для решения этой задачи разобьем тело (V) на n частей $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ и выберем в каждой из этих частей по точке $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Теперь предположим, что плотность во всех точках части (V_i) приближенно равна плотности $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Тогда масса m_i части (V_i) приближенно равна

$$\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i,$$

где V_i — объем части (V_i) . Следовательно, масса m всего тела (V) приближенно будет

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i.$$

Максимальный из всех диаметров частей $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ обозначим через d . Тогда точное значение массы m тела (V) вычислится следующим образом:

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i. \quad (1.4)$$

Итак, поставленная задача о вычислении массы тела полностью решена. Если отвлечься от этой задачи и рассматривать произвольную функцию $f(x, y, z)$ вместо функции плотности $\rho(x, y, z)$, то вышеизложенным способом мы придем к понятию тройного интеграла функции $f(x, y, z)$ по телу (V) .

Определение 1.2.1. Если существует предел

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

независимо от выбора точек (ξ_i, η_i, ζ_i) и независимо от разбиения множества (V) на элементарные части, то он называется *тройным интегралом* функции $u = f(x, y, z)$ по множеству (V) и обозначается

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV,$$

или

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz.$$

В этом случае говорят также, что функция $u = f(x, y, z)$ *интегрируема* на множестве (V) .

Теперь полученную выше формулу (1.4) для вычисления массы тела можем представить в виде

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dV.$$

Замечание 1.2.1. Во всех рассуждениях, сделанных выше, мы предположили, что все множества V, V_1, V_2, \dots, V_n кубиреуемы, т. е. имеют объемы. Для этого достаточно было потребовать, чтобы границы всех этих элементарных частей представляли собой гладкие или кусочно-гладкие поверхности.

§ 1.3. Свойства двойных интегралов. Теоремы существования

Теорема 1.3.1. *Справедливо равенство*

$$\iint_{(S)} dS = S, \quad (1.5)$$

где S площадь фигуры (S) .

Доказательство непосредственно следует из определения двойного интеграла. \square

Теорема 1.3.2. *Пусть функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены на одном и том же множестве (S) плоскости \mathbf{R}^2 и на этом множестве имеют двойные интегралы. Тогда справедлива формула*

$$\iint_{(S)} [Af(x, y) \pm B\varphi(x, y)] dS = A \iint_{(S)} f(x, y) dS \pm B \iint_{(S)} \varphi(x, y) dS, \quad (1.6)$$

где A и B — постоянные числа.

Доказательство. Согласно определению двойного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} [Af(x, y) \pm B\varphi(x, y)] dS &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [Af(\xi_i, \eta_i) \pm B\varphi(\xi_i, \eta_i)] S_i = \\ &= A \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i \pm B \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i, \eta_i) S_i = \\ &= A \iint_{(S)} f(x, y) dS \pm B \iint_{(S)} \varphi(x, y) dS. \end{aligned}$$

\square

Следующие две теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам для функции одной переменной.

Теорема 1.3.3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена на квадратурном подмножестве (S) плоскости \mathbf{R}^2 . Предположим, что*

множество (S) некоторой кусочно-гладкой кривой разложено на два квадратуемые подмножества (S') и (S'') . Тогда из существования двойного интеграла функции $f(x, y)$ по области (S) следует существование двойных интегралов этой функции в обеих областях (S') и (S'') , и обратно. При этом имеет место разложение

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS = \iint_{(S')} f(x, y) dS' + \iint_{(S'')} f(x, y) dS''. \quad (1.7)$$

Теорема 1.3.4. Пусть $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ для всех $(x, y) \in (S)$ и существуют двойные интегралы функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ по (S) . Тогда справедливо равенство

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS \leq \iint_{(S)} \varphi(x, y) dS. \quad (1.8)$$

Теорема 1.3.5. Справедлива формула

$$\left| \iint_{(S)} f(x, y) dS \right| \leq \iint_{(S)} |f(x, y)| dS. \quad (1.9)$$

Доказательство. Рассмотрим очевидное двойное неравенство

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|.$$

Применяя формулу (1.8) к этим неравенствам, получим

$$-\iint_{(S)} |f(x, y)| dS \leq \iint_{(S)} f(x, y) dS \leq \iint_{(S)} |f(x, y)| dS,$$

что равносильно неравенству (1.9). \square

Теорема 1.3.6 (о среднем). Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена и интегрируема на замкнутом множестве $(S) \subset \mathbf{R}^2$. Тогда существует такая точка $(\xi, \eta) \in (S)$, что

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS = f(\xi, \eta) S. \quad (1.10)$$

где S — площадь фигуры (S) .

