В.М. АЛЕКСЕЕВ, В.М. ТИХОМИРОВ,
С.В. ФОМИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Рекомендовано Учебно-методическим Советом по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по группе математических направлений и специальностей

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2011

УДК 517.5, 517.97
ББК 22.15, 22.161.8
А 47

Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. **Оптимальное управление.** — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с. — ISBN 5-9221-0589-2.

Книга посвящена важнейшим проблемам теории экстремума — математическому программированию, вариационному исчислению и оптимальному управлению. Главное внимание уделено принципу Лагранжа для необходимых условий, а также достаточным условиям, выпуклым задачам, гамильтонову формализму. Обсуждаются многие задачи, которые ставились и исследовались на протяжении всей истории теории экстремума. Материал книги основан на опыте преподавания теории экстремальных задач на механико-математическом факультете МГУ, и он может служить учебным пособием по многим различным курсам оптимизации.

Для студентов университетов, аспирантов, преподавателей и научных работников в области математики и её приложений.

Учебное издание

АЛЕКСЕЕВ Владимир Михайлович
ТИХОМИРОВ Владимир Михайлович
ФОМИН Сергей Васильевич

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Оригинал-макет *А.М. Садовский*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 03.08.05. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,5. Уч.-изд. л. 26,9. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

ISBN 5-9221-0589-2

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс: (8172) 72-60-72
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

9 785922 105897

ISBN 5-9221-0589-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию

Первое издание книги вышло в 1979 году. 1 декабря 1980 года завершился жизненный путь Владимира Михайловича Алексеева — замечательного человека, выдающегося математика, педагога и просветителя. Готовя книгу к переизданию в серии «Классический университетский учебник» я ограничился только несколькими исправлениями, не желая менять что-либо существенное в тексте, подготовленном в окончательном виде В. М. Алексеевым со свойственной ему тщательностью. Но при этом я добавил восьмистраничное дополнение ко введению, где прослежен путь от Ферма до Понтрягина в области необходимых условий экстремума, требующий для своего преодоления знания математического анализа в объёме лишь инженерного или экономического вуза.

В. М. Тихомиров

Предисловие

Одной из характерных особенностей современной эпохи является все возрастающее внимание к проблемам управления. Как никогда прежде ощущается потребность в плодотворном и эффективном использовании природных богатств, огромных людских ресурсов, материальных и технических средств. Говоря о наиболее приметных явлениях научно-технического прогресса в XX веке, обычно называют расщепление атома, первые шаги к освоению космоса, создание компьютеров и новых информационных технологий. На этом фоне теория управления выглядит пока менее эффектно, хотя в развитии современной цивилизации она уже играет выдающуюся роль и есть основание думать, что в будущем эта роль станет еще значительней.

Всюду, где имеется возможность активного участия человека, возникает проблема отыскания наилучшего, или, как говорят, *оптимального*, из возможных управлений. Вызванные к жизни потребностями экономики и техники оптимизационные проблемы потребовали в свою очередь создания новых разделов математики.

В 40-х годах исследование задач экономики породило новое направление анализа, получившее название линейного и выпуклого программирования. В те же годы приобрели актуальность задачи управления летательными аппаратами и технологическими процессами сложной структуры. Соответствующая математическая теория была создана в середине пятидесятых годов и получила название теории оптимального управления. Выдающуюся роль сыграл в этом принцип максимума Понтрягина. В теории оптимального управления произошел синтез идей и методов исследования, с одной стороны восходящих к классикам вариационного исчисления, а с другой — вполне современных. Ее развитие самым существенным образом связано с именами отечественных математиков.

Эта книга задумана как учебное пособие по различным курсам оптимизации, читаемым в университетах и вузах с повышенной математической подготовкой. Расскажем вкратце об общем замысле и плане книги.

История исследования задач на экстремум, или, как сейчас обычно говорят, «экстремальных задач», началась не в наши дни —

в той или иной мере такие задачи всегда привлекали внимание математиков. Мы хотели раскрыть перед читателями с самой разной предварительной подготовкой эту связь времен и неразрывность научной дороги. Это сделано в первой главе, рассчитанной на широкую аудиторию. Хотя используемый здесь математический аппарат минимален, мы старались выдержать стиль точного математического текста, ограничиваясь наиболее выразительными, но элементарными фрагментами истории изучения экстремальных задач. Наша цель — связать воедино первоначальные замыслы И. Кеплера и П. Ферма, задачи, поставленные Х. Гюйгенсом, И. Ньютоном и И. Бернулли, идеи и методы Ж. Лагранжа, Л. Эйлера и К. Вейерштрасса с современным этапом теории, непосредственно продолжающей исследования великих предшественников. Кроме того, в первой главе описаны методы решения конкретных задач и приведены примеры решения на базе единой идеологии задач, поставленных в разные времена учеными разных направлений.

Остальная часть книги адресована по преимуществу математикам. Возникновение новой теории стимулировало развитие и старых, и новых разделов математического анализа. Не все эти разделы должным образом представлены в современном математическом образовании.

Нам кажется, что фрагмент классического анализа, объединенный вокруг темы «неявная функция», играет ныне исключительную роль во всех аспектах конечномерного и бесконечномерного анализа. То же самое можно сказать и об основах выпуклого анализа. Наконец, для теории оптимального управления существенно, что основные факты теории дифференциальных уравнений остаются верными и для уравнений с разрывными правыми частями.

Названные выше три раздела анализа и геометрии излагаются во второй главе.

Изложение теории собственно экстремальных задач представлено в третьей и четвертой главах. Их главную часть составляет содержание обязательного полугодового курса, читавшегося авторами на механико-математическом факультете МГУ. Текст препарирован так, что доказательства основных теорем занимают не больше одной лекции. Всюду выдержан принцип полноты изложения. Мы старались везде избежать пропусков, ссылок на очевидность и т. д.

Некоторые стандартные обозначения (из теории множеств, функционального анализа и т. п.) употребляются в тексте без пояснений. Поэтому для облегчения ориентировки читателей в конце книги приведен список основных обозначений с краткой их расшифровкой.

Параграфы, номера которых отмечены в тексте и в оглавлении звездочкой, призваны подвести читателя к современным методам теории экстремальных задач. Здесь изложение более соответствует монографическому стилю, допускаются отдельные, правда, минимальные, ссылки на теоремы, хотя и ставшие классическими, но находящиеся пока за пределами традиционных программ. Эти параграфы написаны на основе специальных курсов «Выпуклый анализ», «Дополнительные главы теории экстремальных задач» и других, также читавшихся на механико-математическом факультете МГУ в течение ряда лет.

Более подробно о содержании читатель может узнать из оглавления, где выделены и названы все важнейшие результаты и факты, нашедшие отражение в книге.

Из сказанного следует, что мы рассчитываем на разную читательскую аудиторию: прежде всего — на студентов университетов и вузов с повышенным математическим курсом, но также и на инженеров, экономистов и математиков, сталкивающихся с необходимостью решать различные экстремальные задачи. Для этих читателей написано введение, а для тех, кто интересуется теорией экстремальных задач более серьезно, в конце помещен путеводитель по литературе — монографической и обзорной.

В постановке и лекционной разработке на механико-математическом факультете МГУ курса «Оптимальное управление» очень большая заслуга принадлежит Сергею Васильевичу Фомину; по его же инициативе создана и настоящая книга. В ней использован первоначальный конспект лекций, написанный С. В. Фоминым совместно с В. М. Тихомировым. Безвременная кончина Сергея Васильевича в расцвете сил и таланта не дала ему возможности увидеть завершение своих замыслов.

Мы выражаем свою искреннюю признательность коллективу кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ, принимавшему активное участие в обсуждении как методики преподавания курса «Оптимальное управление», так и характера изложения отдельных затрагиваемых в книге вопросов.

Мы считаем своим обязательным долгом отметить, что на формирование математических концепций, положенных в основу этой книги, значительное влияние оказала творческая деятельность А. А. Милютина.

Мы благодарны А. И. Маркушевичу за ценные консультации, а также А. П. Буслаеву и Г. Г. Магарил-Ильяеву, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд весьма полезных замечаний.

В. М. Алексеев,
В. М. Тихомиров

PS. Считаю своим долгом сказать здесь о двух людях, упомянутых выше. Алексей Алексеевич Милютин (1925–2000) был нашим учителем в теории оптимального управления. Он впервые прочитал курс «Оптимальное управление» на мех-мате МГУ. Алексей Иванович Маркушевич (1908–1981) предоставил нам экземпляр из своей библиотеки великого труда Ньютона, что оказалось весьма важным для понимания истоков оптимального управления.

В. М. Тихомиров

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Как возникают экстремальные задачи?

Людям свойственно стремление к лучшему, и если им приходится выбирать из нескольких возможностей, то желание найти среди них оптимальную представляется вполне естественным.

Слово «оптимальный» происходит от латинского optimus, что значит — наилучший, совершенный. Для того чтобы найти оптимальную из возможностей, приходится решать задачи на отыскание *максимума* или *минимума*, т. е. наибольших и наименьших значений каких-то величин. Оба эти понятия — максимум и минимум — объединяются термином экстремум (от латинского extremum, означающего «крайнее»). Поэтому задачи на отыскание максимума или минимума называют *экстремальными задачами*.

Методы решения и исследования различного рода экстремальных задач составляют специальные разделы математического анализа. Почти тот же смысл вкладывается в понятие «задача оптимизации»; в котором более отчетливо прослеживается связь с практическими применениями математики.

Цель этой книги — познакомить читателя с теорией и приемами решения экстремальных задач. Но прежде чем переходить к формальному, логически последовательному изложению этой ветви математики, мы хотим обратиться к прошлому, чтобы лучше понять причины, побуждающие ставить и решать экстремальные задачи в их прикладном аспекте, т. е. как задачи оптимизации.

