

В.М. АНИКИН  
А.Ф. ГОЛУБЕНЦЕВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО  
ХАОСА



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2007

УДК 519.6  
ББК 22.193  
А 67

Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. **Аналитические модели детерминированного хаоса.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 328 с. — ISBN 978-5-9221-0879-9.

Рассматриваются дискретные динамические системы с хаотическим поведением, траекторные, вероятностные и спектральные характеристики которых могут быть представлены аналитически. Предложен метод нахождения собственных чисел и собственных функций оператора Перрона–Фробениуса для кусочно-линейных отображений в пространстве целых функций. Описан математический инструментарий для анализа перемешивающих и корреляционных свойств хаотических отображений.

Для исследователей в областях нелинейной динамики, функционального анализа и статистической радиофизики.

ISBN 978-5-9221-0879-9

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© В. М. Аникин, А. Ф. Голубенцев, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	11
<b>Глава 1. Вероятностно-операторное описание базовых одномерных хаотических отображений . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1. Одномерные хаотические отображения: принимаемые понятия. . . . .	19
1.2. Оператор Перрона–Фробениуса . . . . .	38
1.3. Производящие функции для полиномиальных собственных функций оператора Перрона–Фробениуса: генезис идеи построения и общие свойства . . . . .	49
1.4. Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса для простейших кусочно-линейных отображений. . . . .	58
1.5. Решение спектральной задачи для пилообразного отображения общего вида. . . . .	64
1.6. Решение спектральной задачи для кусочно-линейного отображения с произвольным чередованием ветвей, обладающих одинаковым модулем углового коэффициента . . . . .	71
1.7. Формулы Эйлера–Маклорена в теории детерминированного хаоса . . . . .	82
1.8. Аналитический расчет автокорреляционных функций орбит и корреляционных функций наблюдаемых. . . . .	92
1.9. Заключительные замечания . . . . .	103
<b>Глава 2. Сопряженные хаотические отображения . . . . .</b>	<b>106</b>
2.1. Определение и классические примеры сопряженных отображений . . . . .	106
2.2. Периодические функции как сопрягающие изоморфизмы . . . . .	112
2.3. Полиномы Чебышева первого рода как хаотические отображения . . . . .	117
2.4. Определение инвариантной плотности на основе точного траекторного решения . . . . .	122
2.5. Отображения, генерирующие хаос для непрерывной области изменения параметра . . . . .	123

2.6. Хаотические отображения бесконечной прямой . . . . .	134
2.7. Итеративная схема с мгновенными переключениями «хаос–порядок», «порядок–хаос» (искусственная перемежаемость) . . . . .	148
2.8. Оператор Перрона–Фробениуса для сопряженных хаотических отображений . . . . .	151
2.9. Автокорреляционные функции траекторий сопряженных отображений . . . . .	156
2.10. Об источниках многозначности решения обратной задачи для оператора Перрона–Фробениуса . . . . .	163
2.11. Дробно-линейное хаотическое отображение с нулевым показателем Ляпунова . . . . .	165
2.12. Заключительные замечания . . . . .	169
<b>Глава 3. Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства . . . . .</b>	<b>171</b>
3.1. Случайные величины в задаче Гаусса и законы их преобразования . . . . .	176
3.2. Отображение Гаусса как хаотическая динамическая система . . . . .	179
3.3. Циклы и аперiodические траектории отображения Гаусса . . . . .	186
3.4. Показатель Ляпунова для отображения Гаусса . . . . .	191
3.5. Отображение Гаусса и парадоксы машинной арифметики . . . . .	192
3.6. Оператор Перрона–Фробениуса отображения Гаусса и проблема расщепления корреляций . . . . .	198
3.7. Хаотические отображения, связанные с именем Гаусса . . . . .	212
3.8. Асимптотическое распределение коэффициентов непрерывной дроби: вероятностные и прикладные аспекты . . . . .	222
3.9. Отображение Гаусса в космологических моделях . . . . .	230
3.10. Заключительные замечания . . . . .	234
<b>Глава 4. Хаотические отображения Реньи: иерархия и спектральные свойства эволюционного оператора . . . . .</b>	<b>237</b>
4.1. Генезис $\Phi$ -отображения. «Золотое сечение» и детерминированный хаос . . . . .	238
4.2. Хаотические кусочно-линейные отображения с трехступенчатой инвариантной плотностью . . . . .	243
4.3. Отображение Реньи с $N$ -ступенчатой инвариантной плотностью . . . . .	250
4.4. Собственные числа и собственные функции оператора Перрона–Фробениуса для $\Phi$ -отображения . . . . .	255

