

Бобылев Ю.В.  
Кузелев М.В.

**Нелинейные явления  
при  
электромагнитных  
взаимодействиях  
электронных пучков  
с плазмой**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 533.9  
ББК 22.338  
Б 72



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 09-02-07022д*

Бобылёв Ю.В., Кузелев М.В. **Нелинейные явления при электромагнитных взаимодействиях электронных пучков с плазмой.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 456 с. — ISBN 978-5-9221-1193-5.

Представлено современное состояние нелинейной теории взаимодействия электронных пучков с плазмой. Основное внимание уделено излучательным пучковым неустойчивостям типа коллективного и одночастичного эффектов Черенкова, а также процессам вынужденного рассеяния плазменных и электромагнитных волн на пучках. Методами разложения траекторий и импульсов частиц по степеням поля исследованы нелинейные стадии неустойчивостей, стабилизирующиеся нелинейными сдвигами частот пучковых и плазменных волн. Нелинейные явления, связанные с захватом частиц и опрокидыванием волн, исследованы численными методами. Рассмотрена также нелинейная теория неустойчивостей плазмы, электроны которой движутся относительно неподвижного ионного фона.

Рассмотрены нелинейные электромагнитные явления в пространственно неоднородном электронном пучке и плазме. Изложена также квантовая теория черенковских пучковых неустойчивостей в изотропных средах.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области электродинамики плазмы, плазменной электроники, физики нелинейных волновых процессов и компьютерной физики.

ISBN 978-5-9221-1193-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2009

© Ю. В. Бобылев, М. В. Кузелев, 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Описание динамики заряженных частиц в нелинейной теории бесстолкновительной плазмы . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Кинетическое и гидродинамическое описания . . . . .	9
1.2. Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с помощью первых интегралов . . . . .	14
1.3. Решение задачи Коши методом интегрирования по начальным данным . . . . .	17
1.4. Начальная задача Коши для уравнения Власова и метод интегрирования по начальным данным . . . . .	21
1.5. Особенности граничной задачи для уравнения Власова и ее решение методом интегрирования по начальным данным . . . . .	25
1.6. Метод интегрирования по начальным данным и неоднородные кинетические уравнения . . . . .	30
1.7. Примеры решения начальных и граничных задач для уравнения Власова методом интегрирования по начальным данным . . . . .	31
1.8. Многожидкостная гидродинамика и интегрирование по начальным данным . . . . .	36
<b>Глава 2. Нелинейная теория взаимодействия нерелятивистского электронного пучка с плазмой . . . . .</b>	<b>43</b>
2.1. Основные уравнения нелинейной теории . . . . .	43
2.2. Линейное приближение . . . . .	48
2.3. Цилиндрическая пучково-плазменная система . . . . .	52
2.4. Численное моделирование взаимодействия нерелятивистского электронного пучка с плазмой . . . . .	55
2.5. Метод разложения траекторий . . . . .	67
2.6. Нелинейная динамика коллективного эффекта Черенкова . . . . .	73
2.7. Резонансное возбуждение гармоник при коллективном эффекте Черенкова. Нелинейные спектры ленгмюровских волн . . . . .	78
2.8. Метод неполного численного моделирования. Нелинейная теория одночастичного эффекта Черенкова . . . . .	85

Глава 3. <b>Нелинейная динамика неустойчивости плазмы с током</b>	92
3.1. Нелинейные уравнения неустойчивости плазмы с током . . . . .	92
3.2. Линейный анализ. . . . .	94
3.3. Численное моделирование неустойчивости плазмы с током в режиме сильного взаимодействия . . . . .	96
3.4. Нелинейная динамика неустойчивости плазмы с током в приближении кубической нелинейности. Режим слабого взаимодействия. . .	99
3.5. Влияние постоянной составляющей электрического поля на динамику тока в плазме при неустойчивости Бунемана. . . . .	104
Глава 4. <b>Релятивистские нелинейные уравнения взаимодействия прямолинейного электронного пучка с плазмой. Непотенциальная линейная теория</b>	110
4.1. Вывод основных нелинейных уравнений релятивистской теории черенковской пучковой неустойчивости в плазме . . . . .	110
4.2. Частные случаи нелинейных уравнений релятивистской теории черенковской пучковой неустойчивости в плазме . . . . .	117
4.3. Дисперсионное уравнение линейной теории . . . . .	121
4.4. Классификация режимов черенковских пучковых неустойчивостей в плазменных волноводах . . . . .	123
Глава 5. <b>Релятивистская нелинейная теория пучково-плазменного взаимодействия в режиме коллективного эффекта Черенкова</b>	135
5.1. Нелинейные уравнения высокочастотной черенковской неустойчивости плотного релятивистского электронного пучка в плазме, описываемой в линейном приближении . . . . .	135
5.2. Нелинейная динамика высокочастотной неустойчивости в приближении кубической нелинейности. Метод разложения импульсов. . .	137
5.3. Нелинейные уравнения низкочастотной черенковской неустойчивости плотного релятивистского электронного пучка в плазме . . . . .	148
5.4. Нелинейная динамика низкочастотной неустойчивости в приближении кубической нелинейности . . . . .	152
Глава 6. <b>Нелинейная теория высокочастотной черенковской неустойчивости плотного релятивистского электронного пучка в плотной нелинейной плазме. Режим коллективного взаимодействия</b>	160
6.1. Формулировка задачи и исходные нелинейные уравнения . . . . .	160
6.2. Разложение траекторий и импульсов электронов с точностью до нелинейности третьего порядка . . . . .	162
6.3. Нелинейная динамика коллективного черенковского взаимодействия релятивистского электронного пучка с плотной нелинейной плазмой в приближении кубической нелинейности . . . . .	168

---

<b>Глава 7. Компьютерное моделирование неустойчивостей релятивистских электронных пучков в плазме</b> . . . . .	180
7.1. Формулировка задачи. Основные нелинейные уравнения . . . . .	180
7.2. Одночастичный режим . . . . .	184
7.3. Коллективный режим. Формирование и распад «солитоноподобных» структур. . . . .	188
7.4. Численное моделирование неустойчивости релятивистского пучка в плазме, развивающейся в одночастичном режиме вблизи порога . . . . .	196
<b>Глава 8. Нелинейная динамика параметрических неустойчивостей при коллективном эффекте Черенкова</b> . . . . .	205
8.1. Нелинейные уравнения трехволнового взаимодействия и их линейный анализ . . . . .	205
8.2. Разложение траекторий с точностью до нелинейности третьего порядка — нерелятивистское приближение. . . . .	217
8.3. Нелинейная динамика распадной и взрывной неустойчивостей в нерелятивистском случае . . . . .	221
8.4. Аналитическая релятивистская теория процессов рассеяния в приближении кубической нелинейности . . . . .	230
8.5. Релятивистский эффект энергетической фазировки при вынужденном рассеянии электромагнитных волн на электронном пучке . . . . .	241
8.6. Четырехволновое рассеяние электромагнитных волн на релятивистском пучке . . . . .	245
<b>Глава 9. Релятивистская теория рассеяния линейно поляризованных электромагнитных волн на незамагниченном пучке электронов</b> . . . . .	251
9.1. Нерелятивистская нелинейная теория . . . . .	251
9.2. Релятивистские нелинейные уравнения . . . . .	257
9.3. Линейная теория и механизмы нелинейной стабилизации . . . . .	265
9.4. Разложение траекторий и импульсов в коллективном режиме . . . . .	269
9.5. Эффект энергетической группировки. . . . .	274
<b>Глава 10. Использование метода интегрирования по начальным данным для описания неоднородных плазменных образований</b> . . . . .	277
10.1. Кинетическое описание нелинейной динамики поперечно-неоднородного плазменного потока (слиппинг-неустойчивость). Случай плоской геометрии . . . . .	277
10.2. Кинетическое описание нелинейной динамики многокомпонентной заряженной плазмы. Случай цилиндрической геометрии. . . . .	294
10.3. Возбуждение волн в неоднородной плазме . . . . .	328

---

Глава 11. <b>Квантовая теория черенковских пучковых неустойчивостей в плазме</b> . . . . .	350
11.1. Черенковское излучение продольных ленгмюровских волн. Нерелятивистская теория . . . . .	350
11.2. Черенковское излучение продольных ленгмюровских волн в релятивистском случае . . . . .	368
11.3. Черенковское излучение поперечных электромагнитных волн . . . . .	374
Глава 12. <b>Спонтанное и вынужденное излучение электронного пучка конечной длительности</b> . . . . .	382
12.1. Черенковское излучение электронного слоя в одномерной плазме. . . . .	382
12.2. Теория черенковского излучения прямолинейным пучком продольных волн в изотропной плазме . . . . .	407
12.3. Теория черенковского излучения прямолинейным пучком поперечных волн в изотропном диэлектрике . . . . .	413
12.4. Черенковское излучение прямолинейным пучком поперечно-продольных волн в анизотропной плазме . . . . .	421
12.5. Черенковское излучение прямолинейным пучком ионно-звуковых волн в неизотермической плазме . . . . .	426
12.6. Аномальный эффект Доплера. . . . .	428
Дополнение Д1. <b>Методы решения дифференциальных уравнений с кубическими нелинейностями</b> . . . . .	436
Д1.1. Нелинейное уравнение Шредингера . . . . .	436
Д1.2. Системы двух нелинейных уравнений . . . . .	437
Дополнение Д2. <b>Граничные условия излучения для нестационарных задач электродинамики ограниченной плазмы</b> . . . . .	445
Список литературы . . . . .	453

## Предисловие

В последние десятилетия в связи с успехами в создании и практическом применении мощных электронных пучков проводятся интенсивные теоретические исследования в области физики пучков заряженных частиц. Многочисленные и весьма успешные результаты этих исследований впечатляют. Созданы не только новые научные направления, например, плазменная релятивистская СВЧ электроника, но и дополнены новыми разделами традиционные области — физика плазмы, теория волн, физическая кинетика и другие. Особо должны быть отмечены достижения в исследовании нелинейных явлений в пучках заряженных частиц. Объем журнальных теоретических работ по нелинейной физике электронных и ионных пучков весьма обширен. При этом наблюдается многообразие подходов, определенная несогласованность в терминологии, большое число взаимодополняющих, дублирующих, а иногда и не согласующихся результатов. Что же касается обобщающих трудов, посвященных систематическому изложению хотя бы какого-то одного аспекта пучковой физики, то их сравнительно немного. Настоящая монография призвана частично устранить этот пробел. В ней изложено современное состояние нелинейной физики электронных пучков в той ее части, которая посвящена электромагнитным взаимодействиям пучков с плазмой. Под электромагнитными взаимодействиями в основном понимаются многочисленные пучково-плазменные неустойчивости, при которых происходит возбуждение и излучение электромагнитных волн в плазме.

Теоретический анализ механизмов взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой показал, что в зависимости от параметров пучка и плазмы и их геометрии пучково-плазменные неустойчивости развиваются в различных режимах, включая одночастичный и коллективный вынужденные эффекты Черенкова, аномальный эффект Доплера, эффекты томсоновского и рамановского излучения и рассеяния. Оказалось, что многие из указанных неустойчивостей стабилизируются при достаточно слабой нелинейности пучка и плазмы. Это свидетельствует о том, что связь пучковой и плазменной подсистем определяется неким малым параметром, и делает возможным аналитическое описание нелинейной динамики соответствующих режимов пучково-плазменных неустойчивостей. Именно разработке, изложению и использованию аналитических методов описания нелинейной динамики электронных пучков в плазме, в том числе и релятивистских, посвящена значительная часть настоящей монографии. Однако при многих пучково-плазменных взаимодействиях развиваются столь ин-

тенсивные нелинейные процессы, что описание их аналитическими методами оказывается невозможным. Исключить такие процессы из рассмотрения значит нарушить целостность исследуемой проблемы. Поэтому в монографии обсуждаются наиболее важные и интересные результаты компьютерного моделирования нелинейных явлений во взаимодействующих электронном пучке и плазме.

В основу настоящей монографии, опирающейся на классические результаты и известные методы физики электронных пучков и электродинамики плазмы, положены оригинальные результаты, полученные авторами при исследовании электромагнитных взаимодействий электронных пучков с плазмой и плазменными системами и нашедшие практические применения в плазменной электронике и радиофизике. Главы 1–9 и Дополнения написаны авторами совместно, гл. 10–12 написаны Кузелевым М.В. При работе над гл. 12 использованы материалы обзора, написанного совместно с А.А. Рухадзе, которому авторы выражают глубокую благодарность. Авторы надеются, что монография будет полезна и интересна специалистам, работающим в областях физики плазмы, плазменной электроники, теории волн и электродинамики, а также аспирантам и студентам соответствующих специальностей университетов.