Mercatique solum, facti
de nomine Byrsam
Taurino quantum possent
circumdare tergo.
P. Vergilius Maro «Aeneas» [1)]

1.1.1. Классическая изопериметрическая задача. Задача Дидоны. Задачи отыскания наибольших и наименьших величин впервые были поставлены античной наукой. Древнейшей из известных

[1)] Столько купили земли и дали ей имя Бирса, сколько смогли окружить бычьей шкурой. (*П. Вергилий Марон* «Энеида».)

экстремальных задач является, пожалуй, классическая изопериметрическая задача. Трудно сказать, когда впервые была высказана мысль о наибольшей «вместимости» окружности и сферы среди всех замкнутых кривых одной и той же длины или поверхностей одной и той же площади. Один из последних учеников афинской школы платоников Симплиций (VI в. н. э.), составивший незадолго до окончательного краха античной цивилизации обширный комментарий к трудам Аристотеля (IV в. до н. э.), пишет: «Доказано до Аристотеля, ибо он пользуется этим, как известным, а затем более полно — Архимедом и Зенодором, что среди изопериметрических фигур наиболее вместимым является круг, а среди изопифанных — шар». В этих словах обозначена постановка следующих экстремальных задач: *среди плоских замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую наибольшую площадь, и среди пространственных замкнутых поверхностей, имеющих заданную площадь, найти поверхность, охватывающую наибольший объем*. Для философа-платоника такая постановка задачи естественна и связана с поисками идеальных форм. Недаром круг и шар были в древности символами геометрического совершенства.

Более прозаическую мотивировку той же изопериметрической задачи и ряда близких к ней задач мы находим, пусть даже в несколько наивной, но достаточно отчетливой форме в легенде о Дидоне. Напомним ее, следуя «Энеиде» римского поэта Вергилия, две строки которого приведены выше в качестве эпиграфа.

Финикийская царевна Дидона и с ней небольшой отряд жителей города Тира, спасаясь от преследований тирана — брата Дидоны, покинули родной город и в поисках счастья отправились на кораблях на запад вдоль берегов Средиземного моря. Выбрав на африканском побережье (нынешний Тунисский залив) удобное место, Дидона и ее спутники решили основать здесь поселение. По-видимому, эта идея не вызвала энтузиазма у местных жителей, но все же Дидоне удалось уговорить их предводителя Ярба, и он неосторожно согласился уступить Дидоне клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Не сразу понял простодушный Ярб хитрый замысел финикиянки. Разрезав шкуру на тонкие полоски, Дидона связала их в один длинный ремень и окружила им значительную территорию. На этой территории она заложила город Карфаген [1]. В память об этой истории карфагенская цитадель получила название Бирса [2]. Все эти события легенда относит к 825 (или к 814) г. до н. э.

Анализируя ситуацию, мы обнаруживаем несколько возможностей поставить здесь задачу оптимизации.

[1] Финикийское Картадашт — новый город.

[2] На языке пунийцев (так римляне называли жителей Карфагена) — шкура. Это название употребляется до сих пор.

А) Требуется указать оптимальную форму участка земли, который при заданной длине периметра L имеет наибольшую площадь S.

Ясно, что это та же самая классическая изопериметрическая задача [1]. Ее решением является круг.

Упражнение. Считая бычью шкуру прямоугольником 1 м $\times$ 2 м и приняв ширину ремешка равной 2 мм, найдите L и максимальное S.

(Авторам не удалось найти точные размеры Бирсы. Расположенная на высоком (63 м) холме, она вряд ли была особенно большой. Для сравнения — длина стен Московского Кремля 2235 м.)

Решение изопериметрической задачи заключено в следующем утверждении.

Если спрямляемая кривая длины L ограничивает плоскую фигуру площади S, то

$$L^2 \geqslant 4\pi S, \tag{1}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда кривая — окружность.

Неравенство (1) называется *изопериметрическим*; его доказательство можно найти в [21].

Б) Другие постановки задачи получаются, если, как это естественно считать, Дидона хотела сохранить выход к морю. В отличие от классической изопериметрической задачи, эти задачи мы будем называть *задачами Дидоны*. Для простоты рассмотрим сначала случай прямолинейного берега (рис. 1).

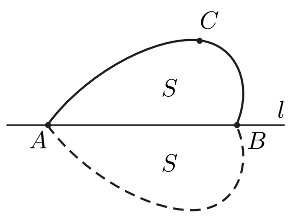

Рис. 1

Первая задача Дидоны. *Среди всех дуг длины L, содержащихся в полуплоскости, ограниченной прямой l и с концами A, $B \in l$, найти такую, которая вместе с отрезком $[AB]$ ограничивает фигуру наибольшей площади S.*

Решение. Пусть ACB — произвольная допустимая дуга с концами A, $B \in l$, ограничивающая фигуру площади S (рис. 1). Отразив ее симметрично относительно l, мы получим замкнутую кривую длины $2L$, ограничивающую фигуру площади $2S$. Согласно изопериметрическому неравенству

$$(2L)^2 \geqslant 4\pi 2S, \tag{2}$$

откуда

$$S \leqslant L^2/(2\pi). \tag{3}$$

[1] Еще одна реальная ситуация, приводящая к той же задаче, описана Л. Н. Толстым в рассказе «Много ли человеку земли нужно». Разбор этого рассказа с точки зрения геометрии см.: *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия. — М.–Л.: Гостехиздат, 1950, — Гл. 12.

Следовательно, максимальным значением S может быть только $L^2/(2\pi)$, и это значение действительно достигается, если ACB — полуокружность, опирающаяся на диаметр $[AB]$. Задача имеет единственное решение с точностью до сдвига отрезка вдоль прямой (почему?).

B) В предыдущей задаче положение концов A и B искомой дуги можно было выбирать на прямой l произвольно. Что произойдет, если эти концы будут заданы?

Вторая задача Дидоны. *Среди всех дуг длины L, лежащих в полуплоскости, ограниченной прямой l, и с заданными концами A, $B \in l$ найти такую, которая вместе с отрезком $[AB]$ ограничивает фигуру наибольшей площади.*

Решение. Ясно, что задача имеет смысл только при $L > \pi|AB|$ (в противном случае либо нет ни одной дуги, удовлетворяющей условиям задачи, либо (при $L = \pi|AB|$) такая дуга только одна — сам отрезок $[AB]$). Естественно ожидать по аналогии с предыдущим, что решением будет дуга окружности, для которой $[AB]$ является хордой. Такая дуга $A\widehat{C}B$ определяется единственным образом. Дополним ее до полной окружности дугой ADB (рис. 2). Длину дуги ADB обозначим λ, а площадь сегмента, ограниченного этой дугой и отрезком $[AB]$, — σ.

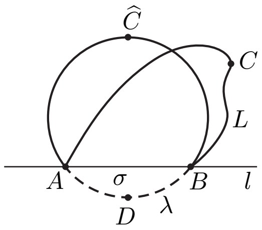

Рис. 2

Пусть теперь ACB — произвольная дуга, удовлетворяющая условиям задачи и ограничивающая вместе с $[AB]$ площадь S. Замкнутая кривая $ACBD$ имеет длину $L + \lambda$ и ограничивает площадь $S + \sigma$. Согласно (1) $4\pi(S + \sigma) \leqslant (L + \lambda)^2$, откуда

$$S \leqslant \frac{1}{4\pi}\,(L + \lambda)^2 - \sigma.$$

Как и в (1), равенство, а значит, и максимальная S достигаются тогда и только тогда, когда кривая $ACBD$ является окружностью, т. е. когда дуги равны: $ACB = A\widehat{C}B$.

Обратим внимание на следующее различие в двух разобранных задачах. В первой задаче Дидоны запас конкурирующих кривых больше, поскольку положение точек A и B не задано. Впрочем, без ограничения общности одну из них, скажем A, можно считать фиксированной. Положение точки B тогда определяется дополнительным условием: $A\widehat{C}B$ не просто дуга окружности, как во второй задаче Дидоны, но это полуокружность. В эквивалентной форме: в своих концах искомая дуга подходит к прямой l под углом 90°. Мы увидим потом, что здесь проявляется общий принцип: предоставляя концам искомой кривой некоторую свободу, мы должны потребовать, чтобы в них выполнялись некоторые условия, называемые *условиями трансверсальности*. Форма же искомой кривой в обеих задачах одинакова, она определяется некоторым уравнением (*уравнением Эйлера*), которое должно выполняться вдоль кривой. В нашем случае во всех точках искомая кривая должна иметь одну и ту же кривизну.

Г) Рассмотрим теперь, что произойдет, если берег не является прямой линией, ограничась случаем фиксированных концов. Легко сообразить, что если между точками A и B берег мало отличается от прямой, то решением остается та же дуга окружности $A\widehat{C}B$, что и раньше.

Предыдущее доказательство применимо полностью, только буквой σ следует обозначать площадь, заштрихованную на рис. 3. Отсюда же видно, что будет в случае, когда между A и B находится глубокий залив. Пусть, например, между A и B берег прямой, но из точки D перпендикулярно AB прорыт канал DC. Считая, что граница города должна проходить по суше, мы видим, что решением задачи будет та же дуга $A\widehat{C}B$, пока точка D остается внутри нее (рис. 4, *а*). Если же канал DC пересек дугу $A\widehat{C}B$, но еще $|AC| + |CB| < L$, решением является кривая, составленная из двух дуг окружностей

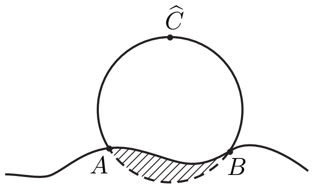

Рис. 3

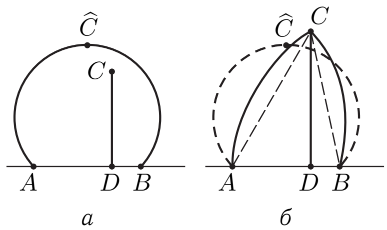

Рис. 4

AC и CB (рис. 4, *б*). В предельном случае $|AC| + |CB| = L$ решением является ломаная ACB, а при $|AC| + |CB| > L$ решение не существует.