---

4.5. Метод производящей функции в решении спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса $\Phi$ -отображения . . . . .	270
4.6. Базовый эндоморфизм для $\Phi$ -отображения. Спектральные свойства эволюционного оператора . . . . .	274
4.7. Заключительные замечания . . . . .	281
<b>Глава 5. Отображение пекаря как авторегрессионная система . . .</b>	<b>283</b>
5.1. Трактовка классического отображения пекаря как авторегрессионной системы первого порядка . . . . .	285
5.2. «Инверсное» отображение пекаря . . . . .	290
5.3. Обобщенное $G$ -адическое отображение пекаря . . . . .	291
5.4. Об «обратимости» отображения пекаря . . . . .	293
5.5. О распределении разрядов записанного в системе с целым основанием $G$ случайного числа . . . . .	294
5.6. Заключительные замечания . . . . .	297
Вместо послесловия . . . . .	299
Список литературы . . . . .	302
Предметный указатель . . . . .	324

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Начну с цитаты из книги Н. Н. Моисеева «Асимптотические методы нелинейной механики»<sup>1)</sup>: *«Очень часто высказывается мысль, что благодаря развитию вычислительной техники и методов вычислительной математики уменьшается значение аналитических методов. Автор этой книги является категорическим противником подобной точки зрения и убежден, что эффективные вычислительные методы решения той или иной задачи, экономные с точки зрения затраты машинного времени, всегда должны использовать информацию об аналитической природе задачи»*. Я полностью разделяю мнение Н. Н. Моисеева и убежден в самостоятельной значимости аналитических методов. В указанном смысле монография В. М. Аникина и А. Ф. Голубенцева привлекает к себя внимание, поскольку долгое время считалось, что, по крайней мере, в теории хаоса аналитические методы вряд ли что-либо дадут. Насколько я знаю, одним из истоков работы явилось настороженное отношение авторов к результатам машинного анализа динамических систем, демонстрирующих чувствительную зависимость к исходным данным.

В книге исследуются одномерные и двумерные хаотические модели (отображения) с целью получения их точных аналитических решений. Таковыми решениями могут быть динамические (траекторные), вероятностные, спектральные и иные характеристики, соотнесенные с соответствующими разностными и функциональными уравнениями. Как представляется, выявление (построение) моделей, обладающих (по крайней мере, при определенном сочетании параметров) точными решениями играет весьма плодотворную роль в контексте глобального подхода к изучению физических и иного рода процессов, сочетающего теоретические построения, экспериментальные исследования и численные расчеты по сложным алгоритмам, а также в контексте построения моделей-аналогий, которые могут сыграть свою позитивную роль как инструмента исследования в более сложных ситуациях.

В основу материалов, представленных в монографии, положены оригинальные работы авторов (основные из них указаны в библиографии), связанные с изучением фундаментальных свойств разностных

---

<sup>1)</sup> Моисеев Н. Н. Аналитические методы в нелинейной механике. М.: Наука, 1969. С. 7–8.

и функциональных уравнений, являющихся основным математическим аппаратом описания свойств хаотических динамических систем. В работе получен целый ряд красивых математических результатов. В то же время каждый из них имеет и прикладное значение. Аналитические расчеты удачно верифицируются в рамках различных вычислительных схем. Авторские результаты излагаются на продуманном фоне анализа общих понятий и результатов предшественников (приведено большое количество литературных источников, что красноречиво свидетельствует о тщательности проделанной работы).

Кратко охарактеризую представленные в книге результаты.

Центральным направлением в гл. 1 является формулировка и демонстрация метода нахождения полиномиальных собственных функций и собственных чисел линейного несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса для одномерных кусочно-линейных хаотических отображений определенного типа («пилообразные» отображения с регулярным и произвольным чередованием линейных ветвей) посредством введения аналитических производящих функций для системы собственных функций. Опираясь на известный факт, что производящая функция для полиномов Бернулли является таковой для собственных функций хаотических отображений, известных под названием «сдвиги Бернулли»  $x_{n+1} = \{Mx_n\}$  ( $M$  — целое), авторы иллюстрируют технологию построения производящих функций для отображений, которые могут быть получены из сдвигов Бернулли регулярной или произвольной инверсией ветвей этого отображения. В частности, впервые полностью представлено решение спектральной задачи для «пилообразного» отображения с произвольным числом ветвей (его «первичным» элементом является известное отображение tent map, которое авторы называют пирамидальным), а также «пилообразного» отображения с произвольным расположением ветвей. Принятым существенным ограничением на класс отображений, рассматриваемых в данной главе работы, конечно, является выделение отображений с одинаковым модулем тангенса наклона отдельных линейных ветвей, каждая из которых переводит интервал своего задания на единичный интервал.