## Глава 1

# ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

### 1.1. Кинетическое и гидродинамическое описания

Основными методами теоретического описания динамики заряженных частиц бесстолкновительной плазмы являются метод кинетического уравнения Власова и метод многожидкостной гидродинамики. Напомним ключевые положения названных методов и обрисует характер рассматриваемых ниже теоретических проблем.

Наиболее общее описание плазмы достигается с помощью кинетического уравнения. Метод кинетического уравнения использует вероятностный подход. При этом вводится функция распределения частиц сорта  $\alpha$

$$f_{N_\alpha}(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \dots, \mathbf{r}_{N_\alpha}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s, \dots, \mathbf{p}_{N_\alpha}), \quad (1.1.1)$$

характеризующая распределение координат  $\mathbf{r}_s$  и импульсов  $\mathbf{p}_s$  всех  $N_\alpha$  частиц соответствующего сорта. Такая функция распределения зависит от очень большого числа переменных, поэтому описание, основанное на распределении (1.1.1), является слишком подробным и сложным. Однако если частицы не взаимодействуют между собой (т. е. не сталкиваются), то их можно рассматривать как независимые. Тогда, в соответствии с теоремой умножения вероятностей независимых событий, функцию распределения  $N_\alpha$  частиц можно представить в виде произведения

$$f_{N_\alpha}(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \dots, \mathbf{r}_{N_\alpha}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s, \dots, \mathbf{p}_{N_\alpha}) = \prod_{s=1}^{N_\alpha} f_\alpha(t, \mathbf{r}_s, \mathbf{p}_s). \quad (1.1.2)$$

Здесь  $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  — одночастичная функция распределения частиц сорта  $\alpha$ , определяющая плотность вероятности нахождения частицы в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  фазового пространства. При этом выражение

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} \quad (1.1.3)$$

определяет вероятность того, что частица в момент времени  $t$  находится в элементе объема  $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$  фазового пространства около точки  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$ . Здесь  $d\mathbf{r} = dx dy dz$  и  $d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$  — элементы объемов в конфи-

гурационном и импульсном пространствах соответственно. Функцию распределения принято нормировать так, что

$$\int_{\{|r|<\infty, |p|<\infty\}} f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = N_{\alpha}, \quad (1.1.4)$$

поэтому величина (1.1.3) является на самом деле не вероятностью, а вероятностью, умноженной на полное число частиц соответствующего сорта  $N_{\alpha}$ . То есть при такой нормировке (1.1.3) есть просто число частиц сорта  $\alpha$ , находящихся в момент времени  $t$  в элементе объема  $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$  около точки  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ .

Получим уравнение, которому удовлетворяет одночастичная функция распределения  $f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ . В произвольный момент времени  $t_0$  число частиц в элементе объема  $d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0$  около произвольной точки  $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0$  по определению есть  $f_{\alpha}(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0$ . Частица, находившаяся в момент  $t_0$  в точке  $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0$ , в момент времени  $t$  перейдет в точку фазового пространства  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ , где  $\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)$  — уравнения траектории в фазовом пространстве. Траектория определяется из уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e_{\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \right\}, \quad (1.1.5)$$

дополненных начальными условиями  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$ . Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженность электрического и индукция магнитного полей, а  $\mathbf{v}$  — скорость частицы.

При движении вдоль траектории, вообще говоря, трансформируются элемент фазового объема и функция распределения:

$$d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 \rightarrow d\mathbf{r} d\mathbf{p}, \quad f_{\alpha}(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \rightarrow f_{\alpha}(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)).$$

Но поскольку частицы не уничтожаются и не рождаются (рекомбинация и ионизация отсутствуют) и не сталкиваются друг с другом (столкновения эквивалентны рождению и уничтожению частиц в пространстве импульсов), полное число их в элементе фазового объема сохраняется, то есть

$$f_{\alpha}(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = f_{\alpha}(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 = \text{const}. \quad (1.1.6)$$

Далее, из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема следует, что

$$d\mathbf{r} d\mathbf{p} = d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (1.1.7)$$

Равенство (1.1.7) означает, что якобиан преобразования от переменных  $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0$  к переменным  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  равен единице, если преобразование осуществляется при помощи решений системы (1.1.5). Тогда из (1.1.6) и (1.1.7) получаем, что вдоль фазовой траектории частицы функция распределения постоянна:

$$f_{\alpha}(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) = \text{const}. \quad (1.1.8)$$

Дифференцируя равенство (1.1.8) по времени, получим

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (1.1.9)$$

Подставляя далее (1.1.5) в (1.1.9), приходим окончательно к следующему кинетическому уравнению для одночастичной функции распределения:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.1.10)$$

Уравнение (1.1.10) называется кинетическим уравнением Власова. Такое уравнение должно быть записано для каждого сорта заряженных частиц  $\alpha$ , составляющих плазму. Плотность тока и плотность заряда определяются при помощи функции распределения формулами

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(t, \mathbf{r}) &= e_\alpha \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \\ \mathbf{j}_\alpha(t, \mathbf{r}) &= e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \\ \mathbf{j} &= \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Формулы (1.1.11) подразумевают нормировку функции распределения на плотность частиц:

$$\int f_\alpha d\mathbf{p} = n_\alpha, \quad (1.1.12)$$

что согласуется с (1.1.4), поскольку  $\int n_\alpha d\mathbf{r} = N_\alpha$ .

Независимыми переменными в уравнении (1.1.10), т. е. аргументами функции распределения являются  $t$ ,  $\mathbf{r}$ , и  $\mathbf{p}$ . Скорость же  $\mathbf{v}$  независимой переменной не является, а выражается через импульс по известной формуле релятивистской механики

$$\mathbf{v} = c \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m_\alpha^2 c^2 + p^2}}. \quad (1.1.13)$$

В нерелятивистском случае  $p^2 \ll m_\alpha^2 c^2$  и  $\mathbf{p} = m_\alpha \mathbf{v}$ , где  $m_\alpha$  — масса покоя частицы сорта  $\alpha$ .

Кинетическое уравнение (1.1.10) совместно с выражениями (1.1.11) и уравнениями для векторов электромагнитного поля образуют полную систему уравнений, описывающих согласованное движение частиц плазмы с возникающими при этом электромагнитными полями. В связи с этим уравнение (1.1.10) называют еще кинетическим уравнением с самосогласованным полем в бесстолкновительном пределе.

Менее общим, но более простым, является гидродинамический метод описания плазмы. Получение гидродинамических уравнений сво-

дится к отысканию замкнутой системы для моментов функции распределения частиц сорта  $\alpha$ , определяемых следующими формулами:

$$\begin{aligned} N_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \\ N_\alpha(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{v} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \\ N_\alpha(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{p} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Здесь  $N_\alpha$ ,  $\mathbf{V}_\alpha$  и  $\mathbf{P}_\alpha$ —гидродинамические плотность, скорость и импульс частиц сорта  $\alpha$ . Применим к кинетическому уравнению (1.1.10) операторы интегрирования по импульсу  $\int \mathfrak{F} d\mathbf{p}$  и  $\int \mathbf{p} \mathfrak{F} d\mathbf{p}$ , где символом  $\mathfrak{F}$  обозначена левая часть уравнения (1.1.10). В результате получим уравнения (см. также § 1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla(N_\alpha \mathbf{V}_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{P}_\alpha + \frac{1}{N_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_j} \Pi_{\alpha j} &= e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}] \right\}, \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

где  $j = \{x, y, z\}$ ,  $r_x = x$ ,  $r_y = y$ ,  $r_z = z$ —декартовы координаты, а

$$\Pi_{\alpha j}(\mathbf{r}, t) = \int (\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{r}, t)) (v_j - V_{\alpha j}(\mathbf{r}, t)) f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (1.1.16)$$

— так называемый тензор давления. В уравнениях (1.1.15) использованы общепринятые обозначения для дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \\ (\mathbf{V}_\alpha \nabla) &= V_{\alpha x} \frac{\partial}{\partial x} + V_{\alpha y} \frac{\partial}{\partial y} + V_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Интегрирование кинетического уравнения (1.1.10) по импульсам при получении (1.1.15) проводилось с учетом обращения функции распределения  $f_\alpha$  в нуль при  $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ .

Первое из уравнений (1.1.15) есть уравнение непрерывности, второе — уравнение движения. Оно, однако, не является замкнутым, так как содержит тензор (1.1.16), пока еще не выраженный через гидродинамические величины (1.1.14). Проблема получения уравнений гидродинамики как раз и состоит в том, чтобы выразить (1.1.16) через гидродинамические величины (1.1.14). В общем случае проблема эта чрезвычайно сложна, но для холодной системы заряженных частиц решается достаточно просто.

Пусть выполнено неравенство

$$V_{T_\alpha} \ll \frac{\lambda}{\tau}, \quad (1.1.18)$$

где  $V_{T_\alpha}$  — тепловая скорость частиц сорта  $\alpha$ ,  $\lambda$  — характерный размер, а  $\tau$  — характерное время некоторого процесса. Если справедливо неравенство (1.1.18), то за время развития процесса частицы успевают

сместиться с тепловой скоростью на расстояния, много меньше характерного пространственного размера. При этом систему частиц можно считать холодной и представить ее функцию распределения в виде

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = N_\alpha(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{r}, t)). \quad (1.1.19)$$

Интегрирование выражения (1.1.19) показывает, что соотношения (1.1.14) выполняются автоматически, а тензор давлений (1.1.16) равен нулю:  $\Pi_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0$ .

Таким образом, для холодной системы заряженных частиц замкнутая система уравнений гидродинамики записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla(N_\alpha \mathbf{V}_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{P}_\alpha &= e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}] \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Второе уравнение системы (1.1.20) — уравнение движения, также называемое уравнением Эйлера, обычно записывают не через гидродинамический импульс  $\mathbf{P}_\alpha$ , а через гидродинамическую скорость  $\mathbf{V}_\alpha$ . Учитывая, что связь между  $\mathbf{V}_\alpha$  и  $\mathbf{P}_\alpha$  такая же, как и в (1.1.13), можно уравнение движения преобразовать к виду

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{V}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{1 - \frac{V_\alpha^2}{c^2}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \mathbf{E}) \right\}. \quad (1.1.21)$$

В нерелятивистском случае последнее уравнение упрощается:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{V}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}] \right\}. \quad (1.1.22)$$

Уравнения непрерывности и движения (1.1.20) должны быть записаны для каждого сорта заряженных частиц  $\alpha$ . Плотность тока и плотность заряда определяются при помощи гидродинамических величин формулами

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha \mathbf{V}_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha. \quad (1.1.23)$$

Гидродинамику, основанную на уравнениях (1.1.20), называют многожидкостной гидродинамикой холодной плазмы без столкновений. Уравнения (1.1.20) совместно с выражениями (1.1.23) и уравнениями для векторов электромагнитного поля образуют полную систему уравнений, описывающих согласованное движение частиц с возникающими и изменяющимися при этом движении электромагнитными полями.

Гидродинамическое описание является менее общим, чем описание, основанное на кинетическом уравнении Власова. Более того, некоторые процессы даже в холодной плазме и пучке рассмотренной гидродинамикой вообще не описываются. Дело в том, что представление функции распределения в виде (1.1.19) предполагает, что скорость  $\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t)$  является однозначной функцией координат. В физике электронных

пучков часто рассматриваются процессы, при которых однозначность поля скоростей  $\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t)$  нарушается. К таким процессам относятся опрокидывание волны, захват частиц, образование виртуального катода, разогрев и ряд других. Подобные явления могут быть адекватно описаны только в рамках кинетического уравнения Власова, которым мы и будем преимущественно пользоваться в дальнейшем.

Наибольший интерес представляет решение уравнения Власова в постановках начальной и граничной задач. При решении начальной задачи (задача с начальными условиями) и граничной задачи (задача с граничными условиями или задача инъекции) для уравнения Власова естественным образом выделяется одна независимая переменная, полностью определяющая временную или пространственную эволюцию функции распределения. Такую переменную будем в дальнейшем называть «эволюционной» переменной. Для начальной задачи это — время  $t$ , для граничной задачи — пространственная координата вдоль оси перпендикулярной плоскости инъекции (в дальнейшем для определенности  $z$ ). Обе данные задачи могут быть сформулированы как задачи Коши для уравнения Власова, что в свою очередь позволяет построить единый математический формализм их решения.