Рассмотренный вариант можно было бы назвать *задачей Дидоны с фазовыми ограничениями*.

Д) Наконец, остановимся еще на одном варианте задачи Дидоны. Пусть по каким-то соображениям (например, ввиду запрета жрецов бога Эшмуна, храм которого впоследствии находился в Бирсе) стены города нельзя вести более чем под углом 45° к линии берега, который мы снова предполагаем прямым. Такая задача была бы уже *задачей оптимального управления*. Ее решение можно найти при помощи *принципа максимума Понтрягина*, с которым мы познакомимся ниже. В типичном случае решение выглядит, как на рис. 5. Отрезки AC и BE образуют с линией берега угол 45°, а CDE — дуга окружности.

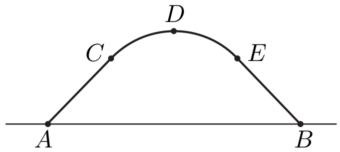

Рис. 5

1.1.2. Другие старинные экстремальные задачи в геометрии. Уделив изопериметрической задаче достаточно много места, мы остановимся на некоторых других экстремальных задачах с геометрическим содержанием, которые рассматривались математиками разных веков. Такие задачи встречаются, в частности, в трудах величайших математиков античности — Евклида, Архимеда и Аполлония.

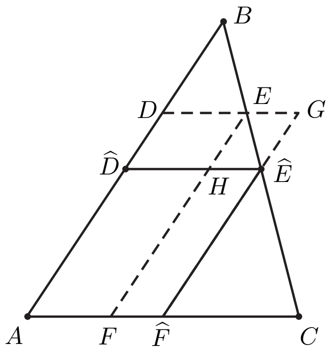

Рис. 6

В «Началах» Евклида (IV в. до н. э.) имеется лишь одна задача на максимум (книга 6, предложение 27). В современной редакции она выглядит так.

Задача Евклида. *В данный треугольник ABC вписать параллелограмм $ADEF$* (рис. 6) *наибольшей площади.*

Решение. У искомого параллелограмма точки $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ и $\widehat{F}$ являются серединами соответствующих сторон данного треугольника. Доказать это можно разными способами. Например, легко показать, что площади параллелограммов $\widehat{D}DG\widehat{E}$ и $FH\widehat{E}\widehat{F}$ одинаковы. Отсюда следует, что площадь параллелограмма $ADEF$ меньше площади параллелограмма $A\widehat{D}\widehat{E}\widehat{F}$, ибо последняя равна площади фигуры $ADG\widehat{E}HF$, содержащей параллелограмм $ADEF$. ■

В дошедших до нас сочинениях Архимеда (III в. до н. э.) изопериметрическая задача не упоминается. Доныне неизвестно, что было сделано Архимедом в этой области, и потому приведенные в п. 1.1.1 слова Симплиция остаются пока загадочными. Решение же одной *изопифанной* (т. е. относящейся к фигурам равной площади) задачи имеется в сочинении Архимеда «О шаре и цилиндре». Там ставится и решается *задача о максимальном объеме, который могут иметь сегменты шаров одинаковой по площади боковой поверхности*.

Ответом в этой задаче является полушар (подобно тому, как полукруг является решением второй задачи Дидоны).

«Коника» или «Конические сечения» — так называется величайшее творение Аполлония (III–II в. до н. э.). К нашей теме относится пятая книга «Конических сечений». Вот что пишет Ван дер Варден: Аполлоний ставит «задачу о том, как провести из одной точки O к коническому сечению самый длинный и самый короткий прямолинейные отрезки. Однако он дает больше, чем обещает: он определяет все проходящие через O прямые, которые пересекают коническое сечение под прямым углом (в настоящее время их называют нормалями), разбирает, при каком положении O задача имеет два, три или четыре решения». Перемещая точку O, он «определяет ординаты граничных точек G_1

и G_2, где число проходящих через O нормалей разом переходит с 2 на 4 и обратно» [1] (рис. 7).

Вместе с гибелью античной цивилизации научная деятельность в Европе замирает примерно до XV века. В XVI в. закладываются основы алгебры и появляются первые экстремальные задачи алгебраического содержания.

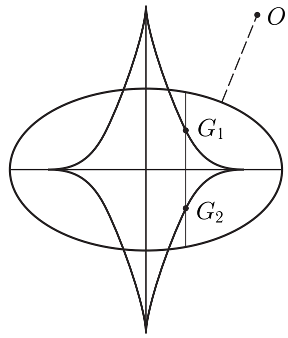

Рис. 7

Вот, например, задача, предлагавшаяся Н. Тартальей (XVI в.): *разделить число восемь на две части так, чтобы произведение произведения этих частей на их разность было максимальным.*

До XVII в. не было выработано никаких общих приемов решения экстремальных задач, и каждая из них решалась специально для нее разработанным приемом. В 1615 г. вышла книга И. Кеплера «Новая стереометрия винных бочек» [2]. Кеплер начинает книгу так. «В тот год, как я женился, урожай винограда был хороший и вино дешево, а потому мне, как хорошему хозяину, следовало запастись вином. Я купил его несколько бочонков. Через некоторое время пришел продавец — измерить вместимость бочонков, чтоб назначить цену за вино. Для этого он опускал в каждый бочонок железный прут, и, не прибегая ни к какому вычислению, немедленно объявлял, сколько в бочке вина». (Этот «метод» мы иллюстрируем на рис. 8.)

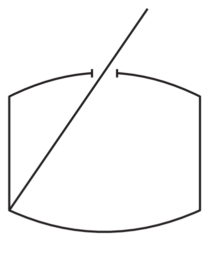

Рис. 8

Кеплер очень удивился. Ему показалось странным, как с помощью одного измерения можно вычислить вместимость бочек разной формы. «Я счел для себя подходящим, — пишет Кеплер, — взять новый предмет математических занятий и исследовать геометрические законы такого удобного измерения, и выяснить его основания». Для разрешения поставленной задачи Кеплер закладывает основания интегрального и дифференциального исчисления и заодно дает первые общие правила решения экстремальных задач. Он пишет (цитируем по книге Е. А. Предтеченского) [3] «Кеплер, его жизнь и научная деятельность»: «Под влиянием благодатного гения, бывшего, без сомнения,

---

[1] Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. — М.: Физматгиз, 1959.

[2] Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. — М.–Л.: ОНТИ–ГТТИ, 1935.

[3] Предтеченский Е. А. Кеплер, его жизнь и научная деятельность. — Петербург: изд. З. И. Гржебина, 1921.

хорошим геометром, бочары стали придавать бочкам ту форму, которая при данной длине линии, измеренной мерщиком, дает возможность судить о наибольшей вместимости бочки, а так как вблизи всякого максимума изменения бывают нечувствительными, то небольшие случайные отклонения не оказывают заметного влияния на емкость».

В выделенных нами словах и заложен тот основной алгоритм нахождения экстремумов, который впоследствии был оформлен в точную теорему сначала (для многочленов) Ферма (1629 г.), а затем — Ньютоном и Лейбницем и получил название *теоремы Ферма*.

Отметим еще, что Кеплер решил несколько конкретных экстремальных задач, в частности задачу *о цилиндре наибольшего объема, вписанном в шар*.

В заключение этого пункта приведем еще одну геометрическую задачу, которой в XVII в. интересовались многие математики (Кавальери, Вивиани, Торичелли, Ферма и др.). В XIX в. ею занимался немецкий геометр Штейнер, и потому эту задачу часто называют *задачей Штейнера* [1].

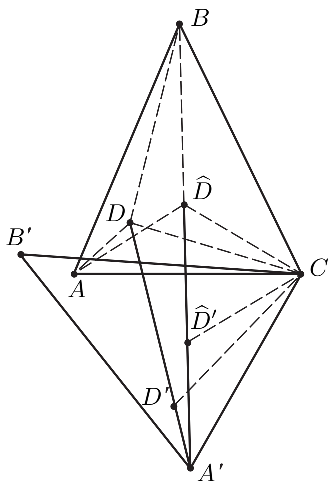

Рис. 9

З а д а ч а Ш т е й н е р а. *В плоскости треугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.*

Р е ш е н и е. Приведем изящное геометрическое решение этой задачи для остроугольного треугольника. Пусть в треугольнике ABC (рис. 9) величина угла $C \geqslant 60°$. Совершим поворот треугольника ABC вокруг точки C на угол $60°$. Получим треугольник $A'B'C$. Возьмем теперь любую точку D в треугольнике ABC, а через D' обозначим образ D при нашем повороте. Тогда сумма длин $|AD| + |BD| + |CD|$ равна длине ломаной $|BD| + |DD'| + |D'A'|$, ибо треугольник CDD' равносторонний и $|D'A'| = |DA|$.

Пусть теперь $\widehat{D}$ — *точка Торичелли*, т. е. точка, из которой все стороны треугольника видны под углом $120°$, и $\widehat{D}'$ — образ $\widehat{D}$ при повороте. Нетрудно понять, что тогда точки B, $\widehat{D}$, $\widehat{D}'$ и A' лежат на одной прямой и, значит, точка Торичелли и является решением задачи. ∎

Мы познакомили читателя с несколькими экстремальными задачами геометрического содержания, поставленными и решенными в раз-

[1] Отметим заодно, что впоследствии подобные задачи стали возникать при строительстве дорог, нефтепроводов и городских коммуникаций.

ные времена. Постановку их лишь частично можно оправдать практическими потребностями — основным стимулом здесь, пожалуй, было желание показать красоту самой геометрии.

1.1.3. Вариационный принцип Ферма и принцип Гюйгенса. Задача о преломлении света. С именем Пьера Ферма связана формулировка первого вариационного принципа для физической проблемы. Речь идет о *вариационном принципе Ферма в геометрической оптике*. Экспериментально закон преломления света был установлен Снеллиусом. Вскоре Декарт дал теоретическое объяснение этого закона. Однако при этом у Декарта получалось, что в более плотной среде (скажем, в воде) скорость распространения света больше, чем в менее плотной (например, в воздухе). Этот факт многим показался сомнительным.