Доказательство. Наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ на замкнутом множестве $(S) \subset \mathbf{R}^2$, которые существуют согласно известной теореме Вейерштрасса, обозначим через m и M соответственно. Тогда

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad (1.11)$$

для всех точек $(x, y) \in (S)$.

Из неравенства (1.11), учитывая теорему 1.3.4, получим

$$\iint_{(S)} m \, dS \leq \iint_{(S)} f(x, y) \, dS \leq \iint_{(S)} M \, dS,$$

откуда в силу теоремы 1.3.1 имеем

$$mS \leq \iint_{(S)} f(x, y) \, dS \leq MS,$$

или

$$m \leq \frac{1}{S} \iint_{(S)} f(x, y) \, dS \leq M.$$

Учитывая последнее двойное неравенство, согласно известной теореме Больцано–Коши можем найти такую точку $(\xi, \eta) \in (S)$, что

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint_{(S)} f(x, y) \, dS,$$

откуда и получаем формулу (1.10).

Теорема доказана. \square

Теперь сформулируем две *теоремы существования двойного интеграла*.

Теорема 1.3.7. *Всякая непрерывная в области (S) функция $z = f(x, y)$ интегрируема.*

Теорема 1.3.8. *Если функция $z = f(x, y)$ ограничена и имеет разрывы только лишь на конечном числе гладких кривых области (S) , то она интегрируема.*

Напомним, что *областью* называется открытое и связное подмножество плоскости.

Замечание 1.3.1. Все теоремы этого параграфа, с соответствующими поправками, справедливы и для тройных интегралов.

§ 1.4. Приведение двойного интеграла к повторному

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена на прямоугольнике

$$\Delta = [a, b] \times [c, d],$$

т.е. на множестве точек $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, которые удовлетворяют условию

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

где $a < b$, а $c < d$.

Теорема 1.4.1. Пусть для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

и также при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует обычный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \equiv \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

и выполняется равенство

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (1.12)$$

Доказательство. Разобьем стороны прямоугольника на части с помощью точек

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

и

$$c = y_1 < y_2 < \dots < y_m = d.$$

Тогда прямоугольник Δ разобьется на элементарные прямоугольники

$$\Delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

$i = 1, \dots, n-1$ и $j = 1, \dots, m-1$.

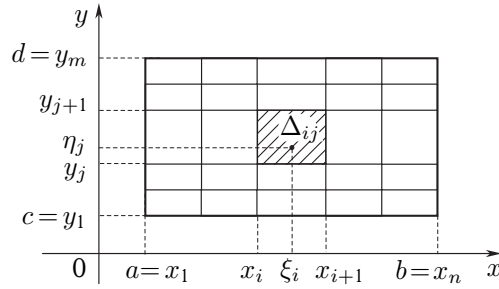


Рис. 1.2

Заметим, что соответствующую разбиению Δ_{ij} интегральную сумму двойного интеграла $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$ можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, а $(\xi_i, \eta_j) \in \Delta_{ij}$ (рис. 1.2). Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy &= \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right\} \Delta x_i = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_c^d f(\xi_i, y) dy \right\} \Delta x_i = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание 1.4.1. Оказывается, для выполнения условия последней теоремы, а, стало быть, и формулы (1.12), достаточно потребовать непрерывность функции $f(x, y)$ на прямоугольнике Δ . В этом случае справедлива также формула

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad (1.13)$$

а значит, и равенство

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1.14)$$

Таким образом вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла.

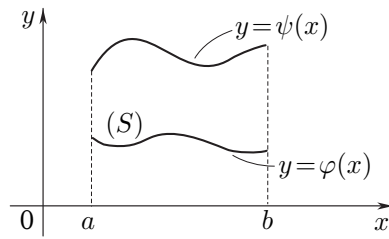


Рис. 1.3

Теперь предположим, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $(S) \subset \mathbf{R}^2$, которое ограничено гладкими кривыми

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x), \\ (\varphi(x) \leq \psi(x), \quad a \leq x \leq b)$$

и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.3). Тогда, аналогично

последней теореме, доказывается формула

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (1.15)$$

Пример 1.4.1. Вычислить площадь S фигуры (S) , ограниченной эллипсом (рис. 1.4)