По своей структуре уравнение (1.1.10) является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. В теории уравнений с частными производными существует традиционный метод решения таких уравнений, основанный на использовании первых интегралов. Основные положения данного метода, а также трудности, с которыми приходится сталкиваться при его практической реализации, рассматриваются в следующем параграфе.

## 1.2. Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с помощью первых интегралов

Будем исходить из следующего линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$Y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + Y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad (1.2.1a)$$

где  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — независимые переменные, а  $Y_i = Y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — заданные функции. Задача Коши для уравнения (1.2.1a) ставится как задача нахождения такого решения этого уравнения  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которое при фиксированном значении одного из аргументов (например,  $x_1$ ) обращается в заданную функцию остальных аргументов. Запишем это в виде

$$f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = f_0(x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (1.2.2a)$$

условившись здесь и далее в качестве «эволюционной» переменной задачи Коши выбирать  $x_1$  и решать задачу в области  $x_1 > 0$ . Поскольку переменная, по которой решается задача Коши, является выделенной, подчеркнем это специальными обозначениями:

$$x = x_1, \quad Y = Y_1, \quad \mathbf{q} = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}, \quad \mathbf{G} = \{Y_2, Y_3, \dots, Y_n\}. \quad (1.2.3)$$

Перепишем в новых обозначениях уравнение (1.2.1а) и начальное условие (1.2.2а):

$$Y \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{G} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad x > 0, \quad (1.2.16)$$

$$f(0, \mathbf{q}) = f_0(\mathbf{q}), \quad (1.2.26)$$

где  $f = f(x, \mathbf{q})$ ,  $Y = Y(x, \mathbf{q})$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, \mathbf{q})$ .

Согласно теории уравнений с частными производными первого порядка общее решение уравнения (1.2.16) строится по следующей схеме:

1. Составляется характеристическая система уравнений для уравнения (1.2.16). Ее можно записать либо в симметричной форме<sup>1)</sup>:

$$\frac{dx}{Y} = \frac{d\mathbf{q}}{\mathbf{G}}, \quad (1.2.4)$$

либо в эквивалентном виде нормальной системы  $n - 1$  уравнений:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dx} = \frac{\mathbf{G}}{Y}. \quad (1.2.5)$$

2. Определяется первый интеграл системы (1.2.4):

$$\Psi(x, \mathbf{q}) = \mathbf{C}, \quad (1.2.6)$$

где  $\mathbf{C}$  — произвольная постоянная (вектор размерности  $n - 1$ , как и все встречающиеся в этом разделе векторные величины). Если вместо (1.2.4) используется векторное уравнение (1.2.5), то записывается его общее решение

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(x, \mathbf{C}), \quad (1.2.7)$$

зависящее от произвольной постоянной. Далее (1.2.7) разрешается относительно  $\mathbf{C}$ , что снова приводит к соотношению вида (1.2.6).

3. Первый интеграл (1.2.6) подставляется в произвольную дифференцируемую функцию  $\Phi$ , что и дает общее решение уравнения (1.2.16)

$$f(x, \mathbf{q}) = \Phi(\Psi(x, \mathbf{q})). \quad (1.2.8)$$

Еще раз отметим, что если решение характеристической системы получено в форме (1.2.7), то в начале необходимо выразить  $\mathbf{C}$  через  $x$  и  $\mathbf{q}$ , то есть найти соотношение (1.2.6), а уже затем подставить  $\mathbf{C}$  в произвольную функцию и получить (1.2.8).

<sup>1)</sup> Векторную запись  $\mathbf{a}/\mathbf{b}$  следует понимать как систему равенств  $a_2/b_2 = a_3/b_3 = \dots$

Построение решения задачи Коши для уравнения (1.2.16) происходит по описанной выше схеме поиска общего решения. При этом целесообразно исходить из характеристической системы (1.2.5) в нормальной форме, дополнив ее условием

$$\mathbf{q}|_{x=0} = \mathbf{q}_0. \quad (1.2.9)$$

Решение системы (1.2.5) при этих условиях записывается в форме (1.2.7), куда вместо произвольной постоянной  $\mathbf{C}$  входит вектор начальных данных  $\mathbf{q}_0$ :

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0). \quad (1.2.10)$$

Выражая из (1.2.10) вектор начальных данных  $\mathbf{q}_0$ , получаем первый интеграл нормальной системы (1.2.5), записанный (вместо (1.2.6)) в виде

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0(x, \mathbf{q}). \quad (1.2.11)$$

Подстановка (1.2.11) в произвольную дифференцируемую функцию  $\Phi$  приводит к следующему общему решению уравнения (1.2.16) (см. (1.2.8)):

$$f(x, \mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{Q}_0(x, \mathbf{q})). \quad (1.2.12)$$

Для окончательного решения задачи Коши (1.2.16)–(1.2.26) нужно только установить конкретный вид пока еще произвольной функции  $\Phi$ .

По самому своему определению функция  $\mathbf{Q}_0$  постоянна вдоль векторной линии (1.2.10), называемой характеристикой уравнения (1.2.16)<sup>1)</sup>. Поэтому, вдоль характеристики сохраняет свое значение и решение уравнения (1.2.16), являющееся функцией  $\mathbf{Q}_0$ . Это означает, что если в решение  $f(x, \mathbf{q})$  вместо независимой переменной  $\mathbf{q}$  подставить характеристику (1.2.10), то получится значение, которое функция  $f$  имела в той точке  $\mathbf{q}$ -пространства, откуда при  $x = 0$  вышла характеристика, т. е. в точке  $\mathbf{q}_0$  (см. (1.2.9)). Таким образом,

$$f(x, \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0)) = f(0, \mathbf{q}_0). \quad (1.2.13)$$

С другой стороны подстановка в (1.2.12) характеристики (1.2.10) дает

$$f(x, \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0)) = \Phi(\mathbf{q}_0). \quad (1.2.14)$$

При написании (1.2.14) учтена взаимная обратимость преобразований (1.2.10) и (1.2.11), означающая, что равенства

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(x, \mathbf{Q}_0(x, \mathbf{q})), \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0(x, \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0)) \quad (1.2.15)$$

выполняются тождественно. Сравнивая (1.2.13) и (1.2.14) и учитывая условие (1.2.26), получим соотношение для определения произвольной функции  $\Phi$

$$\Phi(\mathbf{q}) = f_0(\mathbf{q}). \quad (1.2.16)$$

<sup>1)</sup> В многомерном случае обычно говорят не о характеристике, а о характеристиках. Мы используем единственное число, поскольку все записи осуществляем в векторном виде.



Окончательно решение задачи Коши для уравнения (1.2.1б) с дополнительным условием (1.2.2б) дается формулой

$$f(x, \mathbf{q}) = f_0(\mathbf{Q}_0(x, \mathbf{q})). \quad (1.2.17)$$

Практическая реализация изложенного здесь традиционного метода решения задачи Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка, основанного на интегрировании характеристической системы и нахождении первого интеграла, сопряжена с большими трудностями, а во многих случаях вообще невозможна. Это обусловлено тем, что характеристическая система уравнений в общем случае является нелинейной. И если даже удастся найти ее решение, то возникает не менее сложная проблема выразить начальные данные  $\mathbf{q}_0$  через независимые переменные  $x$  и  $\mathbf{q}$ . При численном решении задачи Коши этого сделать вообще нельзя. Поэтому требуется определить иной подход, позволяющий находить решение задачи Коши последовательно, «двигаясь» вдоль характеристик из начальной точки, и минуя этап построения первого интеграла характеристической системы. При этом, при каждом значении «эволюционной» переменной  $x$  задачи Коши ее решение выражается как интеграл по вектору начальных данных  $\mathbf{q}_0$ . Этот факт и обуславливает название предлагаемого метода: «метод интегрирования по начальным данным», суть и основные положения которого излагаются в следующем параграфе.

### 1.3. Решение задачи Коши методом интегрирования по начальным данным

Представим решение рассматриваемой задачи Коши (1.2.1б)–(1.2.2б) в виде

$$f(x, \mathbf{q}) = \int d\mathbf{q}_0 f_0(\mathbf{q}_0) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0)). \quad (1.3.1)$$

Здесь функция  $f_0$  определена в (1.2.2б),  $\mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0)$  — решение (1.2.10) нормальной системы уравнений (1.2.5), дополненной начальными данными (1.2.9),

$$\delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0)) = \prod_{i=2}^n \delta(x_i - X_i(x, \mathbf{q}_0)), \quad (1.3.2)$$

где  $\delta(z)$  — дельта-функция, а  $X_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) — компоненты вектора  $\mathbf{Q} = \{X_2, X_3, \dots, X_n\}$ . Поскольку в силу (1.2.9),  $\mathbf{Q}(0, \mathbf{q}_0) = \mathbf{q}_0$ , то функция (1.3.1) очевидно удовлетворяет начальному условию (1.2.2б). Выясним, при каких условиях (1.3.1) удовлетворяет и уравнению (1.2.1б), что осуществим прямой подстановкой решения (1.3.1) в уравнение (1.2.1б).

Вычисление производных функции (1.3.1) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)_k &= \int d\mathbf{q}_0 f_0(\mathbf{q}_0) \delta'_k \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^n \delta(x_i - X_i(x, \mathbf{q}_0)), \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{k=2}^n \int d\mathbf{q}_0 f_0(\mathbf{q}_0) \delta'_k \left( -\frac{dX_k}{dx} \right) \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^n \delta(x_i - X_i(x, \mathbf{q}_0)), \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

где  $\delta'_k$  — производная дельта-функции  $\delta(x_k - X_k(x, \mathbf{q}_0))$  по  $x_k$ . Подставляя (1.3.3) в левую часть (1.2.16), с учетом (1.2.5) преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \int d\mathbf{q}_0 f_0(\mathbf{q}_0) \delta'_k \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^{n-1} \delta(x_i - X_i(x, \mathbf{q}_0)) \times \\ \times \left[ Y_k(x, \mathbf{q}) - Y_k(x, \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0)) \frac{Y(x, \mathbf{q})}{Y(x, \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0))} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Для вычисления интеграла в (1.3.4) сделаем замену переменной интегрирования: перейдем от интегрирования по  $\mathbf{q}_0$  к интегрированию по  $\mathbf{Q}$ . Чтобы не путать независимую переменную  $\mathbf{q}$  с новой переменной интегрирования  $\mathbf{Q}$  введем обозначение  $\hat{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{Q}$ , или в компонентах  $\hat{\mathbf{q}} = \{\hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n\}$ . Переход к новой переменной интегрирования осуществляется путем замен

$$\mathbf{q}_0 \rightarrow \mathbf{Q}_0(x, \hat{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{Q}(x, \mathbf{q}_0) \rightarrow \hat{\mathbf{q}}, \quad d\mathbf{q}_0 \rightarrow D^{-1} d\hat{\mathbf{q}}, \quad (1.3.5)$$

где  $\mathbf{Q}_0$  — функция (1.2.11), а  $D^{-1}$  — якобиан преобразования от переменной  $\mathbf{q}_0$  к переменной  $\hat{\mathbf{q}}$ , обратный якобиану

$$D \equiv \det(a_{ik}) = \frac{\partial(\hat{\mathbf{q}})}{\partial(\mathbf{q}_0)} = \frac{\partial(\hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)}{\partial(x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n})}. \quad (1.3.6)$$

Здесь через  $a_{ik}$  ( $i, k = 2, 3, \dots, n$ ) обозначен элемент определителя, стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца:

$$a_{ik} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_{0k}}. \quad (1.3.7)$$

В результате перехода к новым переменным интеграл (1.3.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \int d\hat{\mathbf{q}} D^{-1} f_0(\mathbf{Q}_0(x, \hat{\mathbf{q}})) \delta'(x_k - \hat{x}_k) \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^{n-1} \delta(x_i - \hat{x}_i) \times \\ \times \left[ Y_k(x, \mathbf{q}) - Y_k(x, \hat{\mathbf{q}}) \frac{Y(x, \mathbf{q})}{Y(x, \hat{\mathbf{q}})} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Используя свойство дельта функции  $\int dz f(z) \delta(z - a) = f(a)$ , произведем в (1.3.8) сначала интегрирование по  $\hat{x}_i$  для  $i \neq k$ , что дает

$$\sum_{k=2}^n \int d\hat{x}_k D^{-1} f_0 \left( \mathbf{Q}_0 \left( x, \mathbf{q}^{(k)} \right) \right) \delta' \left( x_k - \hat{x}_k \right) \times \\ \times \left[ Y_k \left( x, \mathbf{q} \right) - Y_k \left( x, \mathbf{q}^{(k)} \right) \frac{Y \left( x, \mathbf{q} \right)}{Y \left( x, \mathbf{q}^{(k)} \right)} \right], \quad (1.3.9)$$