Ферма дал другое объяснение явления. Его основная идея состояла в том, что луч света «избирает» такую траекторию, вдоль которой время, затрачиваемое на преодоление пути от одной точки до другой было бы минимальным (в сравнении с любыми другими траекториями, соединяющими те же точки). В однородной среде, в которой скорость распространения света во всех точках и во всех направлениях одинакова, время, затрачиваемое светом на прохождение некоторой траектории, пропорционально ее длине. Поэтому траектория минимального времени, соединяющая точки A и B — это просто отрезок $[AB]$: в однородной среде свет распространяется прямолинейно.

Вывод закона преломления Снеллиуса из вариационного принципа Ферма сейчас содержится в школьных учебниках (см. также п. 1.6.1).

В основу принципа Ферма положено допущение о том, что свет распространяется по некоторым линиям. Х. Гюйгенсу (1629–1695) принадлежит другое объяснение законов распространения и преломления света, основанное на представлении о свете как о волне, фронт которой движется со временем.

Отвлекаясь от обсуждения физических предпосылок этой идеи, и, в частности, от вопроса о том, что такое свет — волна или поток частиц, дадим следующее, скорее, наглядное, чем строгое, определение.

Волновым фронтом S_t называется множество точек, которых достигает за время t свет, распространяемый некоторым источником S_0.

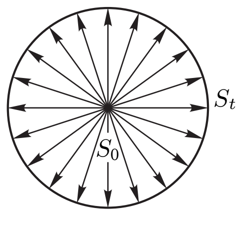

Рис. 10

Если, например, источник S_0 — это точка, а среда однородна, то S_t — это сфера («сферическая волна») радиуса vt с центром в S_0 (рис. 10). С ростом t волновой фронт расширяется равномерно во все стороны со скоростью v. Линии же распространения света образуют пучок лучей (радиусов), ортогональных S_t в каждый момент t. По мере удаления от источника сферическая волна становится все более и более плоской и, если мы вообразим источник бесконечно удаленным, то в пределе волновой фронт оказывается плоскостью, равномерно движущейся со скоростью v и остающейся перпендикулярной пучку лучей света, которые теперь параллельны между собой (рис. 11).

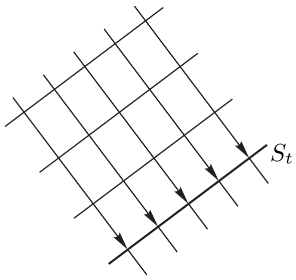

Рис. 11

Для определения движения волнового фронта в более сложных ситуациях Гюйгенс пользуется следующим правилом («*принцип Гюйгенса*»). Каждая точка волнового фронта S_t сама становится вторичным источником, через время Δt мы получаем семейство волновых фронтов от всех этих вторичных источников и истинный волновой фронт $S_{t+\Delta t}$ в момент $t + \Delta t$ есть огибающая этого семейства (рис. 12).

Легко видеть, что распространение света от точечного источника в однородной среде и предельный случай плоской волны удовлетворяют принципу Гюйгенса. В качестве примера применения этого принципа в простейшей неоднородной среде приведем вывод закона Снеллиуса «по Гюйгенсу».

Пусть параллельный пучок световых лучей падает на плоскую границу Σ раздела двух однородных сред; для простоты будем представлять себе, что Σ горизонтальна, а свет падает сверху (рис. 13).

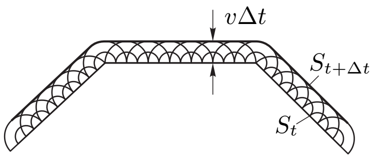

Рис. 12

Через v_1 и v_2 обозначим скорости распространения света над и под Σ и через α_1 и α_2 — углы падения и преломления (отсчитываемые от нормали N к Σ). Волновой фронт A_1A_2A движется со скоростью v_1 и в некоторый момент t свет, вышедший из точки A, достигает границы Σ в точке B. После этого точка B становится вторичным источником сферических волн, распространяющихся в нижней среде со скоростью v_2. В точку C_1 свет придет в момент $t_1 = t + \dfrac{|B_1C_1|}{v_1} = t + |BC_1|\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1}$, а в промежуточную точку $D \in [BC_1]$ — в момент $t_2 = t + |BD|\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1}$. К моменту t_1 сферическая волна от вторичного источника B будет иметь радиус $r_1 = v_2(t_1 - t) = |BC_1|\dfrac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1$, а волна от D — радиус $r_2 = v_2(t_1 - t_2) = |DC_1|\dfrac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1$. Касательные C_1C и C_1C_2 к этим сферам совпадают, поскольку

$$\sin\widehat{BC_1C} = \frac{r_1}{|BC_1|} = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1 = \frac{r_2}{|DC_1|} = \sin\widehat{DC_1C_2}.$$

Точка D были взята на BC_1 произвольно, и, следовательно, вторичные волны в момент t_1 имеют огибающей прямую CC_1, образующую с Σ угол α_2 такой, что $\sin\alpha_2 = \dfrac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1$. А это и есть закон Снеллиуса

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Принципы Гюйгенса и Ферма тесно связаны между собой. В самом деле, пусть нам известно положение волнового фронта S_t в некоторый момент t. Где он будет находиться через некоторое время Δt? Возьмем точку $C \in S_{t+\Delta t}$ (рис. 14). По определению существует $A \in S_0$ и путь

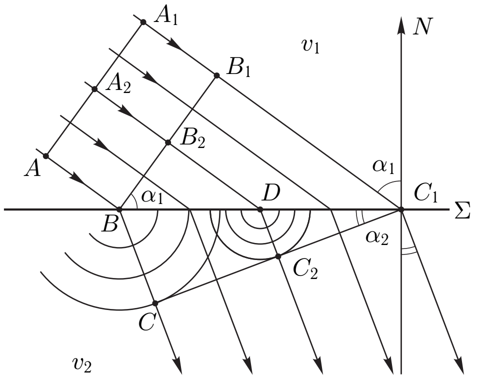

Рис. 13

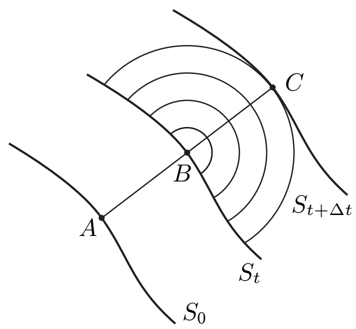

Рис. 14

AC, который свет проходит за время $t + \Delta t$, и, в соответствии с принципом Ферма, любой другой путь из A в C требует большего времени. По непрерывности на дуге AC найдется точка B такая, что от A до B свет проходит за время t, а от B до C — за время Δt. Так как дуга AC обладает свойством минимальности, то этим же свойством должны обладать и дуги AB и BC. Действительно, если бы существовал, например, путь, по которому из A в B свет мог бы добраться меньше чем за время t, то, дополнив этот путь дугой BC, мы бы получили путь из A в C, по которому свет идет меньше, чем за время $t + \Delta t$, а это невозможно. Отсюда следует, во-первых, что $B \in S_t$, а во-вторых, что точка C принадлежит волновому фронту, отвечающему точечному источнику света, находящемуся в B, и времени Δt. Это вполне согласуется с принципом Гюйгенса: точка B стала вторичным источником и распространяющаяся от нее волна оказалась через время Δt в точке C. Идея волнового фронта, принцип Гюйгенса и рассуждение, набросок которого мы только что привели, явились базой для будущей *теории Гамильтона–Якоби*, а в середине нашего века — для так называемой *теории динамического программирования*, которая является важным инструментом решения прикладных экстремальных задач.

* * *

Вслед за вариационным принципом Ферма было открыто множество других вариационных принципов — сначала в механике, а затем в физике. Со временем у большинства ученых созрела уверенность в том, что природа всегда «избирает» движение, как бы решая некоторую задачу на экстремум. Здесь уместно привести слова Эйлера: «В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума». В наши дни Карл Зигель позволил себе такое шутливое высказывание: «По Лейбницу наш мир является наилучшим из всех возможных миров, а поэтому законы можно описать экстремальными принципами».

1.1.4. Задача о брахистохроне. Зарождение вариационного исчисления. В 1696 г. появилась заметка И. Бернулли с интригующим заглавием: «Problema novum, ad cujus solutionem mathematici invitantur» («Новая задача, к решению которой приглашаются математики»). В ней была поставлена следующая задача: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B (рис. 15). Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до точки B в кратчайшее время» [1].

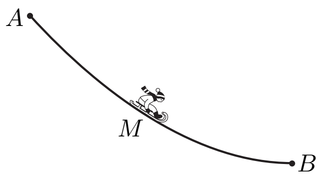

Рис. 15

Решение этой задачи, по словам Лейбница, «столь прекрасной и поныне неизвестной», было дано самим И. Бернулли, а также Лейбницем, Я. Бернулли и еще одним анонимным автором, в котором знатоки «ex unge leonem» (по словам И. Бернулли) [2] сразу же узнали Ньютона. Кривая наикратчайшего спуска или брахистохрона оказалась циклоидой. Решение Лейбница было основано на аппроксимации кривых ломаными. Развитая впоследствии в работах Эйлера, эта идея заложила основы прямых методов в вариационном исчислении. Замечательное решение Я. Бернулли использовало принцип Гюйгенса и идею «волнового фронта». Однако наибольшую популярность получило решение самого автора. Его мы и приведем.

Введем в плоскости систему координат (x, y) так, чтобы ось x была горизонтальна, а ось y направлена вниз. В соответствии с законом Галилея скорость тела M в точке с координатами $(x, y(x))$ (если

[1] Может быть нелишне напомнить, что некоторый отдаленный намек на постановку задачи о брахистохроне содержится в «Беседах» Галилея. Там доказывается, что, двигаясь по хорде, тело придет в конечную точку позже, чем двигаясь по окружности, стягиваемой хордой.

[2] По когтям (узнают) льва (*лат.*).