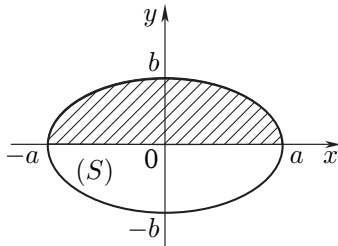


Рис. 1.4

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Согласно теореме 1.3.1 имеем

$$S = \iint_{(S)} dx dy.$$

Для вычисления последнего двойного

интеграла применим формулу (1.12):

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_{(S)} dx dy = 2 \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \\
 &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} a \cos t dt = \\
 &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 2ab \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.
 \end{aligned}$$

Выше была произведена замена переменной $x = a \sin t$. \square

§ 1.5. Вычисление тройного интеграла

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна на множестве $(V) = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$, который представляет собой параллелепипед (рис. 1.5). Как и в случае двойного интеграла, можно доказать, что справедлива следующая формула вычисления тройного интеграла функции $u = f(x, y, z)$ по множеству (V) :

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz. \quad (1.16)$$

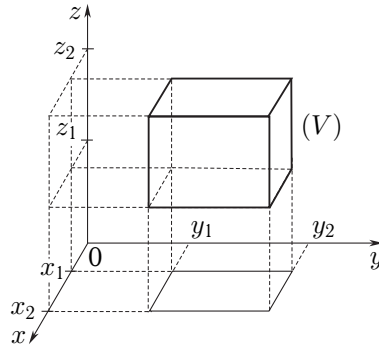


Рис. 1.5

Пусть теперь функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна

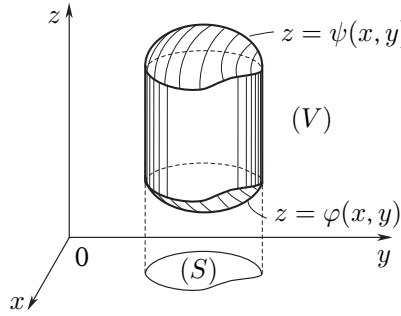


Рис. 1.6

на теле (V) , имеющем форму цилиндрического бруса, ограниченного снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху — поверхностью $z = \psi(x, y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz . Проекцию тела (V) на координатную плоскость Oxy обозначим через (S) (рис. 1.6). Тогда справедлива формула

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{(S)} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (1.17)$$

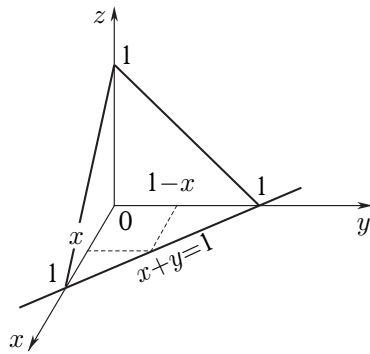


Рис. 1.7

Пример 1.5.1. Вычислить объем V тела (V) , ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $x + y + z = 1$ (рис. 1.7).

Искомый объем равняется тройному интегралу

$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz,$$

который вычислим по формуле (1.17):

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(V)} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \\ &= \int_0^1 dx \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{1-x} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 d(x-1) = \frac{1}{2} \left. \frac{(x-1)^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

□

§ 1.6. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на области (D) с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy \quad (1.18)$$

и в нем произведем замену переменных

$$\begin{aligned} x &= a\xi + b\eta, \\ y &= c\xi + d\eta, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где

$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, как видоизменится двойной интеграл (1.18) при замене переменных (1.19).

Предположим, что преобразование, обратное к (1.19), отображает область (D) с кусочно-гладкой границей в область (Δ) также с кусочно-гладкой границей (рис. 1.8).

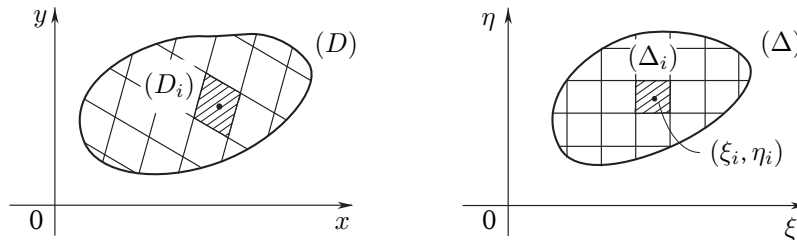


Рис. 1.8

На плоскости $O\xi\eta$ рассмотрим квадратную сетку со стороной длины h . Этой сеткой область (Δ) разобьется на части (Δ_i) , $i = 1, \dots, n$. С помощью преобразования (1.19) получим соответствующее разбиение (D_i) , $i = 1, \dots, n$, области (D) , где каждое (D_i) представляет собой некоторый параллелограмм («полный» или «неполный»). Докажем, что

$$D_i = |J|\Delta_i, \quad (1.20)$$

где D_i и Δ_i — площади (D_i) и (Δ_i) соответственно.