где  $\mathbf{q}^{(k)} = \{x_2, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n\}$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ . Используя теперь другое свойство дельта-функции  $\int dz f(z) \delta'(z - a) = -f'(a)$ , выполним в (1.3.9) последнее интегрирование по  $\hat{x}_k$ . В результате получим

$$D^{-1} \left( \mathbf{q} \right) f_0 \left( \mathbf{Q}_0 \left( x, \mathbf{q} \right) \right) Y \left( x, \mathbf{q} \right) \sum_{k=2}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{Y_k \left( x, \mathbf{q} \right)}{Y \left( x, \mathbf{q} \right)} \right), \quad (1.3.10)$$

где  $\mathbf{q} = \{x_2, \dots, x_k, \dots, x_n\}$  — вектор независимых переменных. Равенство нулю выражения (1.3.10) означает, что при подстановке (1.3.1) в левую часть уравнения (1.2.1б) получился нуль, т.е. функция (1.3.1) действительно является решением линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

Видно, что (1.3.10) обращается в ноль, если

$$\sum_{k=2}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{Y_k \left( x, \mathbf{q} \right)}{Y \left( x, \mathbf{q} \right)} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\mathbf{G} \left( x, \mathbf{q} \right)}{Y \left( x, \mathbf{q} \right)} \right) = 0. \quad (1.3.11)$$

Удовлетворить условию (1.3.11) можно различными способами. Мы здесь предположим, что:

- функция  $Y \left( x, \mathbf{q} \right)$  — коэффициент в уравнении (1.2.1б) перед производной от  $f$  по «эволюционной» переменной  $x$ , зависит только от этой переменной, но не от  $\mathbf{q}$ ;
- функции  $Y_k \left( x, \mathbf{q} \right)$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ) — коэффициенты в уравнении (1.2.1б) перед производными от  $f$  по переменным  $x_k$ , не зависят от «своей» переменной  $x_k$ .

Таким образом, при выполнении условий

$$Y = Y(x); \quad \frac{\partial Y_k}{\partial x_k} = 0 \text{ при } k = 2, 3, \dots, n \quad (1.3.12)$$

интеграл по начальным данным (1.3.1) является решением рассматриваемой задачи Коши (1.2.1б)–(1.2.2б).

Для придания физического смысла условиям (1.3.12) рассмотрим якобиан (1.3.6) и выясним когда он не зависит от «эволюционной» переменной  $x$ . Поскольку  $\mathbf{Q}|_{x=0} = \mathbf{q}_0$ , а значит и  $\hat{\mathbf{q}}|_{x=0} = \mathbf{q}_0$ , то

$$D|_{x=0} = 1. \quad (1.3.13)$$

Дифференцируя (1.3.6) по  $x$ , имеем

$$\frac{dD}{dx} = \sum_{i,k=2}^n \frac{\partial D}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dx}. \quad (1.3.14)$$

Из теории определителей известно, что

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ik}} = A_{ik}, \quad (1.3.15)$$

где  $A_{ik}$  — алгебраические дополнения, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{k=2}^n A_{ik} a_{jk} = D \delta_{ij}, \quad (1.3.16)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Учитывая (1.3.7) и (1.2.5), имеем

$$\frac{da_{ik}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_{0k}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \left( \frac{Y_i}{Y} \right) = \sum_{j=2}^n \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left( \frac{Y_i}{Y} \right) \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial x_{0k}} = \sum_{j=2}^n a_{jk} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left( \frac{Y_i}{Y} \right). \quad (1.3.17)$$

С учетом (1.3.15) и (1.3.17) из (1.3.14) следует

$$\frac{dD}{dx} = \sum_{i,j,k=2}^n A_{ik} a_{jk} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left( \frac{Y_i}{Y} \right). \quad (1.3.18)$$

В силу (1.3.16) при осуществлении суммирования по  $k$  получаем в (1.3.18) при  $i \neq j$  нули, а при  $i = j$  имеем

$$\frac{dD}{dx} = D \sum_{i=2}^n \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \left( \frac{Y_i(x, \hat{\mathbf{q}})}{Y(x, \hat{\mathbf{q}})} \right) = D \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}} \left( \frac{\mathbf{G}(x, \hat{\mathbf{q}})}{Y(x, \hat{\mathbf{q}})} \right). \quad (1.3.19)$$

Сумма в (1.3.19) отличается от аналогичной суммы из (1.3.11) только обозначением индекса суммирования и заменой независимой переменной  $\mathbf{q}$  на переменную  $\hat{\mathbf{q}}$ . Поэтому, если (1.3.11) обращается в нуль, то и производная якобиана (1.3.19) равна нулю. Отсюда и из (1.3.13) следует, что

$$D = D^{-1} = 1. \quad (1.3.20)$$

Значит при выполнении условий (1.3.12) не только задача Коши (1.2.1б)–(1.2.2б) имеет решение в форме (1.3.1), но и справедлива теорема Лиувилля о сохранении объема в  $\mathbf{q}$ -пространстве:

$$\int_{G_0} d\mathbf{q}_0 = \int_G d\hat{\mathbf{q}}, \quad (1.3.21)$$

где  $G_0$  — объем в  $\mathbf{q}$ -пространстве, занимаемый системой при  $x = 0$ , а  $G$  — объем, занимаемый той же системой при любом  $x > 0$ . В дополнение к (1.3.21) видно, что элементарное интегрирование (1.3.1) по  $\mathbf{q}$  дает результат

$$\int d\mathbf{q} f(x, \mathbf{q}) = \int d\mathbf{q}_0 f_0(\mathbf{q}_0) = \text{const}, \quad (1.3.22)$$

означающий сохранение нормы решения задачи Коши (1.2.16)–(1.2.26). Следовательно, при выполнении условий (1.3.12) уравнение (1.2.16) имеет основные свойства кинетического уравнения, а его решение (1.3.1) может трактоваться как функция распределения в  $\mathbf{q}$ -пространстве.

Не сложно в самом общем виде показать, что решение (1.3.1) не отличается от общего решения (1.2.17) уравнения (1.2.16), рассмотренного в предыдущем разделе. Действительно, перейдем в (1.3.1) от интегрирования по  $\mathbf{q}_0$  к интегрированию по  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}$ . Поступая в точности, как и при получении из (1.3.4) выражения (1.3.8) и учитывая (1.3.20), преобразуем (1.3.1) к виду

$$f(x, \mathbf{q}) = \int d\hat{\mathbf{q}} f_0(\mathbf{Q}_0(x, \hat{\mathbf{q}})) \delta(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}), \quad (1.3.23)$$

где  $\mathbf{Q}_0$  — определена в (1.2.11). Интеграл по  $\hat{\mathbf{q}}$  из-за присутствия дельта-функции вычисляется, что дает результат

$$f(x, \mathbf{q}) = f_0(\mathbf{Q}_0(x, \mathbf{q})), \quad (1.3.24)$$

совпадающий с общим решением (1.2.17), полученным в предыдущем разделе.

Хотя решение (1.3.1) по существу сводится к традиционному, оно оказывается чрезвычайно удобным для практического применения в расчетных задачах. Это решение получается иным путем — последовательно, от начальной функции  $f_0$ , интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2.5) и вычислением интегралов по начальным данным. В удобстве конструкции (1.3.1) мы убедимся ниже конкретно для кинетического уравнения Власова.

#### 1.4. Начальная задача Коши для уравнения Власова и метод интегрирования по начальным данным

В случае начальной задачи кинетическое уравнение Власова

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.4.1)$$

для функции распределения  $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  дополняется в момент времени  $t = 0$  следующим начальным условием:

$$f_\alpha(0, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (1.4.2)$$

где  $f_{\alpha 0}$  — заданная функция координат и импульсов, а  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  — правая часть второго уравнения (1.1.5). Задача (1.4.1)–(1.4.2) рассматривается в области  $t > 0$ . Очевидно, что «эволюционной» переменной данной задачи является время  $t$ .

Применим к задаче Коши (1.4.1)–(1.4.2) общие результаты двух предыдущих разделов. Из сравнения уравнений (1.2.1) и (1.4.1) видно, что обозначения (1.2.3) сводятся к следующему:

$$\begin{aligned} x = t, \quad Y = 1, \quad \mathbf{q} = \{\mathbf{r}, \mathbf{p}\} = \{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}, \\ \mathbf{G} = \{\mathbf{v}, \mathbf{F}\} = \{v_x, v_y, v_z, F_x, F_y, F_z\}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Характеристическая система уравнения (1.4.1) записывается при этом в симметричной форме (1.2.4) как

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\mathbf{r}}{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{p}}{\mathbf{F}}, \quad (1.4.4)$$

а в виде нормальной системы (1.2.5) как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.4.5)$$

Очевидно, что нормальная система (1.4.5) является обычной системой уравнений движения частицы (1.1.5). Вектор начальных данных (1.2.9) системы (1.4.5) имеет вид  $\mathbf{q}_0 = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0\}$ , т. е.

$$\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{p}|_{t=0} = \mathbf{p}_0. \quad (1.4.6)$$

Решение системы (1.4.5) при этих условиях записывается в форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{p} = \mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0), \quad (1.4.7)$$

а вектор  $\mathbf{Q}$  из общего решения (1.2.10) определяется соотношением  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{R}, \mathbf{P}\}$ . Начальные данные (1.4.6) выражаются из (1.4.7) по формулам

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{P}_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (1.4.8)$$

при этом вектор  $\mathbf{Q}_0$  из (1.2.11) имеет вид  $\mathbf{Q}_0 = \{\mathbf{R}_0, \mathbf{P}_0\}$ . И наконец общее решение (1.2.17) в случае задачи (1.4.1)–(1.4.2) определяется выражением

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\alpha 0}(\mathbf{R}_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \mathbf{P}_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})). \quad (1.4.9)$$

Выражение (1.4.9) построено традиционным способом решения линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка — с использованием первых интегралов (1.4.8).

Запишем теперь общее решение начальной задачи Коши (1.4.1)–(1.4.2) в виде интеграла по начальным данным. Структура векторов  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}$ , и  $\mathbf{Q}$  была установлена при получении (1.4.3)–(1.4.9). Подстановка их в общее выражение (1.3.1) приводит к следующему результату:

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \iint d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)), \quad (1.4.10)$$

где  $\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$  и  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$  — решения (1.4.7) нормальной системы (1.4.5) с дополнительными условиями (1.4.6). Для того, чтобы функция распределения (1.4.10) действительно являлась решением задачи Коши

(1.4.1)–(1.4.2), должны выполняться условия (1.3.12). Проверим это для уравнения Власова в постановке начальной задачи.

Поскольку  $Y = 1 = \text{const}$ , то первое условие (1.3.12) очевидно выполнено. Второе же условие подробно расписывается в виде следующих равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial F_x}{\partial p_x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial p_y} = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial p_z} = 0. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Первые три выполняются всегда, поскольку скорости и пространственные координаты в начальной задаче — независимые друг от друга величины. Выполнение последних трех равенств (1.4.11) означает независимость силы, действующей на частицу, от проекции импульса (следовательно, и скорости) на направление действия силы. Выполнение данного условия означает отсутствие в системе диссипации. При наличии диссипации не сохраняется также и якобиан (1.3.6), точнее

$$D = \frac{\partial (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})}{\partial (\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)}. \quad (1.4.12)$$

Если же последние три равенства (1.4.11) выполнены, то якобиан (1.4.12) тождественно равен единице, что является отражением теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема. Таким образом, в начальной задаче Коши для уравнения Власова единственным условием применимости интеграла по начальным данным (1.4.10) в качестве решения задачи является отсутствие в системе диссипативных сил. Что касается зависимости силы от перпендикулярной к ней составляющей импульса, она естественно допускается.