тело без трения спускается по кривой $y(\cdot)$ — см. рис. 16) не зависит от формы кривой $y(\cdot)$ между точками A и $(x, y(x))$, а зависит лишь от ординаты $y(x)$ и равна $\sqrt{2gy(x)}$, где g — ускорение силы тяжести. При этом требуется найти наименьшее время, которое потребуется на преодоление пути от A к B, т. е. надо минимизировать интеграл

$$T = \int\limits_{\breve{AB}} \frac{ds}{v} = \int\limits_{\breve{AB}} \frac{ds}{\sqrt{2gy(x)}},$$

где ds — дифференциал длины дуги.

Но (в силу принципа Ферма из п. 1.1.3) мы получим в точности ту же задачу, если будем исследовать траектории света в неоднородной (двумерной) среде, где скорость в точке (x, y) равна $\sqrt{2gy}$. Далее, И. Бернулли «дробит» среду на параллельные слои, где считает

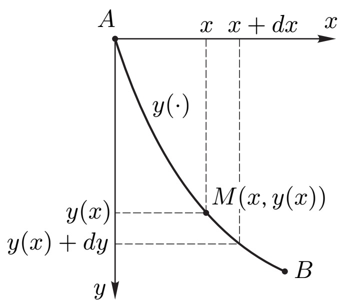

Рис. 16

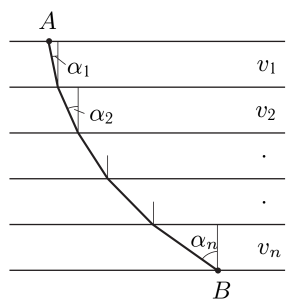

Рис. 17

скорость постоянной и равной v_i, $i = 1, 2, \ldots$ (рис. 17). В силу закона Снеллиуса получаем

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \ldots \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha_i}{v_i} = \text{const},$$

где α_i — углы падения луча. Переходя к пределу при измельчении слоев (Бернулли, разумеется, не останавливался на обосновании законности такой процедуры), получаем, что

$$\frac{\sin\alpha(x)}{v(x)} = \text{const},$$

где $v(x) = \sqrt{2gy(x)}$, а $\alpha(x)$ — угол между касательной к кривой $y(\cdot)$ в точке $(x, y(x))$ и осью Oy, т. е. $\sin\alpha(x) = 1/\sqrt{1 + (y'(x))^2}$. Итак, уравнение брахистохроны:

$$\sqrt{1 + (y')^2}\,\sqrt{y} = \sqrt{C} \Leftrightarrow y' = \sqrt{\frac{C - y}{y}} \Leftrightarrow \frac{dy\,\sqrt{y}}{\sqrt{C - y}} = dx.$$

Интегрируя его (подстановкой $y = C\sin^2\dfrac{t}{2}$, $dx = C\sin^2\dfrac{t}{2}\,dt$), приходим к уравнениям циклоиды:

$$x = C_1 + \frac{C}{2}(t - \sin t), \quad y = \frac{C}{2}(1 - \cos t).$$

Подчеркнем различие между задачей Евклида и Кеплера (о вписанном цилиндре) и, скажем, задачей о брахистохроне. Множество всех вписанных в треугольник параллелограммов и множество всех вписанных в шар цилиндров зависят от *одного* параметра. Таким образом, в этих задачах требуется найти экстремум функции *одного переменного*. В задаче же о брахистохроне множество всех кривых, соединяющих две точки, *бесконечномерно*. Здесь требуется найти экстремум функции *бесконечного числа переменных*. История математики проделала неожиданный скачок — от единицы сразу к бесконечности, от теории экстремумов функций одного переменного — к теории задач типа задачи о брахистохроне, т. е. к *вариационному исчислению*, как стали называть этот раздел в XVIII в.

Вскоре после работы И. Бернулли было решено много задач, подобных задаче о брахистохроне: о кратчайших линиях на поверхности, о равновесии тяжелой нити и другие.

Годом же рождения вариационного исчисления принято считать 1696 г. — год брахистохроны. Однако исторически это не совсем верно. Об этом мы расскажем в следующем пункте.

1.1.5. Аэродинамическая задача Ньютона. В 1687 г. вышли «Математические начала натуральной философии» Ньютона. В разделе седьмом, озаглавленном «О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел», Ньютон рассматривает задачу о сопротивлении шара и цилиндра в «редкой» среде [1]. Затем в «Поучении» Ньютон исследует вопрос о сопротивлении усеченного конуса, движущегося в той же «редкой» среде. В частности, он обнаруживает, что среди всех конусов, имеющих данную ширину и высоту, наименьшее сопротивление будет испытывать конус с углом 135°. Заметив мимоходом, что данный результат может быть «не бесполезен при построении судов», Ньютон пишет так: «Quod si figura $DNFG$ ejusmodi sit ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, et dicatur recta GP quae parallela sit rectae figuram tangenti in N, et axem productam sicet in P, fuerit MN ad GP ut GP^{cub} ad $4BP \times CB^q$, solidum quod figurae hujus revolutione circa axem AB describitur resistetur minime omnium ejusdem longitudinis & latitudinis».

Сказанное Ньютоном можно перевести следующим образом: «Когда же кривая $DNFG$ будет такова, что если из любой ее точки N опустить на ось AB перпендикуляр и [из заданной точки G] провести

[1] См. предложение 34, теорема 28 в кн.: Крылов А. Н. Собрание трудов, т. 7. — М.–Л.: Изд. АН СССР, 1936.

прямую GP, параллельную касательной к кривой в точке N, пересекающую ось в точке P, то [имеет место пропорция] $MN : GP = GP^3 : (4BP \times GB^2)$, тогда тело, получающееся вращением этой кривой около оси AB, будет испытывать наименьшее сопротивление в вышеупомянутой редкой среде среди других тел той же длины и ширины» (см. рис. 18, принадлежащий Ньютону). Ньютон не дал объяснения тому, как он пришел к своему решению. Впоследствии он передал своим комментаторам наброски вывода, но они были опубликованы лишь в 1727–1729 гг., когда уже завершался первый этап вариационного исчисления. Подготовительные материалы Ньютона, опубликованные лишь в наше время, показывают, что он владел элементами многих конструкций, впоследствии осуществленных Эйлером и Лагранжем. Как мы увидим далее, задачу Ньютона следует отнести даже собственно не к вариационному исчислению, а к оптимальному управлению, теория которого начала разрабатываться в пятидесятые годы нашего века.

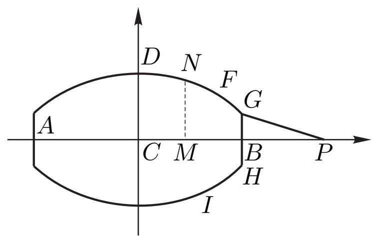

Рис. 18

1.1.6. Задача о рационе и транспортная задача. Предположим, что запасы некоторого продукта распределены по нескольким базам и что этот продукт должен быть доставлен нескольким магазинам. Стоимость перевозки единицы продукта от каждой базы до каждого магазина известна, и известно, сколько продукта должно быть доставлено в каждый магазин. *Транспортная задача* заключается в составлении оптимального в этой ситуации плана перевозок, т. е. в указании того, какое количество данного продукта надо перевезти из каждой базы в каждый магазин, чтобы суммарная стоимость перевозки была минимальной. Похожая *задача о рационе* состоит в том, чтобы при определенном ассортименте продуктов, заданном содержании в каждом из них питательных веществ и известной стоимости единицы каждого продукта составить рацион, удовлетворяющий необходимым потребностям с минимальными денежными затратами.

Такого рода задачи в огромном количестве возникают в конкретной экономике. Обе упомянутые выше задачи относятся к разделу, называемому *линейным программированием*. Теория линейного программирования была построена лишь в сравнительно недавнее время — в сороковые-пятидесятые годы нашего века.

1.1.7. Задача о быстродействии. Приведем простейший пример экстремальной задачи с «техническим» содержанием. Пусть имеется тележка, движущаяся прямолинейно без трения по горизонтальным рельсам. Тележка управляется внешней силой, которую можно изменять в заданных пределах. Требуется остановить тележку в определенном положении в кратчайшее время. Эту задачу мы называем далее *простейшей задачей о быстродействии*.

Особенность постановок экстремальных задач техники состоит в том, что действующие силы делятся на две части. Одна из них — это силы природы (скажем, сила тяготения), другая (скажем, сила тяги) регулируется человеком. При этом, естественно, возникают ограничения на управляемые воздействия, связанные с техническими возможностями.

Теория решения подобных задач была построена еще позже — в конце пятидесятых годов. Ее называют *теорией оптимального управления*.

* * *

Итак, откуда берутся экстремальные задачи? Приведенными здесь примерами мы постарались показать, что ответов на этот вопрос много. Экстремальные задачи возникают как из естествознания, из экономики и техники, так и вызываются потребностями самой математики. Поэтому теория экстремальных задач и ее практический аспект — теория оптимизации — приобрели в наши дни большую популярность.

§ 1.2. Как формализуются экстремальные задачи?

1.2.1. Основные определения. Каждая из задач § 1.1 была сформулирована в содержательных терминах той частной области, где эта задача возникла. Обычно экстремальные задачи ставятся именно так, и, вообще говоря, не всякую задачу обязательно надо решать аналитически. К примеру, задачи Евклида и Штейнера мы решили чисто геометрическим способом. Однако если мы все-таки желаем воспользоваться преимуществами аналитического подхода, то первое, что необходимо, это осуществить перевод задачи с «содержательного» языка на формальный язык анализа. Такой перевод называется *формализацией*.

Точно поставленная экстремальная задача включает в себя следующие элементы: *функционал* [1] $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$, определенный на некотором множестве X, и *ограничение*, т. е. некоторое подмножество $C \subseteq \subseteq X$. (Через $\overline{\mathbf{R}}$ обозначается «расширенная вещественная прямая», т. е. совокупность всех вещественных чисел, пополненная значениями $-\infty$ и $+\infty$.) Множество X называется иногда *классом допустимых элементов*, а точки $x \in C$ — *допустимыми по ограничению*. При этом сама задача формулируется так: *найти экстремум* (т. е. нижнюю или

[1] В теории экстремальных задач числовые функции часто называют *функционалами*.