Квадрат (Δ_i) определяется двумя векторами $(h, 0)$ и $(0, h)$. Преобразованием (1.19) эти векторы отображаются в векторы (ah, ch) и (bh, dh) соответственно, которые и определяют

параллелограмм (D_i) . Следовательно, площадь этого параллелограмма вычисляется по формуле

$$D_i = \left| \begin{vmatrix} ah & bh \\ ch & dh \end{vmatrix} \right| = h^2 \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = h^2 |J| = |J| \Delta_i.$$

Теперь вычислим двойной интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} f(x, y) dx dy &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) D_i = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(a\xi_i + b\eta_i, c\xi_i + d\eta_i) |J| \Delta_i = \\ &= \iint_{(\Delta)} f(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta) |J| d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом мы получили следующую *формулу замены переменных в двойном интеграле* в случае линейного преобразования (1.19):

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta) |J| d\xi d\eta. \quad (1.21)$$

Теперь в двойном интеграле (1.18) произведем произвольную замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi, \eta), \\ y &= \psi(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Предположим, что функции $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ задают взаимно-однозначное отображение области (Δ) плоскости $O\xi\eta$ на область (D) плоскости Oxy . Предположим также, что эти функции имеют непрерывные частные производные в области (Δ) (рис. 1.9).

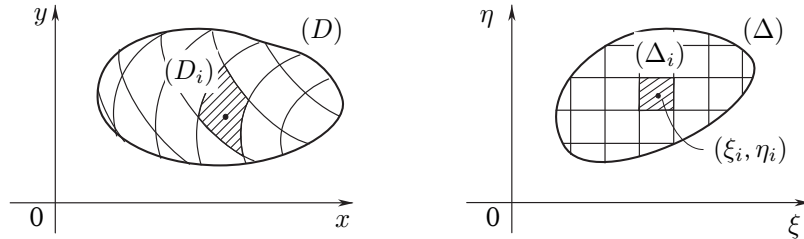


Рис. 1.9

В этом случае очевидно, что квадратному разбиению (Δ_i) , $i = 1, \dots, n$, области (Δ) с помощью преобразования (1.22) будет соответствовать разбиение (D_i) , $i = 1, \dots, n$, области (D) , где каждое (D_i) уже представляет собой криволинейный параллелограмм. Площадь D_i криволинейного параллелограмма (D_i) вычисляется по формуле

$$D_i = |J(\xi_i, \eta_i)|\Delta_i, \quad (1.23)$$

где $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta_i$ — некоторая точка, а

$$J(\xi_i, \eta_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial \xi_i} & \frac{\partial \varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial \eta_i} \\ \frac{\partial \psi(\xi_i, \eta_i)}{\partial \xi_i} & \frac{\partial \psi(\xi_i, \eta_i)}{\partial \eta_i} \end{vmatrix}$$

— определитель Якоби преобразования (1.22) в точке (ξ_i, η_i) (доказательство формулы (1.23) не приводим).

Теперь мы можем вычислить двойной интеграл

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} f(x, y) dx dy &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) D_i = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i, \eta_i), \psi(\xi_i, \eta_i)) |J(\xi_i, \eta_i)| \Delta_i = \\ &= \iint_{(\Delta)} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Итак, мы получили *формулу замены переменных в двойном интеграле* в общем случае:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (1.24)$$

Замечание 1.6.1. Формула (1.21) является частным случаем формулы (1.24), поскольку определитель Якоби преобразования (1.19) есть определитель $J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

§ 1.7. Двойной интеграл в полярных координатах

Рассмотрим частный случай замены переменных, который часто применяется при вычислениях двойных интегралов. Это — замена декартовых координат x и y полярными координатами r и φ .

Как мы знаем (см. «Высшая математика. Основы математического анализа», § 7.3) преобразование полярных координат в прямоугольные декартовы осуществляется формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.25)$$

Вычислим определитель Якоби преобразования (1.25):

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

Теперь предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в области (D) , которая ограничена лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и непрерывной кривой

$$r = r(\varphi),$$

где $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ (рис. 1.10).