Особенно простой оказывается функция распределения (1.4.10) для первоначально моноскоростной однородной в пространстве системы частиц. Пусть, например

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_{\alpha} \cdot \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\alpha}), \quad (1.4.13)$$

где  $n_{\alpha}$  — концентрация частиц сорта  $\alpha$ , а  $\mathbf{p}_{\alpha}$  — их импульс. Подставляя (1.4.13) в (1.4.10) и выполняя интегрирование по  $\mathbf{p}_0$ , получим

$$f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_{\alpha} \int d\mathbf{r}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0)). \quad (1.4.14)$$

Здесь  $\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0)$  и  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0)$  — решения нормальной системы (1.4.5) с начальными условиями

$$\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{p}|_{t=0} = \mathbf{p}_{\alpha}. \quad (1.4.15)$$

Представления функций распределения в виде интегралов по начальным данным (1.4.10) или (1.4.14) оказываются очень удобными для практического применения в расчетных задачах. Тем более, что сама функция распределения часто бывает не нужна, а требуются только некоторые ее интегралы, например, моменты. Такие интегралы

имеют более простую структуру, чем (1.4.10) и (1.4.14). Вычислим для примера плотности заряда и тока, определяемые формулами (1.1.11). Подставляя (1.4.10) в (1.1.11) и выполняя интегрирование по импульсу, получим плотности заряда и тока, определяемые по формулам

$$\rho_{\alpha}(t, \mathbf{r}) = e_{\alpha} \int \int d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)), \quad (1.4.16)$$

$$\mathbf{j}_{\alpha}(t, \mathbf{r}) = e_{\alpha} c \int \int d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \frac{\mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)}{\sqrt{m_{\alpha}^2 c^2 + P^2(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)}} \times \\ \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)),$$

а в случае распределения (1.4.14) выражения (1.4.16) становятся еще более простыми:

$$\rho_{\alpha}(t, \mathbf{r}) = e_{\alpha} n_{\alpha} \int d\mathbf{r}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0)), \\ \mathbf{j}_{\alpha}(t, \mathbf{r}) = e_{\alpha} n_{\alpha} c \int d\mathbf{r}_0 \frac{\mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0)}{\sqrt{m_{\alpha}^2 c^2 + P^2(t, \mathbf{r}_0)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0)). \quad (1.4.17)$$

Еще более простую структуру имеют коэффициенты разложения моментов функций распределения (1.4.10) или (1.4.14) в ряды или интегралы по  $\mathbf{r}$ . Так компоненты Фурье величин (1.4.16) имеют вид

$$\rho_{\alpha}(t, \mathbf{k}) = e_{\alpha} \int \int d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)), \\ \mathbf{j}_{\alpha}(t, \mathbf{k}) = e_{\alpha} c \int \int d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \frac{\mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)}{\sqrt{m_{\alpha}^2 c^2 + P^2(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)}} \times \\ \times \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)), \quad (1.4.18)$$

а компоненты Фурье величин (1.4.17) оказываются следующими:

$$\rho_{\alpha}(t, \mathbf{k}) = e_{\alpha} n_{\alpha} \int d\mathbf{r}_0 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0)), \\ \mathbf{j}_{\alpha}(t, \mathbf{k}) = e_{\alpha} n_{\alpha} c \int d\mathbf{r}_0 \frac{\mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0)}{\sqrt{m_{\alpha}^2 c^2 + P^2(t, \mathbf{r}_0)}} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0)), \quad (1.4.19)$$

где  $\mathbf{k}$  — двойственная к  $\mathbf{r}$  переменная. Величины (1.4.18) и (1.4.19) рассчитываются без труда (в общем случае конечно на ЭВМ): нужно только решать обыкновенные дифференциальные уравнения движения частиц (1.4.5) и вычислять определенные интегралы.

Отметим еще, что функция распределения (1.4.10) (и (1.4.14)) сохраняет нормировку, так как (см. (1.3.22))

$$\int \int f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (1.4.20)$$

поэтому, если в начальный момент функция распределения была нормированной, она останется нормированной и для всех последующих



моментов времени. Соотношение (1.4.20) отражает факт сохранения полного числа частиц.

Есть важный случай, который следует оговорить особо – релятивистская плазма с магнитным полем. В этом случае в силе  $\mathbf{F}$  появляется составляющая  $\mathbf{F}_B = (e_\alpha/c) [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}]$ , где  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции. Используя формулу (1.1.13) для магнитной составляющей силы, имеем

$$\mathbf{F}_B = e_\alpha \left( m_\alpha^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right)^{-1/2} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}]. \quad (1.4.21)$$

Видно, что для (1.4.21) последние три условия (1.4.11) не выполняются. Дело в том, что требования (1.4.11) сильно завышены, что сделано было нами в целях упрощения изложения. На самом деле, как видно из (1.3.11), необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial F_x}{\partial p_x} + \frac{\partial F_y}{\partial p_y} + \frac{\partial F_z}{\partial p_z} = 0, \quad (1.4.22)$$

которое для (1.4.21) и для любой другой гироскопической силы выполняется.

В качестве методической иллюстрации изложенной в данном параграфе теории решения начальных задач Коши для уравнения Власова в разд. 1.7 рассматриваются простые примеры плазменных систем, для которых функция распределения легко вычисляется как традиционным методом, так и методом интегрирования по начальным данным (примеры 1 и 2).

### 1.5. Особенности граничной задачи для уравнения Власова и ее решение методом интегрирования по начальным данным

Пусть через плоскость  $z = 0$  перпендикулярно этой плоскости в полупространство  $z > 0$  инжектируются частицы плазмы (т.е. пучок) с известной при  $z = 0$  функцией распределения. Требуется определить функцию распределения в области  $z > 0$ . Очевидно, что речь идет о граничной задаче, «эволюционной» переменной в которой является координата  $z$ . Запишем кинетическое уравнение Власова в постановке граничной задачи в виде

$$v_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + F_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_z} + \mathbf{v}_\perp \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\perp} + \mathbf{F}_\perp \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\perp} = 0, \quad (1.5.1)$$

где  $\mathbf{r}_\perp = \{x, y\}$ ,  $\mathbf{v}_\perp = \{v_x, v_y\}$ ,  $\mathbf{p}_\perp = \{p_x, p_y\}$  и  $\mathbf{F}_\perp = \{F_x, F_y\}$  – поперечные к направлению инжекции составляющие координаты, скорости, импульса и силы. Уравнение (1.5.1) дополним следующим начальным условием:

$$f_\alpha(0, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp) = f_{\alpha 0}(t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp). \quad (1.5.2)$$

Как видно из (1.5.2), при рассмотрении граничной задачи принимается следующий порядок перечисления аргументов функции распределения:  $f_\alpha(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp)$ , но в окончательных формулах будем придерживаться обычного порядка —  $t, \mathbf{r}, \mathbf{p}$ .

Применим к задаче Коши (1.5.1)–(1.5.2) общие результаты разд. 1.2 и 1.3. Из сравнения уравнений (1.2.1) и (1.5.1) следует, что обозначения (1.2.3) сводятся к

$$x = z, \quad Y = v_z, \quad \mathbf{q} = \{t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp\}, \quad \mathbf{G} = \{1, F_z, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{F}_\perp\}. \quad (1.5.3)$$

Характеристическая система уравнения (1.5.1), записанная в виде нормальной системы (1.2.5), имеет вид

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v_z}, \quad \frac{dp_z}{dz} = \frac{F_z}{v_z}, \quad \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} = \frac{\mathbf{v}_\perp}{v_z}, \quad \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dz} = \frac{\mathbf{F}_\perp}{v_z}. \quad (1.5.4)$$

Очевидно, что нормальная система (1.5.4) отнюдь не сводится к обычной системе уравнений движения частицы. С этим связаны существенные особенности граничной задачи по сравнению с начальной. Вектор начальных данных (1.2.9) системы (1.5.4) имеет вид  $\mathbf{q}_0 = \{t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}\}$ , т. е.

$$t|_{z=0} = t_0, \quad p_z|_{z=0} = p_{z0}, \quad \mathbf{r}_\perp|_{z=0} = \mathbf{r}_{\perp 0}, \quad \mathbf{p}_\perp|_{z=0} = \mathbf{p}_{\perp 0}, \quad (1.5.5)$$

а  $t_0$  — есть момент влета (инжекции) частицы в полупространство  $z > 0$ .

Решение системы (1.5.4) при условиях (1.5.5) записывается в форме

$$\begin{aligned} t &= T(z, t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}), \quad p_z = P_z(z, t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}), \\ \mathbf{r}_\perp &= \mathbf{R}_\perp(z, t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}), \quad \mathbf{p}_\perp = \mathbf{P}_\perp(z, t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}), \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

а вектор  $\mathbf{Q}$  из общего решения (1.2.10) определяется соотношением  $\mathbf{Q} = \{T, P_z, \mathbf{R}_\perp, \mathbf{P}_\perp\}$ . Начальные данные (1.5.5) выражаются из (1.5.6) по формулам

$$\begin{aligned} t_0 &= T_0(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp), \quad p_{z0} = P_{z0}(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp), \\ \mathbf{r}_{\perp 0} &= \mathbf{R}_{\perp 0}(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp), \quad \mathbf{p}_{\perp 0} = \mathbf{P}_{\perp 0}(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp), \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

при этом вектор  $\mathbf{Q}_0$  из (1.2.11) имеет вид  $\mathbf{Q}_0 = \{T_0, P_{z0}, \mathbf{R}_{\perp 0}, \mathbf{P}_{\perp 0}\}$ . И, наконец, общее решение (1.2.17) в случае граничной задачи (1.5.1)–(1.5.2) определяется выражением

$$\begin{aligned} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) &= f_{\alpha 0}(T_0(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp), P_{z0}(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp), \\ &\quad \mathbf{R}_{\perp 0}(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp), \mathbf{P}_{\perp 0}(z, t, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp)). \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Выражение (1.5.8) построено традиционным методом решения линейных уравнений в частных производных первого порядка — с использованием первых интегралов (1.5.7).

Запишем теперь интеграл по начальным данным для случая, рассматриваемой граничной задачи. Структура векторов  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}$ , и  $\mathbf{Q}$  была

установлена при получении (1.5.3)–(1.5.8). Подстановка их в общее выражение (1.3.1) приводит к следующему результату:

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int dt_0 dp_{z0}, d\mathbf{r}_{\perp 0} d\mathbf{p}_{\perp 0} f_{\alpha 0}(t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, p_{\perp 0}) \times \\ \times \delta(t - T) \delta(p_z - P_z) \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{R}_\perp) \delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{P}_\perp), \quad (1.5.9)$$

где  $T, P_z, \mathbf{R}_\perp$  и  $\mathbf{P}_\perp$  — решения (1.5.6) нормальной системы (1.5.4) с дополнительными условиями (1.5.5) (чтобы сократить запись их аргументы в (1.5.9) опущены). Для того, чтобы функция распределения (1.5.9) действительно являлась решением задачи Коши (1.5.1)–(1.5.2), должны выполняться условия (1.3.12). Проверим это для уравнения Власова в постановке граничной задачи.

Запишем условия (1.3.12) с учетом определений (1.5.3) и (1.2.3) в виде таблицы

1	2	3	4	5	6	7
$v_z$	1	$F_z$	$v_x$	$v_y$	$F_x$	$F_y$
$z$	$t$	$p_z$	$x$	$y$	$p_x$	$p_y$

В первой строке указан номер производной от  $f_\alpha$  в том порядке, как записано в уравнении (1.5.1). Во второй строке приведены коэффициенты при соответствующих производных. В третьей строке выписаны независимые переменные, по которым вычисляются соответствующие производные. Заметим, что  $v_{x,y,z}$  — не независимые переменные, а функции независимых переменных  $p_{x,y,z}$ . Условия (1.3.12) означают, что:

- 1) коэффициент из второй строки в первом столбце зависит только от переменной, находящейся в этом столбце;
- 2) коэффициенты из второй строки таблицы, стоящие в столбцах 2–7, не зависят от переменной, находящейся в том же столбце.

Видно, что не выполнено уже первое условие: коэффициент  $v_z$  от переменной  $z$  как раз не зависит, но зависит от  $p_z$ , а в релятивистском случае — и от  $p_{x,y}$ . Следовательно, в постановке граничной задачи функция распределения в виде интеграла по начальным данным (1.5.9) представлена быть не может. (Единственным исключением из этого правила является не имеющий практического интереса случай, когда  $v_z = \text{const}$ , соответствующий движению нерелятивистских частиц по инерции вдоль оси инжекции.) Убедиться, что (1.5.9) не удовлетворяет уравнению (1.5.1) легко непосредственной подстановкой. Не сохраняются в граничной задаче и якобианы преобразований (1.5.6) и (1.5.7).