верхнюю грань) *функционала f при условии, что* $x \in C$. Для той же задачи будет употребляться стандартная запись:

$$f(x) \to \inf(\sup); \quad x \in C. \tag{1}$$

Таким образом, для точной постановки надо описать X, f и C.

Если $X = C$, то задача (1) называется *задачей без ограничений*. Точку $\widehat{x}$ будем называть *решением* задачи (1), *минималью* (соответственно *максималью*) или *абсолютным минимумом* (*максимумом*), если $f(x) \geqslant f(\widehat{x})$ (соответственно $f(x) \leqslant f(\widehat{x})$) для всех $x \in C$. Как правило, все задачи будем записывать как задачи минимизации, заменяя задачу $f(x) \to \sup$, $x \in C$, задачей $\widetilde{f}(x) \to \inf$, $x \in C$, где $\widetilde{f}(x) = -f(x)$. В тех случаях, когда хотим подчеркнуть, что для нас безразлично, рассматривается ли задача минимизации или максимизации, мы пишем $f(x) \to \mathrm{extr}$.

Далее, множество X у нас обычно бывает наделено *топологией*, т. е. в нем имеет смысл понятие близости элементов. Это можно сделать, например, задав в X набор окрестностей (как это стандартно делается в $\mathbf{R}^n$ или в нормированном пространстве). Если X — топологическое пространство, то $\widehat{x}$ называется *локальным минимумом*, если существует такая окрестность U точки $\widehat{x}$, что $\widehat{x}$ — решение задачи $f(x) \to \inf$, $x \in C \cap U$. Аналогично определяется *локальный максимум*.

1.2.2. Простейшие примеры формализации экстремальных задач. Приведем формализацию некоторых задач § 1.1. Начнем с задачи Евклида (см. п. 1.1.2, рис. 6). Из подобия треугольников DBE и ABC получаем: $h(x)/H = x/b$. Здесь x — сторона $|AF|$ параллелограмма $ADEF$, H — высота $\triangle ABC$, $h(x)$ — высота $\triangle BDE$, $b = |AC|$ — длина стороны AC. Площадь параллелограмма $ADEF$ равна $(H - h(x))x = H(b - x)x/b$. Теперь получаем следующую формализацию задачи Евклида:

$$\frac{H(b-x)x}{b} \to \sup, \quad 0 \leqslant x \leqslant b, \Leftrightarrow x(x-b) \to \inf, \quad x \in [0, b]. \tag{1}$$

Три элемента, из которых состоит всякая формализация, здесь суть:

$$X = \mathbf{R}, \quad f = H(b-x)x/b, \quad C = [0, b].$$

Формализуем задачу Архимеда об изопифанных сегментах шаров (см. п. 1.1.2). Пусть h — высота шарового сегмента, R — радиус шара. Объем шарового сегмента, как известно из геометрии, равен $\pi h^2(R - h/3)$, а площадь поверхности $2\pi Rh$. Отсюда видно, что задачу Архимеда можно формализовать двояко:

$$\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) \to \sup, \quad 2\pi Rh = a, \quad R \geqslant 0, \quad 2R \geqslant h \geqslant 0, \tag{2}$$

или, исключая R из функционала в (2),

$$\frac{ha}{2} - \frac{\pi h^3}{3} \to \sup, \quad 0 \leqslant h \leqslant \sqrt{\frac{a}{\pi}} \tag{2$'$}$$

(последнее неравенство проистекает из-за того, что $h \leqslant 2R \Rightarrow a \geqslant \pi h^2$). В первом случае $X = \mathbf{R}^2_+$, $f = \pi h^2(R - h/3)$, $C = \{(R,h) \mid 2\pi Rh = a,\ 2R \geqslant h\}$; во втором, полагая $X = [0, \sqrt{a/\pi}\,]$, имеем задачу без ограничений с функционалом $f = ha/2 - \pi h^3/3$.

Задача Кеплера о максимальном по объему цилиндре, вписанном в шар (см. п. 1.1.2), допускает такую очевидную формализацию:

$$2\pi x(1 - x^2) \to \sup; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad (X = \mathbf{R}, C = [0,1]). \tag{3}$$

Здесь шар имеет единичный радиус, а x — длина половины высоты цилиндра.

Вопрос о преломлении света на границе двух однородных сред, решаемый с помощью вариационного принципа Ферма (см. п. 1.1.3 рис. 19), сводится к такой задаче. Пусть две однородные среды разделены плоскостью $z = 0$, причем скорость распространения света в верхнем полупространстве равна v_1, а в нижнем v_2. Мы ищем траекторию луча, идущего из точки $A = (0,0,\alpha)$, $\alpha > 0$, в точку $B = (\xi, 0, -\beta)$, $\beta > 0$. По соображениям симметрии луч будет лежать в плоскости $y = 0$. Пусть $C = (x,0,0)$ — точка преломления луча. Тогда время распространения луча из A в B равно

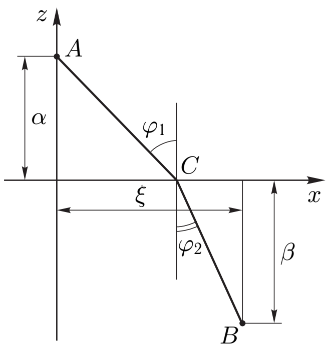

Рис. 19

$$T(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\beta^2 + (\xi - x)^2}}{v_2}.$$

В соответствии с принципом Ферма координата искомой точки $\widehat{x}$, где происходит преломление, находится из решения задачи

$$T(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\beta^2 + (\xi - x)^2}}{v_2} \to \inf \quad (X = C = \mathbf{R}). \tag{4}$$

Заметим, что получилась задача без ограничений.

Аналогично следующая задача без ограничений

$$|x - \xi_1| + |x - \xi_2| + |x - \xi_3| \to \inf, \tag{5}$$

где $X = C = \mathbf{R}^2$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — три заданные точки плоскости $\mathbf{R}^2$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, является формализацией задачи Штейнера (см. п. 1.1.2). Отметим важную особенность функционала задачи (5) — он является выпуклой, но не всюду дифференцируемой функцией.

Задача Аполлония о кратчайшем расстоянии от точки $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ до эллипса, задаваемого уравнением $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$, допускает, очевидно, такую формализацию:

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \to \inf, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \tag{6}$$

$$\left(X = \mathbf{R}^2, \quad C = \left\{ x \,\middle|\, \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \right\} \right).$$

Итак, мы познакомились с формализацией простейших задач. Формализация более сложных задач, возникающих в естествознании, технике или экономике, обычно составляет специальную и не слишком тривиальную проблему. Там сама формализация зависит от физических или иных гипотез. В следующем пункте мы покажем это на примере задачи Ньютона.

1.2.3. Формализация задачи Ньютона. Формализация этой задачи зависит, естественно, от законов сопротивления среды. Ньютон представлял себе среду (он называл ее «редкой») состоящей из неподвижных частиц фиксированной массы m, являющихся абсолютно упругими шарами. Примем и мы эту гипотезу.

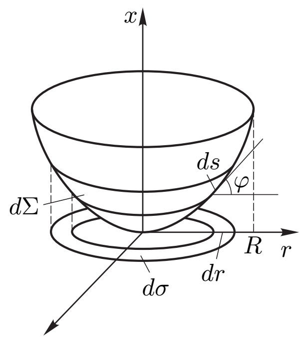

Рис. 20

Пусть тело вращения вокруг оси x (рис. 20) движется в направлении, обратном оси x («вниз») в описанной нами «редкой» среде Ньютона со скоростью v. Элемент dr на оси r при вращении вокруг оси x описывает кольцо площади $d\sigma = 2\pi r\, dr$, и этому кольцу соответствует пояс $d\Sigma$ на самом теле вращения. За время dt этот пояс «вытеснит» объем $dV = 2\pi r\, dr\, v\, dt$. Пусть ρ — плотность среды. Тогда число частиц, ударившихся о слой, равно $N = \dfrac{\rho}{m}\,dV = \dfrac{\rho\, 2\pi r\, dr\, v}{m}\,dt$, где m — масса частицы. Подсчитаем силу dF, действующую на слой $d\Sigma$ за время dt. Пусть участок ds наклонен к оси r под углом φ. Отражаясь от $d\Sigma$, одна частица получает приращение импульса, равное $m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = -2mv\cos\varphi \cdot \mathbf{n}$, где $v = |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2|$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к $d\Sigma$, а $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{dx}{dr}$ — угол ds с горизонталью. В силу третьего закона Ньютона тело получает противоположное приращение импульса $m2v\cos\varphi \cdot \mathbf{n}$, а за время dt таких приращений будет N, причем в силу симметрии компоненты импульса, ортогональные оси вращения, в сумме дают нуль, а осевая компонента суммарного приращения импульса равна

$$Nm\,2v\cos\varphi\cos\varphi = \frac{2\rho\pi r\,dr\,v\,dt}{m}\,m2v\cos^2\varphi = 4\rho\pi v^2 r\,dr\,dt\,\cos^2\varphi.$$

В силу второго закона Ньютона это выражение равно $dF\,dt$, откуда $dF = kr\,dr\,\cos^2\varphi$, $k = 4\rho\pi v^2$, а общая сила сопротивления равна

$$F = k\int\limits_0^R \frac{r\,dr}{1+(dx/dr)^2}. \tag{1}$$

Таким образом, заменив r на t и R на T, мы приходим к экстремальной задаче

$$\int\limits_0^T \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2} \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(T)=\xi. \tag{2}$$

Легко сообразить, не решая задачи (2) (впервые это отметил Лежандр в 1788 г.), что нижняя грань в задаче равна нулю. Действительно, если выбрать ломаную $x(\cdot)$ с очень большой по модулю производной (рис. 21), то интеграл (2) будет очень мал. С другой стороны, для любой функции $x(\cdot)$ интеграл в (2) неотрицателен. Таким образом, нижняя грань значений интеграла равна нулю.