Применяя формулу (1.24) замены переменных в двойном интеграле получим следующую формулу вычисления двойного интеграла в полярных координатах:

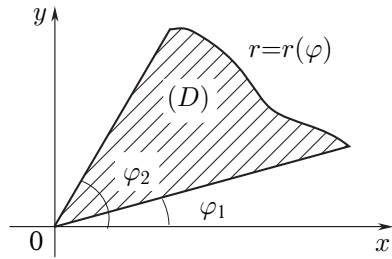


Рис. 1.10

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (1.26)$$

Пример 1.7.1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{x^2+y^2} dx dy.$$

Произведем замену переменных (1.25), т. е. перейдем к полярным координатам и применим формулу (1.26). Тогда получим

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{R^2} - 1) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} (e^{R^2} - 1) \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi (e^{R^2} - 1). \end{aligned}$$

□

§ 1.8. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна в трехмерной области (D) с кусочно-гладкой границей. Произведем произвольную замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= \psi(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= \chi(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{1.27}$$

в тройном интеграле

$$\iiint_{(D)} f(x, y, z) dx dy dz, \tag{1.28}$$

где предполагаем, что функции $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ и $\chi(\xi, \eta, \zeta)$ задают взаимно-однозначное отображение некоторой области (Δ) пространства $O\xi\eta\zeta$ на область (D) пространства $Oxyz$. Предположим также, что эти функции имеют непрерывные частные производные в области (Δ) .

В сделанных предположениях справедлива следующая формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\begin{aligned} \iiint_{(D)} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{(\Delta)} f[\varphi(\xi, \eta, \zeta), \psi(\xi, \eta, \zeta), \chi(\xi, \eta, \zeta)] |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \tag{1.29}$$

где

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \psi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \chi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial \chi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial \chi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

является определителем Якоби преобразования (1.27).

Доказательство формулы (1.29) аналогично доказательству соответствующей формулы (1.24) для двойного интеграла.

§ 1.9. Тройной интеграл в сферических координатах

Пусть в трехмерном пространстве \mathbf{R}^3 задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. *Сферические*, или *полярные*, *координаты* в пространстве связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta, \end{cases} \quad (1.30)$$

где $0 \leq r < +\infty$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

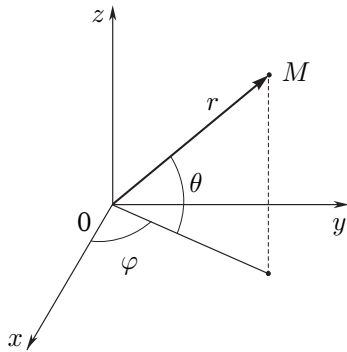


Рис. 1.11

Геометрический смысл сферических координат (r, φ, θ) точки M ясен из рис. 1.11: r есть длина радиус вектора \vec{OM} , θ — угол между этим вектором и его проекцией на плоскость Oxy , а φ — угол между указанной проекцией и положительным направлением оси Ox , отсчитываемый от этой оси против часовой стрелки.

Вычислим определитель Якоби преобразования (1.30):

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = r^2 \cos \theta.$$

Следовательно, при переходе к сферическим (полярным) координатам подынтегральная функция тройного интеграла умножится на $r^2 \cos \theta$.

Пример 1.9.1. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_{(D)} xyz \, dx \, dy \, dz,$$

где (D) — область точек с положительными координатами, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Введем сферические координаты по формулам (1.30). Тогда нетрудно заметить, что область (D) определяется следующими неравенствами (см. рис. 1.12):

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1, \\ 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

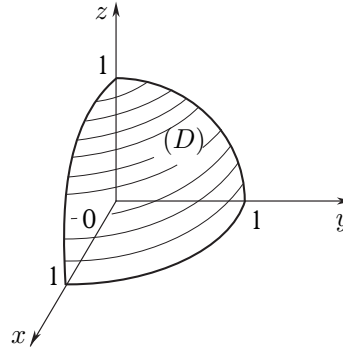


Рис. 1.12

Согласно формуле (1.29) имеем

$$\begin{aligned} \iiint_{(D)} xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^5 \cos^3 \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi \, dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^3 \theta) \, d \cos \theta \int_0^{\pi/2} (-\cos \varphi) \, d \cos \varphi \int_0^1 r^5 \, dr = \\ &= \frac{\cos^4 \theta}{4} \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

□