Существенное отличие в постановке начальной и граничной задач Коши для уравнения Власова непосредственно видно и из сравнения характеристических систем уравнений (1.4.5) и (1.5.4). Для уравнений (1.5.4) точка  $v_z = 0$  является особой. Обращение же в каких-то точках  $z$  скорости в нуль означает поворот (отражение) в этих точках ча-

стиц в сторону места инъекции. В этих точках преобразования (1.5.6) и (1.5.7) не являются взаимно однозначными. На рис. 1.5.1 представлено характерное поведение решения нормальной системы уравнений в случае начальной задачи — функции  $Z(t, z_0)$  (рис. 1.5.1а) и решения

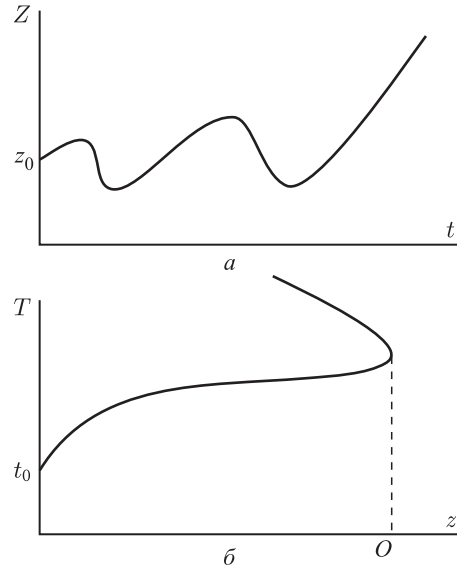


Рис. 1.5.1. Характерное поведение решения нормальной системы для одномерного кинетического уравнения: а — в случае начальной задачи — функция  $Z(t, z_0)$ ; б — в случае граничной задачи — функция  $T(z, t_0)$

нормальной системы уравнений в случае граничной задачи — функции  $T(z, t_0)$  (рис. 1.5.1б). Разница очень значительна. Причем функция  $Z(t, z_0)$  всегда однозначна. Ее неоднозначность (и даже обращение в бесконечность производной) означает нарушение принципа причинности. Для  $T(z, t_0)$  неоднозначность означает только отражение, показанное на рисунке в точке  $O$ . Но даже если исключить появление отраженных частиц, просто не рассматривая соответствующие случаи, якобианы преобразований от  $(t_0, p_{z0})$  к  $(t, p_z)$  и обратно не сохраняются, а функция распределения в граничной задаче в виде интеграла по начальным данным представлена быть не может. Но в важном случае системы частиц, у которых скорость в направлении инъекции достаточно велика и изменяется незначительно, метод интегрирования по начальным данным можно применять (приближенно) и при решении граничной задачи. Это очень существенно, поскольку именно граничная задача представляет основной интерес для приложений.

Итак, пусть все частицы плазмы имеют большую среднюю направленную скорость  $u_0$ , параллельную оси  $z$ . Такая плазма представляет собой пучок, инжектируемый через плоскость  $z = 0$  в полупростран-

ство  $z > 0$ . Предположим, что отклонения скорости частиц от средней скорости  $u_0$ , обусловленные тепловым разбросом и действием силы  $\mathbf{F}$ ,  $\tilde{v}_z = v_z - u_0$  малы, так, что

$$\frac{|\tilde{v}_z|}{u_0} \ll 1. \quad (1.5.10)$$

Такого же порядка малости считаем и отношения  $|v_{x,y}|/u_0$ . Другими словами величины  $\tilde{v}_z, v_{x,y}$  являются малыми возмущениями скорости инжекции  $u_0$ . В нерелятивистском случае малыми будут и возмущения среднего импульса  $p_0 = m_\alpha u_0$ , с которым осуществляется инжекция. В релятивистском же случае малым возмущениям скорости могут соответствовать значительные изменения импульса.

В первом приближении по параметру (1.5.10) перепишем нормальную систему (1.5.4) в виде

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{u_0} \left(1 - \frac{\tilde{v}_z}{u_0}\right), \quad \frac{dp_z}{dz} = \frac{F_z}{u_0}, \quad \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} = \frac{\mathbf{v}_\perp}{u_0}, \quad \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dz} = \frac{\mathbf{F}_\perp}{u_0}. \quad (1.5.11)$$

С той же точностью переписываем и кинетическое уравнение (1.5.1):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{u_0} \left(1 - \frac{\tilde{v}_z}{u_0}\right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{F_z}{u_0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_z} + \frac{\mathbf{v}_\perp}{u_0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\perp} + \frac{\mathbf{F}_\perp}{u_0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\perp} = 0. \quad (1.5.12)$$

Заметим, что в этих уравнениях  $\tilde{v}_z$  и  $\mathbf{v}_\perp$  — не независимые переменные, а функции независимых переменных  $p_z$  и  $\mathbf{p}_\perp$ . Поэтому для решения нормальной системы (1.5.11) необходимы формулы, задающие связь между данными величинами. Для релятивистского случая эти формулы можно записать в следующем виде:

$$\tilde{v}_z = \frac{cp_z}{\sqrt{m^2c^2 + p_z^2 + p_\perp^2}} - \frac{cp_{z0}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{z0}^2 + p_{\perp0}^2}}, \quad (1.5.13)$$

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{c\mathbf{p}_\perp}{\sqrt{m^2c^2 + p_z^2 + p_\perp^2}},$$

где  $\frac{cp_{z0}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{z0}^2 + p_{\perp0}^2}} = u_0$ . При этом будем предполагать, что изменения поперечных составляющих импульса  $\mathbf{p}_\perp$  также являются столь малыми, чтобы обеспечивалось выполнение неравенства (1.5.10). В нерелятивистском случае можно использовать следующие формулы связи:

$$\tilde{v}_z = \frac{p_z - p_0}{m_\alpha}, \quad \mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{p}_\perp}{m_\alpha}, \quad (1.5.14)$$

а можно записать кинетическое уравнение (1.5.12) через возмущения импульсов, что полностью эквивалентно.

Введем новую переменную  $\tau = z/u_0 - t$ , т.е.  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(z, \tau, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp)$ . Тогда уравнения (1.5.12) и (1.5.11) запишутся в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial z} + \frac{\tilde{v}_z}{u_0^2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \tau} + \frac{F_z}{u_0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_z} + \frac{\mathbf{v}_\perp}{u_0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\perp} + \frac{\mathbf{F}_\perp}{u_0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\perp} = 0, \quad (1.5.15)$$

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{\tilde{v}_z}{u_0^2}, \quad \frac{dp_z}{dz} = \frac{F_z}{u_0}, \quad \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} = \frac{\mathbf{v}_\perp}{u_0}, \quad \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dz} = \frac{\mathbf{F}_\perp}{u_0}, \quad (1.5.16)$$

а дополнительные условия (условия инжекции) к уравнениям (1.5.16) оказываются следующими:

$$\tau|_{z=0} = -t_0, \quad p_z|_{z=0} = p_{z0}, \quad \mathbf{r}_\perp|_{z=0} = \mathbf{r}_{\perp 0}, \quad \mathbf{p}_\perp|_{z=0} = \mathbf{p}_{\perp 0}. \quad (1.5.17)$$

Уравнения (1.5.15) и (1.5.16) только обозначениями отличаются от рассмотренных ранее уравнений начальной задачи (1.4.1) и (1.4.5). Поэтому, по аналогии с (1.4.10), решение кинетического уравнения (1.5.15) в задаче с граничными условиями запишем как

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_\alpha(z, \tau, p_z, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp) = \int dt_0 dp_{z0} d\mathbf{r}_{\perp 0} d\mathbf{p}_{\perp 0} \times \\ \times f_{\alpha 0}(t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}) \delta(\tau - T) \delta(p_z - P_z) \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{R}_\perp) \delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{P}_\perp), \quad (1.5.18)$$

где

$$\tau = T(z, t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}), \quad p_z = P_z(z, t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}), \\ \mathbf{r}_\perp = \mathbf{R}_\perp(z, t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}), \quad \mathbf{p}_\perp = \mathbf{P}_\perp(z, t_0, p_{z0}, \mathbf{r}_{\perp 0}, \mathbf{p}_{\perp 0}) \quad (1.5.19)$$

— решение нормальной системы (1.5.16) с граничными условиями инжекции (1.5.17). Итак, в условиях (1.5.10) граничная задача математически эквивалентна начальной задаче.

Все отмеченные в данном параграфе особенности решения граничных задач Коши для уравнения Власова проиллюстрированы в примере 3, приведенном в разд. 1.7.

## 1.6. Метод интегрирования по начальным данным и неоднородные кинетические уравнения

В теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка разработаны методы решения и неоднородных линейных уравнений вида

$$Y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + Y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, f). \quad (1.6.1)$$

Решение уравнения (1.6.1) ищется в неявной форме

$$V(x_1, \dots, x_n, f) = 0, \quad (1.6.2)$$

и поскольку из (1.6.2) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial V / \partial x_i}{\partial V / \partial f} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.6.3)$$

то при подстановке (1.6.3) в (1.6.1) это уравнение приводится к однородному линейному уравнению относительно  $V$ :

$$Y_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + Y_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial f} = 0, \quad (1.6.4)$$

которое решается по рассмотренной ранее схеме. А именно, составляется соответствующая (1.6.4) характеристическая система уравнений, например, в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{Y_1} = \frac{dx_2}{Y_2} = \dots = \frac{dx_n}{Y_n} = \frac{df}{R}, \quad (1.6.5)$$

находится  $n$  независимых первых интегралов этой системы, которые подставляются в произвольную дифференцируемую функцию. Приравняв эту функцию нулю, мы и получаем общее решение уравнения (1.6.1) в неявном виде. Если же удастся из этого общего решения выразить  $f$ , то мы получим общее решение (1.6.1) в явном виде.

Не рассматривая специально процедуру построения решения задачи Коши для уравнения (1.6.1) проверим лишь условия сохранения яacobiana и, соответственно, возможности представления решения задачи Коши в виде интеграла по начальным данным. Эти условия по аналогии с (1.3.12) запишутся в данном случае в виде

$$Y_1 = Y_1(x_1); \quad \frac{\partial Y_k}{\partial x_k} = 0 \text{ при } k = 2, 3, \dots, n; \quad \frac{\partial R}{\partial f} = 0 \quad (1.6.6)$$

(за независимую переменную, как и прежде, выбрана  $x_1$ ).

Из этих условий наиболее важным является последнее, согласно которому функция, стоящая в правой части (1.6.1), не должна зависеть от  $f$ . Важность этого условия обусловлена тем, что неоднородное кинетическое уравнение, записанное для одночастичной функции распределения

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = I_{\text{ст}}(f), \quad (1.6.7)$$

содержит в правой части интеграл столкновений, описывающий изменение функции распределения вследствие столкновений частиц. Эти интегралы являются функциями  $f$ . Например, в простейшем случае  $\tau$ -приближения

$$I_{\text{ст}}(f) = \frac{f - f_0}{\tau}. \quad (1.6.8)$$

Поскольку физический смысл интегралов столкновения заключается в описании процессов релаксации, то фазовый объем (якобиан) при таких процессах не сохраняется, а, следовательно, и невозможно представление функции распределения в виде интеграла по начальным данным, о чем уже говорилось в § 1.4.

### 1.7. Примеры решения начальных и граничных задач для уравнения Власова методом интегрирования по начальным данным

**Пример 1.** В случае одномерной плазмы, функция распределения которой не зависит от координат  $x$  и  $y$ , находящейся под действием силы вида  $\mathbf{F} = (0, 0, F)$ , уравнение Власова и начальное условие

записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} + F(t, z) \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_z} &= 0, \\ f_\alpha(0, z, p_z) &= f_{\alpha 0}(z, p_z). \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Соответствующая нормальная система (1.4.5) с дополнительными условиями (1.4.6) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v_z, \quad \frac{dp_z}{dt} = F, \\ z|_{t=0} &= z_0, \quad p_z|_{t=0} = p_{z0}. \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

В простейшем случае постоянной силы,  $F = F_0 = \text{const}$ , решение нормальной системы уравнений (1.7.2) имеет вид

$$\begin{aligned} z = Z(t, z_0, p_{z0}) &= z_0 + \frac{c}{F_0} \left( \sqrt{m_\alpha^2 c^2 + (F_0 t + p_{z0})^2} - \sqrt{m_\alpha^2 c^2 + p_{z0}^2} \right), \\ p_z = P_z(t, z_0, p_{z0}) &= p_{z0} + F_0 t. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Эти формулы являются конкретным примером (1.4.7). Пример формул (1.4.8) получим, выражая из (1.7.3) постоянные  $z_0$  и  $p_{z0}$ :

$$\begin{aligned} z_0 = Z_0(t, z, p_z) &= z + \frac{c}{F_0} \left( \sqrt{m_\alpha^2 c^2 + (p_z - F_0 t)^2} - \sqrt{m_\alpha^2 c^2 + p_z^2} \right), \\ p_{z0} = P_{z0}(t, z, p_z) &= p_z - F_0 t. \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

Подставляя интегралы движения (1.7.4) в общее решение начальной задачи для уравнения Власова (1.4.9), получим решение задачи (1.7.1)

$$\begin{aligned} f_\alpha(t, z, p_z) &= f_{\alpha 0}(Z_0(t, z, p_z), P_{z0}(t, z, p_z)) = \\ &= f_{\alpha 0} \left( z + \frac{c}{F_0} \left( \sqrt{m_\alpha^2 c^2 + (p_z - F_0 t)^2} - \sqrt{m_\alpha^2 c^2 + p_z^2} \right), p_z - F_0 t \right). \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Прямой подстановкой легко убедиться, что функция (1.7.5) удовлетворяет кинетическому уравнению и начальному условию (1.7.1).