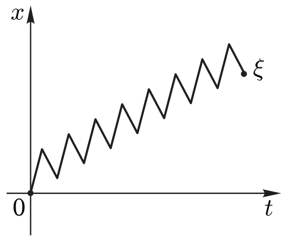

Рис. 21

Отмеченное только что обстоятельство неоднократно вызывало критику, иногда и злорадную. Один из последних примеров — в книге Янга [1)] говорится: «Ньютон сформулировал вариационную задачу о теле вращения, испытывающем наименьшее сопротивление при движении в газе. Принятый им закон сопротивления физически абсурден, в результате чего поставленная им задача не имеет решения (чем более зазубрен профиль, тем меньше сопротивление)... Если выводы Ньютона хотя бы приблизительно были верны, то мы не нуждались бы сегодня в дорогостоящих экспериментах в аэродинамических трубах». Задорно сказано! Многих людей утешает мысль, что и великие грубо ошибаются. Но так ли обстоит дело в данном случае? Прежде всего, заметим, что сам Ньютон не формализовал свою задачу — это за него сделали (и не вполне удачно) другие. Для правильной формализации надо учесть неявно подразумевавшуюся *монотонность* профиля (при зазубренном профиле частицы испытывают многократные отражения, что искажает всю картину). Требование

[1)] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974.

монотонности делает задачу физически осмысленной. С учетом этого обстоятельства решение самого Ньютона не только «приблизительно» верно, но поразительно верно в деталях, о чем речь пойдет впереди. Более того, физические гипотезы, выдвинутые Ньютоном, и само его решение аэродинамической задачи оказались весьма актуальными в современной сверхзвуковой аэродинамике, когда на очередь дня встало построение сверхскоростных и высотных летательных аппаратов.

Допущение о монотонности приводит к следующей формализации задачи Ньютона:

$$\int_0^T \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2} \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(T)=\xi, \quad \dot{x} \in \mathbf{R}_+. \tag{3}$$

1.2.4. Различные формализации классической изопериметрической задачи и задачи о брахистохроне. Простейшая задача о быстродействии. Первые две из упомянутых в заглавии задач принадлежат к числу известнейших, но оказываются едва ли не самыми трудными для полного исследования. Мы дважды формализуем каждую из них — один раз традиционным, общеизвестным способом, другой — менее известным. Этим хотелось бы подчеркнуть принципиальную неединственность процедуры формализации. На самом деле, выбор удачной формализации составляет самостоятельную проблему, и во многом успех при решении задачи зависит от искусства, которое здесь будет проявлено.

Начнем с классической изопериметрической задачи. Пусть длина кривой равна L, а сама кривая задана параметрически функциями $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, причем в качестве параметра взята длина дуги s, отсчитываемая вдоль кривой от некоторой ее точки. Тогда в любой точке выполнено соотношение $\dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)=1$, и, кроме того, $x(0)=x(L)$, $y(0)=y(L)$, так как кривая замкнута.

Для большей определенности в расположении искомой кривой можно потребовать также, чтобы ее центр тяжести попал в начало координат, т. е. чтобы имели место равенства $\int_0^L x(s)\,ds = \int_0^L y(s)\,ds = 0$. Площадь S кривой $(x(\cdot), y(\cdot))$ равна $\int_0^L x\dot{y}\,ds$. Отсюда получается следующая формализация:

$$\begin{gathered} S = \int_0^L x\dot{y}\,ds \to \sup; \quad \dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)=1, \\ \int_0^L x(s)\,ds = \int_0^L y(s)\,ds = 0, \quad x(0)=x(L), \quad y(0)=y(L). \end{gathered} \tag{1}$$

Однако ту же задачу можно формализовать и по-другому. Представим себе самолет, пилот которого получил задачу облететь за заданное время возможно бо́льшую площадь и вернуться на свой аэродром. Если максимальная скорость самолета не зависит от направления полета, то данная задача приобретает следующую естественную формализацию.

Площадь должна быть максимальна $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^T (x(t)v(t) - y(t)u(t))\,dt \to$ $\to \sup$, где $\dot{x}(t) = u(t)$, $\dot{y}(t) = v(t)$.

Максимальная скорость самолета равна $V \Leftrightarrow u^2 + \dot{v}^2 \leqslant V^2$.

Самолет возвращается на свой аэродром $\Leftrightarrow x(0) = x(T)$, $y(0) =$ $= y(T)$.

Возможна и более общая постановка, когда максимальная скорость зависит от направления (например, при наличии ветра). Тогда мы получаем более общую задачу:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int\limits_0^T (xv - yu)\,dt \to \sup, \quad \dot{x} = u, \quad \dot{y} = v,\\ x(0) = x(T), \quad y(0) = y(T), \quad (u,v) \in A,\end{gathered} \tag{2}$$

где A — множество всех допустимых скоростей самолета.

Если A — круг, то мы, очевидно, приходим к классической изопериметрической задаче, если A — «сдвинутый» круг (что соответствует постоянному ветру), то получается известная *задача Чаплыгина*.

Приведем теперь самую традиционную формализацию задачи о брахистохроне. Введем, как и в п. 1.1.4 (рис. 16), в плоскости систему координат (x, y) так, чтобы ось x была горизонтальна, а ось y направлена вниз. Не ограничивая себя в общности, можно считать, что точка A совпадает с началом координат. Пусть координаты точки B — (x_1, y_1), $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ (см. рис. 16) и $y(\cdot)$ — функция, задающая уравнение кривой, соединяющей точки A и B. Напомним, что в соответствии с законом Галилея скорость тела M в точке $(x, y(x))$ зависит не от формы кривой $y(\cdot)$ в интервале $(0, x)$, а лишь от самой ординаты $y(x)$, причем эта скорость равна $\sqrt{2gy(x)}$, где g — ускорение силы тяжести. Следовательно, время T, требуемое для преодоления участка кривой длины $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ на участке от $(x, y(x))$ до $(x +$ $+ dx, y(x) + dy)$, равно $ds/\sqrt{2gy(x)}$. Отсюда получается следующая формализация задачи о брахистохроне:

$$\mathscr{I}(y(\cdot)) = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \to \inf, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{3}$$

Приведем другую формализацию задачи о брахистохроне, идейно близкую ко второй формализации классической изопериметрической задачи, следуя упоминавшейся статье И. Бернулли 1696 г., в которой он отталкивался от вариационного принципа Ферма.

Представим себе неоднородную среду, в которой скорость распространения света зависит лишь от «глубины» y по закону $v^2 = 2gy$. Тогда луч света в соответствии с вариационным принципом Ферма будет проходить путь от A до B в кратчайшее время. Так получается формализация задачи о брахистохроне в виде задачи о быстродействии:

$$\begin{gathered} T \to \inf, \quad \dot{x} = \sqrt{y}\, u, \quad \dot{y} = \sqrt{y}\, v, \quad u^2 + v^2 = 2g, \\ x(0) = y(0) = 0, \quad x(T) = x_1, \quad y(T) = y_1. \end{gathered} \tag{4}$$

Аналогично выглядит и формализация простейшей задачи о быстродействии (п. 1.1.7). Пусть масса тележки m, ее начальная координата x_0, а начальная скорость v_0. Внешнюю силу (силу тяги) обозначим через u, а текущую координату тележки — через $x(t)$. Тогда по закону Ньютона $m\ddot{x} = u$. Ограничение на тягу зададим в таком виде: $u \in [u_1, u_2]$. Отсюда

$$\begin{gathered} T \to \inf, \quad m\ddot{x} = u, \quad u \in [u_1, u_2], \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Получилась постановка, весьма похожая на (2) и (4).

Отметим одно важное обстоятельство. На самом деле мы «недоформализовали» еще наши задачи. Например, в формализации (3) не указана точно область определения функционала $\mathscr{I}$ и, следовательно, пока неизвестно, на каком классе кривых рассматривалась задача (т. е. не определено множество X п. 1.2.1). То же относится и к остальным формализациям этого пункта. Впрочем, «классики» зачастую вообще не обращали внимания на аккуратную формализацию задач, а просто решали их «недоформализованными». Но мы хотим в дальнейшем быть педантичными и точными до конца, а потому придется заниматься этим несколько скучным делом — указывать всякий раз, в каком классе объектов ищется (или было найдено) решение.

1.2.5. Формализация транспортной задачи и задачи о рационе. Начнем с транспортной задачи. Введем такие обозначения:

a_i — количество единиц продукта, находящегося на i-й базе, $1 \leqslant i \leqslant m$,

b_j — потребность (в тех же единицах) в j-м магазине, $1 \leqslant j \leqslant n$,

c_{ij} — стоимость перевозки единицы продукта из i-й базы в j-й магазин,

x_{ij} — планируемое количество единиц продукта для перевозки из i-й базы в j-й магазин.

Тогда стоимость перевозки равна $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$, и ее нужно минимизировать. Ограничения при этом следующие:

а) $x_{ij} \in \mathbf{R}_+$ (очевидное ограничение на величину перевозки);

б) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i$ (нельзя вывезти больше того, что есть);

в) $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (нужно перевезти ровно столько, сколько необходимо).

В итоге получается следующая формализация:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \inf, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, x_{ij} \in \mathbf{R}_+. \tag{1}$$

З а д а ч а о р а ц и о н е формализуется также просто. Пусть имеется n продуктов (зерно, молоко и т. п.) и m веществ (жиры, белки, углеводы и пр.). Допустим, что для полноценного питания необходимо b_j единиц j-го вещества. При этом a_{ij} есть содержание j-го вещества в единице i-го продукта, а c_i — цена единицы i-го продукта.