Покажем, как то же решение получается методом интегрирования по начальным данным. Для этого в одномерный вариант общей формулы (1.4.10)

$$\begin{aligned} f_\alpha(t, z, p_z) &= \iint dz_0 dp_{z0} f_{\alpha 0}(z_0, p_{z0}) \delta(z - Z(t, z_0, p_{z0})) \times \\ &\quad \times \delta(p_z - P_z(t, z_0, p_{z0})) \end{aligned} \quad (1.7.6)$$



следует подставить выражения (1.7.3) и выполнить интегрирование. Выполняя сначала интегрирование по  $z_0$ , будем иметь

$$f_\alpha(t, z, p_z) = \int dp_{z0} f_{\alpha 0} \left( z - \frac{c}{F_0} \left( \sqrt{m_\alpha^2 c^2 + (p_{z0} + F_0 t)^2} - \sqrt{m_\alpha^2 c^2 + p_{z0}^2} \right), p_{z0} \right) \times \delta(p_z - p_{z0} - F_0 t), \quad (1.7.7)$$

окончательное интегрирование по  $p_{z0}$  приводит в точности к (1.7.5).

**Пример 2.** В качестве следующего примера рассмотрим опять одномерную плазму, но при наличии силы, соответствующей одиночной потенциальной яме, типа  $F = -m_\alpha \omega^2 z$ , где  $\omega$  — заданная величина. Для простоты ограничимся нерелятивистским случаем. Решение характеристической системы (1.7.2) при этом запишется в виде

$$\begin{aligned} z &= Z(t, z_0, p_{z0}) = z_0 \cos \omega t + \frac{p_{z0}}{m_\alpha \omega} \sin \omega t, \\ p_z &= P_z(t, z_0, p_{z0}) = p_{z0} \cos \omega t - m_\alpha \omega z_0 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

Эти соотношения дают конкретный вид формул (1.4.7). Выражая отсюда постоянные интегрирования и, получим конкретный вид соотношений (1.4.8)

$$\begin{aligned} z_0 &= Z_0(t, z, p_z) = z \cos \omega t - \frac{p_z}{m_\alpha \omega} \sin \omega t, \\ p_{z0} &= P_{z0}(t, z, p_z) = p_z \cos \omega t + m_\alpha \omega z \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

подставляя которые в общее решение (1.4.9), получим выражение для функции распределения рассматриваемой плазмы

$$\begin{aligned} f_\alpha(t, z, p_z) &= f_{\alpha 0}(Z_0(t, z, p_z), P_{z0}(t, z, p_z)) = \\ &= f_{\alpha 0} \left( z \cos \omega t - \frac{p_z}{m_\alpha \omega} \sin \omega t, p_z \cos \omega t + m_\alpha \omega z \sin \omega t \right). \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

Распределение (1.7.10) для системы частиц (а это, очевидно — гармонические осцилляторы) в потенциальной яме является самым общим. Можно из (1.7.10) сформировать более простую, но и более важную функцию распределения. Действительно, из (1.7.9) видно, что имеет место соотношение

$$m_\alpha^2 \omega^2 z_0^2 + p_{z0}^2 = m_\alpha^2 \omega^2 z^2 + p_z^2. \quad (1.7.11)$$

Поэтому стационарная функция распределения вида

$$f_\alpha(z, p_z) = f_{\alpha 0} \left( p_z^2 + m_\alpha^2 \omega^2 z^2 \right) \quad (1.7.12)$$

также является решением кинетического уравнения (1.7.1) с  $F = -m_\alpha \omega^2 z$ . Распределение (1.7.12) является частным случаем распределения Максвелла–Больцмана

$$f_\alpha(z, p_z) = \Phi \left( \frac{p_z^2}{2m_\alpha} + U(z) \right) \quad (1.7.13)$$

в поле с потенциалом  $U(z) = m\omega^2 z^2/2$ .

Получим теперь решение (1.7.10) методом интегрирования по начальным данным. После подстановки (1.7.8) в правую часть (1.7.7) имеем

$$\int \int dz_0 dp_{z0} f_{\alpha 0}(z_0, p_{z0}) \delta\left(z - z_0 \cos \omega t - \frac{p_{z0}}{m_\alpha \omega} \sin \omega t\right) \times \\ \times \delta(p_z - p_{z0} \cos \omega t + m_\alpha \omega z_0 \sin \omega t). \quad (1.7.14)$$

Используя известные свойства дельта-функции

$$\delta(\beta z) = |\beta|^{-1} \delta(z) \text{ и } \int \delta(z - a) \delta(z - b) dz = \delta(a - b),$$

выполним в (1.7.14) сначала интегрирование по  $z_0$ . В результате получим

$$\frac{1}{|\cos \omega t|} \int dp_{z0} f_{\alpha 0}\left(\frac{z}{\cos \omega t} - \frac{p_{z0} \sin \omega t}{m_\alpha \omega \cos \omega t}, p_{z0}\right) \times \\ \times \delta\left(p_z - \frac{p_{z0}}{\cos \omega t} + m_\alpha \omega z \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t}\right). \quad (1.7.15)$$

Заключительное интегрирование по  $p_{z0}$  осуществляется с помощью первого из приведенных выше свойств дельта-функции и дает результат, стоящий в правой части (1.7.10).

**Пример 3.** Рассмотрим снова одномерную плазму, находящуюся в поле постоянной силы  $\mathbf{F} = \{0, 0, F_0\}$  (см. пример 1), но теперь в постановке граничной задачи. Для простоты ограничимся нерелятивистским случаем. Решение (1.5.6) нормальной системы (1.5.4) для этого случая оказывается следующим ( $z \geq 0$ ):

$$p_z = P_z(z, t_0, p_{z0}) = \sqrt{2m_\alpha F_0 z + p_{z0}^2}, \\ t = T(z, t_0, p_{z0}) = (F_0)^{-1} \left( \sqrt{p_{z0}^2 + 2m_\alpha F_0 z} - p_{z0} \right) + t_0. \quad (1.7.16)$$

Выражая отсюда константы интегрирования  $t_0$  и  $p_{z0}$ , имеем функции (1.5.7) в виде

$$p_{z0} = P_{z0}(z, t, p_z) = \sqrt{p_z^2 - 2m_\alpha F_0 z}, \\ t_0 = T_0(z, t, p_z) = t + (F_0)^{-1} \left( \sqrt{p_z^2 - 2m_\alpha F_0 z} - p_z \right). \quad (1.7.17)$$

Подставляя теперь (1.7.17) в (1.5.8), получим окончательно следующее выражение для функции распределения в задаче с граничными условиями:

$$f_\alpha(t, z, p_z) = f_{\alpha 0}(T_0(z, t, p_z), P_{z0}(z, t, p_z)) = \\ = f_{\alpha 0}\left(t + (F_0)^{-1} \left( \sqrt{p_z^2 - 2m_\alpha F_0 z} - p_z \right), \sqrt{p_z^2 - 2m_\alpha F_0 z}\right). \quad (1.7.18)$$

Рассмотрим теперь возможность получения решения данной задачи методом интегрирования по начальным данным. Непосредственной подстановкой формул (1.7.16) в (1.5.9) можно убедиться, что результат интегрирования отличается от (1.7.18) и уже не будет удовлетворять уравнению Власова. Это обусловлено тем, что в отличие от начальной задачи, аргумент у  $\delta$ -функции  $\delta(p_z - P_z(z, t_0, p_{z0}))$ , где  $P_z(z, t_0, p_{z0})$  определен в (1.7.16), уже не является линейным относительно переменной интегрирования  $p_{z0}$ . Поэтому для проведения интегрирования по  $p_{z0}$  необходимо воспользоваться следующей формулой разложения  $\delta$ -функции:

$$\delta(\varphi(p_{z0})) = \sum_j \frac{\delta(p_{z0} - p_{z0}^{(j)})}{|\varphi'(p_{z0}^{(j)})|},$$

где  $\varphi(p_{z0}) = p_z - P_z(z, t_0, p_{z0})$ , а  $p_{z0}^{(j)}$  — корни уравнения  $\varphi(p_{z0}) = 0$ , что в свою очередь приводит к появлению дополнительного, в сравнении с (1.7.18), множителя  $\frac{p_z}{\sqrt{p_z^2 - 2m_\alpha F_0 z}}$ .

Следовательно, представить решение рассматриваемой граничной задачи в виде интеграла по начальным данным (1.5.9) невозможно, что является серьезным отличием в сравнении с начальной задачей (пример 1). Однако этим отличия двух задач не исчерпываются.

Вычислим якобиан преобразования от переменных  $(t, p_z)$  к переменным  $(t_0, p_{z0})$ . Используя (1.7.16), имеем

$$D(z) = \frac{\partial(t, p_z)}{\partial(t_0, p_{z0})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial t_0} & \frac{\partial T}{\partial p_{z0}} \\ \frac{\partial P_z}{\partial t_0} & \frac{\partial P_z}{\partial p_{z0}} \end{vmatrix} = \frac{p_{z0}}{\sqrt{p_{z0}^2 + 2m_\alpha F_0 z}}. \quad (1.7.19)$$

Здесь  $z$  — произвольное значение пространственной координаты. Заметим, что вычисление якобиана  $D(z)$  можно провести и для более общего, чем при наличии постоянной силы случая. Рассмотрим стационарную одномерную систему, описываемую кинетическим уравнением с независимой от времени потенциальной силой

$$F(z) = -\frac{dU(z)}{dz}, \quad z \geq 0, \quad U(0) = 0. \quad (1.7.20)$$

Решение нормальной системы для этого случая имеет вид

$$\begin{aligned} p_z &= P_z(z, t_0, p_{z0}) = \sqrt{p_{z0}^2 - 2m_\alpha U(z)}, \\ t &= T_0(z, t_0, p_{z0}) = t_0 + m_\alpha \int_0^z dz' (p_{z0}^2 - 2m_\alpha U(z'))^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.7.21)$$

При  $U(z) = -F_0 z$  (1.7.21) переходит в (1.7.16). Подставляя далее (1.7.21) в (1.7.19), получим

$$D(z) = \frac{p_{z0}}{\sqrt{p_{z0}^2 - 2m_\alpha U(z)}}. \quad (1.7.22)$$

Якобиан (1.7.22) обращается в бесконечность в той точке, где скорость  $v_z = p_z/m_\alpha$  (см. (1.7.21)) обращается в нуль. То, что точка  $v_z = 0$  является особой видно и из самих характеристических уравнений (1.5.4). Обращение в каких-то точках  $z$  скорости в нуль означает поворот (отражение) в этих точках частиц в сторону места инжекции. В этих точках преобразования (1.5.6) и (1.5.7) не являются взаимно однозначными.

Рассмотрим теперь возможность построения решения задачи примера 3 в рамках приближения (1.5.10). Решение (1.5.19) уравнений (1.5.16) с условиями (1.5.17) при этом имеет вид (случай опять нерелятивистский)

$$\begin{aligned} p_z &= P_z(z, t_0, p_{z0}) = \frac{F_0}{u_0} z + p_{z0}, \\ \tau &= T(z, t_0, p_{z0}) = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m_\alpha u_0^3} z^2 + \frac{p_{z0} - p_0}{m_\alpha u_0^2} z - t_0. \end{aligned} \quad (1.7.23)$$

Подстановка этих решений в интеграл по начальным данным (1.5.18) приводит к следующей функции распределения:

$$f_\alpha(z, \tau, p_z) = f_{\alpha 0} \left( \frac{p_z - p_0}{m_\alpha u_0^2} z - \frac{1}{2} \frac{F_0}{m_\alpha u_0^3} z^2 - \tau, \quad p_z - \frac{F_0}{u_0} z \right). \quad (1.7.24)$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что (1.7.24) удовлетворяет кинетическому уравнению (1.5.15). Начальные данные (формулы типа (1.5.7)) можно также выразить из (1.7.23) и, подставив их в граничную функцию распределения (1.5.2), снова получить (1.7.24). Наконец, можно разложить точное решение (1.7.18) по малому возмущению импульса  $p_z - p_0$ , и опять будет получено решение (1.7.24).

## 1.8. Многожидкостная гидродинамика и интегрирование по начальным данным

Покажем, как с помощью метода интегрирования по начальным данным получаются уравнения многожидкостной гидродинамики холодной плазмы. При этом для простоты рассмотрим нерелятивистский случай. Будем исходить из выражения для интеграла по начальным данным (1.4.10)

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) \delta(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (1.8.1)$$

Поскольку получение квазигидродинамических уравнений сводится к отысканию замкнутой системы уравнений для моментов функции

распределения заряженных частиц каждого сорта, запишем используемые в дальнейшем моменты нулевого, первого, второго, а также третьего порядков с помощью интеграла (1.8.1)

$$N_\alpha(t, \mathbf{r}) = \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (1.8.2)$$

$$N_\alpha(t, \mathbf{r}) \mathbf{V}_\alpha(t, \mathbf{r}) = \int \mathbf{v} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \int \int \hat{\mathbf{v}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (1.8.3)$$

$$N_\alpha(t, \mathbf{r}) \left( \overline{V^2} \right)_{\alpha ij}(t, \mathbf{r}) = \int v_i v_j f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \int \int \hat{v}_i(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \times \hat{v}_j(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (1.8.4)$$

$$N_\alpha(t, \mathbf{r}) \left( \overline{V^3} \right)_{\alpha ijk}(t, \mathbf{r}) = \int v_i v_j v_k f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \int \int \hat{v}_i(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \times \hat{v}_j(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \hat{v}_k(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (1.8.5)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$  и  $\hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$  — решения системы уравнений

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \hat{\mathbf{v}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} = \mathbf{F} = e_\alpha \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{B}] \right), \quad \hat{\mathbf{p}} = m_\alpha \hat{\mathbf{v}} \quad (1.8.6)$$

при начальных условиях

$$\hat{\mathbf{r}}|_{t=0} = \mathbf{r}_0; \quad \hat{\mathbf{p}}|_{t=0} = \mathbf{p}_0. \quad (1.8.7)$$

Введем, наряду с моментами (1.8.4) и (1.8.5), также и центральные моменты второго и третьего порядков

$$N_\alpha(t, \mathbf{r}) \left( \overline{V^2} \right)_{\alpha ij}(t, \mathbf{r}) = \int \int (\hat{v}_i - V_{\alpha i}) (\hat{v}_j - V_{\alpha j}) f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (1.8.8)$$

$$N_\alpha(t, \mathbf{r}) \left( \overline{V^3} \right)_{\alpha ijk}(t, \mathbf{r}) = \int \int (\hat{v}_i - V_{\alpha i}) (\hat{v}_j - V_{\alpha j}) (\hat{v}_k - V_{\alpha k}) \times f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (1.8.9)$$

Выразим моменты (1.8.4) и (1.8.5) через центральные моменты (1.8.8) и (1.8.9) и произведения моментов низших порядков. Например, учитывая, что центральные моменты первого порядка равны нулю, имеем

$$\begin{aligned} N_\alpha \left( \overline{V^2} \right)_{\alpha ij} &= \int \int (\hat{v}_i - V_{\alpha i} + V_{\alpha i}) (\hat{v}_j - V_{\alpha j} + V_{\alpha j}) f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \times \\ &\times \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 = \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) (\hat{v}_i - V_{\alpha i}) (\hat{v}_j - V_{\alpha j}) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 + \\ &+ \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) V_{\alpha i} \hat{v}_j \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 + \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) (\hat{v}_i - V_{\alpha i}) V_{\alpha j} \times \\ &\times \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 = N_\alpha \left( \overline{V^2} \right)_{\alpha ij} + N_\alpha V_{\alpha j} V_{\alpha i}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$N_\alpha (V^2)_{\alpha ij} = N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} + N_\alpha V_{\alpha i} V_{\alpha j}. \quad (1.8.10)$$

Проводя аналогичные преобразования, из (1.8.5) имеем

$$\begin{aligned} N_\alpha (V^3)_{\alpha ijk} = N_\alpha (\overline{V^3})_{\alpha ijk} + N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} V_k + N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha jk} V_i + \\ + N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ik} V_j + N_\alpha V_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\alpha k}. \end{aligned} \quad (1.8.11)$$

Для вывода уравнения, которому удовлетворяет момент (1.8.2), вычислим его производную по времени

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} = - \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \widehat{\mathbf{v}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \widehat{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (1.8.12)$$

Замечая, что интеграл, стоящий в правой части (1.8.12), может быть получен в результате дифференцирования момента (1.8.3) по координатам

$$(\nabla \cdot N_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \widehat{\mathbf{v}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \widehat{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (1.8.13)$$

складывая (1.8.12) и (1.8.13), получаем уравнение непрерывности (первое уравнение (1.1.15))

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla (N_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = 0. \quad (1.8.14)$$

В выражениях (1.8.12) и (1.8.13) обозначено

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla_j A_j = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ \mathbf{A} \cdot \nabla \delta = A_j \nabla_j \delta = \left( A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta, \end{aligned} \quad (1.8.15)$$

где  $\mathbf{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$  — произвольный вектор,  $\nabla \delta$  — градиент  $\delta$ -функции (дифференцирование производится по координатам радиуса-вектора  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ ), а по дважды повторяющемуся индексу предполагается суммирование.

Для вывода уравнения, которому удовлетворяет момент (1.8.3), вычислим его производную по времени

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N_\alpha V_{\alpha i} = \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \left\{ \delta(\mathbf{r} - \widehat{\mathbf{r}}) \frac{F_i}{m_\alpha} - \widehat{v}_i \widehat{v}_j \nabla_j \delta(\mathbf{r} - \widehat{\mathbf{r}}) \right\} d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 = \\ = \frac{1}{m_\alpha} \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{r} - \widehat{\mathbf{r}}) F_i d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 - \\ - \int \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \widehat{v}_i \widehat{v}_j \nabla_j \delta(\mathbf{r} - \widehat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \end{aligned} \quad (1.8.16)$$

При записи первого интеграла в (1.8.16) было использовано второе уравнение из (1.8.6).

Замечая, что второй интеграл в (1.8.16) может быть получен дифференцированием по координатам момента второго порядка (1.8.4)

$$\nabla_j N_\alpha (V^2)_{\alpha ij} = \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \hat{v}_i \hat{v}_j \nabla_j \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (1.8.17)$$

складывая (1.8.16) и (1.8.17), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} N_\alpha V_{\alpha i} + \nabla_j N_\alpha (V^2)_{\alpha ij} = \frac{1}{m_\alpha} \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) F_i \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (1.8.18)$$

Выражение  $\nabla_j N_\alpha (V^2)_{\alpha ij}$  в (1.8.17) представляет собой дивергенцию тензора  $N_\alpha (V^2)_{\alpha ij}$

$$\nabla_j N_\alpha (V^2)_{\alpha ij} = \frac{\partial N_\alpha (V^2)_{\alpha ij}}{\partial x_j}, \quad (1.8.19)$$

результатом вычисления которой является вектор, компонента которого и входит в (1.8.18).

Преобразуем левую часть в (1.8.18), подставив в нее вместо тензора  $N_\alpha (V^2)_{\alpha ij}$  выражение (1.8.10) и производя соответствующие дифференцирования. С учетом уравнения непрерывности (1.8.14) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N_\alpha V_{\alpha i} + \nabla_j N_\alpha (V^2)_{\alpha ij} &= \\ &= N_\alpha \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial t} + V_{\alpha i} \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla_j N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} + \nabla_j N_\alpha V_{\alpha j} V_{\alpha i} = \\ &= N_\alpha \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial t} + V_{\alpha i} \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla_j N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} + V_{\alpha i} \nabla_j N_\alpha V_{\alpha j} + N_\alpha V_{\alpha j} \nabla_j V_{\alpha i} = \\ &= N_\alpha \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial t} + \nabla_j N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} + N_\alpha V_{\alpha j} \nabla_j V_{\alpha i}. \end{aligned} \quad (1.8.20)$$

Подставляя далее (1.8.20) в (1.8.18) и деля обе части этого уравнения на  $N_\alpha$ , получаем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial t} + V_{\alpha j} \nabla_j V_{\alpha i} + \frac{1}{N_\alpha} \frac{1}{m_\alpha} \nabla_j \Pi_{\alpha ij} = \frac{1}{m_\alpha} F_i, \quad (1.8.21)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha ij} &= m_\alpha N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} = \\ &= m_\alpha \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) (\hat{v}_i - V_{\alpha i}) (\hat{v}_j - V_{\alpha j}) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \end{aligned} \quad (1.8.22)$$

или в векторном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{\alpha j} &= m_\alpha \mathbf{e}_i N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} = \\ &= m_\alpha \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{V}_\alpha) (\hat{v}_j - V_{\alpha j}) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \end{aligned} \quad (1.8.22a)$$

Формулы (1.8.22) определяют тензор давления (см. (1.1.16)).

Уравнение (1.8.21) также можно записать в векторном виде: домножая левую и правую части (1.8.21) на орты  $\mathbf{e}_i$  ( $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ ) и суммируя по индексу  $i$ , находим

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{V}_\alpha + \frac{1}{N_\alpha} \frac{1}{m_\alpha} \nabla_j \Pi_{\alpha j} = \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}. \quad (1.8.23)$$

Здесь

$$\mathbf{F} = e_\alpha \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha, \mathbf{B}] \right). \quad (1.8.24)$$

Очевидно, что уравнение (1.8.23) является нерелятивистской формой второго уравнения (1.1.15).

Получим еще уравнение, которому удовлетворяет тензор давления  $\Pi_{\alpha j}$ . Для вывода этого уравнения вычислим производную по времени момента (1.8.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N_\alpha (V^2)_{\alpha ij} &= \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \left( \hat{v}_i \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial t} + \hat{v}_j \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial t} \right) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0 - \\ &- \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \hat{v}_i \hat{v}_j \hat{v}_k \nabla_k \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \end{aligned} \quad (1.8.25)$$

Второй интеграл в (1.8.25) может быть получен дифференцированием по координатам момента третьего порядка (1.8.5)

$$\nabla_k N_\alpha (V^3)_{\alpha ijk} = \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \hat{v}_i \hat{v}_j \hat{v}_k \nabla_k \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (1.8.26)$$

Здесь  $\nabla_k N_\alpha (V^3)_{\alpha ijk}$  представляет собой дивергенцию тензора третьего ранга  $N_\alpha (V^3)_{\alpha ijk}$ , результатом вычисления которой является тензор второго ранга (аналогично (1.8.19)).

Складывая (1.8.25) и (1.8.26), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N_\alpha (V^2)_{\alpha ij} + \nabla_k N_\alpha (V^3)_{\alpha ijk} &= \\ &= \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \left( \hat{v}_i \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial t} + \hat{v}_j \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial t} \right) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \end{aligned} \quad (1.8.27)$$

Заменим далее моменты  $N_\alpha (V^2)_{\alpha ij}$  и  $N_\alpha (V^3)_{\alpha ijk}$  через центральные моменты, используя (1.8.10) и (1.8.11), что дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} + N_\alpha V_{\alpha j} V_{\alpha i} \right) + \nabla_k \left( N_\alpha (\overline{V^3})_{\alpha ijk} + N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ij} V_{\alpha k} + \right. \\ \left. + N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha ik} V_{\alpha j} + N_\alpha (\overline{V^2})_{\alpha jk} V_{\alpha i} + N_\alpha V_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\alpha k} \right) &= \\ &= \iint f_{\alpha 0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \left( \hat{v}_i \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial t} + \hat{v}_j \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial t} \right) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \end{aligned} \quad (1.8.28)$$