Обозначив через x_i потребление i-го продукта, получаем задачу

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \inf, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geqslant b_j, \quad x_i \geqslant 0. \tag{2}$$

1.2.6. Основные классы экстремальных задач. Мы кратко упомянули уже в § 1.1, что в теории экстремальных задач выделилось несколько достаточно ясно очерченных классов задач. Прежде чем их описывать, проведем беглый обзор тех способов, какими задавались ограничения в задачах, формализованных выше.

Во-первых, нам встретились формализации, где ограничения отсутствовали вовсе (скажем, в задаче о преломлении света или задаче Штейнера). Во-вторых, случалось, что ограничения были заданы системой равенств (например, в задаче Аполлония, в задаче о брахистохроне в формализации (3) п. 1.2.4, где равенствами заданы краевые условия). В-третьих, ограничения задавались неравенствами (например, в транспортной задаче). Наконец, в-четвертых, некоторые ограничения записывались в виде включений (например, ограничение $\dot{x} \in \mathbf{R}_+$ в задаче Ньютона, ограничение $(u,v) \in A$, где $A = \{(u,v); u^2 + v^2 \leqslant 1\}$, в классической изопериметрической задаче в формализации (2) п. 1.2.4).

Подчеркнем некоторую условность такого разделения. Скажем, ограничение $\dot{x} \in \mathbf{R}_+$ в задаче Ньютона можно было бы записать в виде неравенства $\dot{x} \geqslant 0$, а ограничение $(u,v) \in A$ в классической изопериметрической задаче можно было бы записать в виде неравенства $u^2 + v^2 \leqslant 1$. Наоборот, всякое неравенство $f(x) \leqslant 0$ можно заменить на равенство $f(x) + u = 0$ и включение $u \in \mathbf{R}_+$ и т. д.

Тем не менее с точки зрения, принятой в этой книге, разделение ограничений на равенства и неравенства, с одной стороны, и включения — с другой, имеет свой смысл. В курсах анализа приводится (а в § 1.3 об этом будет сказано подробно) правило множителей Лагранжа для решения задач на «условный экстремум». Как известно, применение этого правила начинается с составления «функции Лагранжа», в которую входят как исследуемый функционал, так и функции, задающие ограничения. Может оказаться, что по разным причинам некоторые ограничения выгодно не включать в функцию Лагранжа. Так вот, в виде включений мы и выделяем именно те ограничения, которые при решении соответствующей задачи в функцию Лагранжа не войдут. При этом, как и при формализации задачи (где бывает много способов и выбор удачного зависит от искусства исследователя), в вопросе о разбиении ограничений нет однозначности. Перейдем к описанию основных классов экстремальных задач.

В дальнейшем с достаточно общих позиций будут рассмотрены следующие четыре класса.

I. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств и неравенств. Здесь класс допустимых элементов X будет обычно нормированным пространством [1], и ограничение C задается равенством $F(x) = 0$, где F — отображение X в другое нормированное пространство Y, и конечным числом неравенств $f_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. В итоге получается класс задач

$$f_0(x) \to \inf, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

При этом предполагается, что функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, и отображение F обладают некоторыми свойствами гладкости. Гладкую задачу $f_0(x) \to \inf$ будем называть элементарной гладкой задачей [2].

II. Классическое вариационное исчисление. Здесь традиционным классом допустимых элементов является банахово пространство $X = C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ непрерывно дифференцируемых n-мерных вектор-функций $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$, в котором норма задается формулами

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_1 &= \max(\|x(\cdot)\|_0, \|\dot{x}(\cdot)\|_0), \\ \|x(\cdot)\|_0 &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \big(\max_{t \in [t_0, t_1]} |x_i(t)| \big). \end{aligned}$$

Функционалы в задачах классического вариационного исчисления бывают обычно следующих типов:

---

[1] Термины «нормированное пространство» и «банахово пространство» используются здесь и ниже только для корректности постановки задачи. Точные определения читатель найдет в п. 2.1.1. В задаче (1) можно для простоты считать, что $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$.

[2] Задачи на максимум или с неравенствами другого знака ($\geqslant$) легко приводятся к виду (1), см. § 3.2.

— *интегральные*, т. е. функционалы вида

$$\mathscr{I}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))\, dt; \quad (2)$$

— *терминальные*, т. е. функционалы вида

$$\mathscr{T}(x(\cdot)) = l(x(t_0), x(t_1)) = l(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)); \quad (3)$$

— *смешанные* функционалы вида

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \mathscr{I}(x(\cdot)) + \mathscr{T}(x(\cdot)). \quad (4)$$

(В дальнейшем функционалы (4) мы называем также *функционалами Больца*.)

Ограничения в задачах классического вариационного исчисления обычно распадаются на две части:
— *дифференциальные связи* вида

$$M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \Leftrightarrow M_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \quad \dot{x}_1(t), \ldots \\ \ldots, \dot{x}_n(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \quad (5)$$

— *граничные условия* вида

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) = 0 \Leftrightarrow \psi_j(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)), \quad (6) \\ j = 1, 2, \ldots, s.$$

В (2) и (5) L, M_i и в (3) и (6) l, ψ_j — гладкие функции $2n+1$ и $2n$ переменных соответственно. Задача

$$\mathscr{I}(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0 \quad (7)$$

называется *задачей Лагранжа*. Задача

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

называется *задачей Больца*.

Задача

$$\mathscr{T}(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

называется *задачей Майера*.

Задачу без ограничений

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \inf \quad (8)$$

будем называть *элементарной задачей Больца*.

Задача

$$\mathscr{I}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \inf, \quad x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \qquad (9)$$

называется *простейшей векторной задачей классического вариационного исчисления*, а в случае, если $n = 1$, то — *простейшей задачей классического вариационного исчисления*. Для простоты здесь мы ограничились задачами с фиксированным временем.

Более общую постановку, в которой функционал и ограничения зависят также от переменных t_0 и t_1, читатель найдет в гл. IV.

III. Задачи выпуклого программирования. Здесь класс допустимых элементов X является линейным пространством, а ограничение C задается системой равенств $F(x) = 0$ (где F: $X \to Y$, Y — другое линейное пространство), неравенств $f_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и включений $x \in A$. В итоге получается класс задач

$$f_0(x) \to \inf, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in A. \qquad (10)$$

При этом предполагается, что функции f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, выпуклы, отображение F аффинно (т. е. $F(x) = \Lambda x + \eta$, где η — фиксированный вектор, а Λ — линейный оператор из X в Y), а A — выпуклое множество. Если в (10) все функции f_i линейны, а A — некоторый стандартный конус, то задачу (10) называют *задачей линейного программирования*. Если в (10) ограничения отсутствуют, то задачу $f_0(x) \to \inf$ с выпуклой функцией f_0 мы называем *элементарной выпуклой задачей без ограничений*.

IV. Задачи оптимального управления. В этой книге будет рассмотрен следующий класс задач оптимального управления, где $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$:

$$\begin{gathered}\mathscr{J}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + g(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf, \qquad (11) \\ \dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad \psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad u \in \mathfrak{U}.\end{gathered}$$

При этом в (11) моменты t_0 и t_1, вообще говоря, не фиксированы, все функции f: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$, φ: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n$, ψ: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$, $g = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ предполагаем непрерывными по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемыми по переменным t и x; множество $\mathfrak{U}$ — некоторое, вообще говоря, произвольное подмножество $\mathbf{R}^r$.

Для полного описания задачи осталось лишь объяснить, что же составляет здесь класс допустимых элементов. На первых порах будем рассматривать совокупность вектор-функций $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ определена и кусочно-непрерывна на $[t_0, t_1]$, причем для всех t выполнено включение $u(t) \in \mathfrak{U}$, а $x(\cdot)$ непрерывна на $[t_0, t_1]$ и дифференцируема во всех точках, кроме тех, где $u(\cdot)$ терпит разрыв; при этом во всех точках дифференцируемости $x(\cdot)$ выполнено равенство $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$.

Задачи, в которых функционалом является t_1, называются *задачами о быстродействии*.

* * *

Теперь можно посмотреть, в какие классы попадают задачи пп. 1.2.1–1.2.5.

Задачу Евклида (см. (1) п. 1.2.2) можно отнести и к гладким задачам, и к задачам выпуклого программирования. Задача Архимеда в формализациях (2) и (2′) п. 1.2.2 и задача Кеплера (3) п. 1.2.2 относятся к числу гладких задач. Задача о преломлении света (см. (4) п. 1.2.2) — это и элементарная гладкая задача, и элементарная выпуклая задача. Задача Штейнера (см. (5) п. 1.2.2) — элементарная выпуклая задача. Задача Аполлония (см. (6) п. 1.2.2) — гладкая задача с ограничениями типа равенств. Задача Ньютона (см. (3) п. 1.2.3) — задача оптимального управления. Классическая изопериметрическая задача в формализации (1) п. 1.2.4 относится к классическому вариационному исчислению, а в формализации (2) — к оптимальному управлению. Задача о брахистохроне (см. (3) п. 1.2.4) — простейшая задача классического вариационного исчисления; эта же задача в формализации (4) п. 1.2.4 — задача о быстродействии оптимального управления. Транспортная задача и задача о рационе (см. (1) и (2) п. 1.2.5) — задачи линейного программирования; простейшая задача о быстродействии — задача оптимального управления.

Итак, задачи формализованы и классифицированы. Посмотрим теперь, что может дать для их решения аппарат анализа.

§ 1.3. Правило множителей Лагранжа и теорема Куна–Таккера

1.3.1. Теорема Ферма. Первый общий аналитический прием решения экстремальных задач был разработан Пьером Ферма. Открыт он был, по-видимому, в 1629 г., но впервые достаточно полно изложен в письме к Робервалю в 1638 г. Можно посоветовать читателю обратиться к книге Декарта [1)], где приведено это письмо, и самому вникнуть в первоначальную мысль Ферма. На современном языке (правда, у Ферма лишь для полиномов) прием Ферма сводится к тому, что

[1)] Р. Декарт. Геометрия./ С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. — М.–Л.: ГОНТИ, 1938, с. 154.