Знание точного решения спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса, соотносимого с кусочно-линейными отображениями, позволяет провести аналитические расчеты при решении двух интересных задач. Во-первых, решение задачи на собственные значения и собственные функции линейного оператора Перрона–Фробениуса автоматически определяет решение аналогичной задачи для всех отображений, полученных из исходного кусочно-линейного отображения посредством необратимой замены переменных (подобные отображения принято называть топологически сопряженными отображениями). Во-вторых, знание собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса

позволяет точно рассчитать (в работе это показывается на разнообразных примерах) автокорреляционные функции для траекторий отображений и корреляционных функций всех величин, которые могут быть соотнесены с точками этих траекторий (в работе рассмотрены «наблюдаемые» в форме степенных функций). В несколько иной терминологии речь идет о решении задачи о расщеплении корреляций в динамической системе. Тем самым, с одной стороны, ученые-естественники получают убедительный ответ на вопрос, для чего, собственно, им необходимо изучение уравнений и линейного оператора Перрона–Фробениуса при исследовании хаотических процессов, а с другой стороны, материал главы интересен и для «чистых» математиков, представляя решение весьма уважаемой в математическом мире задачи по исследованию линейных несамосопряженных операторов.

В работе в решение спектральной задачи для операторов Перрона–Фробениуса кусочно-линейных отображений привнесены и такой нюанс, как обобщение формулы Эйлера–Маклорена (первоначально записанной для полной (на единичном отрезке) неортогональной системы полиномов Бернулли) для комбинированной неортогональной системы полиномов Бернулли и Эйлера, что позволяет говорить о решении задачи спектрального разложения оператора без специального решения задачи на собственные функции для сопряженного оператору Перрона–Фробениуса оператора Купмана.

Если в гл. 1 рассматриваются хаотические отображения, обладающие равномерным инвариантным распределением, то в гл. 2 представлены разнообразные хаотические отображения с иными инвариантными плотностями, являющиеся, с прикладной точки зрения, хаотическими генераторами псевдослучайных величин с различными вероятностными свойствами. В частности, выявлены и систематизированы приемы построения топологически сопряженных отображений с априорно задаваемыми свойствами — инвариантной плотностью, показателем Ляпунова, траекторными особенностями, фазовым пространством и т. п.; открыто сложное (регулярный и хаотический режимы) поведение на числовой прямой дробно-линейного отображения с действительными коэффициентами (при определенном сочетании их значений); построены перспективные в приложениях (например, при хаотизации сигналов) хаотические отображения, генерирующие хаос для непрерывной области изменения параметра. Эти результаты, разнообразные и интересные для приложений, получены экономным математическим приемом — в результате поиска подходящей замены переменной в базовом (для сопряженного) кусочно-линейном отображении, что говорит о пользе и естественности выбора простых решений.

В этой главе обращает на себя внимание элегантный алгоритм для расчета автокорреляционной функции траекторий сопряженных отобра-



ражений. Основной его расчетный механизм сводится к многократному действию оператора Перрона–Фробениуса исходного отображения на сопрягающую функцию. Это позволяет сформулировать эффективный аналитический метод вычислений корреляционных функций хаотических отображений, основанный на разложении сопрягающей функции в ряд по собственным функциям оператора Перрона–Фробениуса базового отображения.

В гл. 3, содержащей весьма интересный исторический фон, рассмотрено хаотическое отображение Гаусса — математический объект, имеющий физические приложения в космологических моделях. Авторам удалось внести новые интересные элементы описания этого отображения, в частности, провести прямой (основанный на формальной связи безусловных, условных и маргинальных распределений) вывод выражений для многомерных распределений коэффициентов непрерывной дроби (разложения случайного числа), являющихся естественным «продуктом» отображения Гаусса; соотнести этот результат с вероятностным результатом, следующим из метрической теории непрерывных дробей; сделать заключение об одинаковой вероятностной распределенности коэффициентов непрерывной дроби и одновременной их статистической зависимости); выявить структуру инвариантного распределения в терминах полиномов Бернулли; построить новые кусочно-нелинейные хаотические отображения сложной структуры, топологически сопряженные с отображением Гаусса; провести подробный анализ литературных результатов по аналитическому и численному решению задачи Гаусса, заключающейся в нахождении оценок для скорости сходимости начального распределения к инвариантному и т. д. Замечу, что отображение Гаусса — это своеобразный «оселок», на котором математики и физики оттачивают свое умение вот уже на протяжении двух столетий!

В гл. 4 представлены впечатляющие результаты, полученные при изучении хаотического отображения Реньи. В отличие от сдвигов Бернулли с целыми коэффициентами данное отображение определено для произвольного вещественного значения коэффициента:  $x_{n+1} = \{\beta x_n\}$  (в книге рассмотрен случай  $1 < \beta < 2$ ). Столь детально, как это сделано в книге, данное отображение ранее не изучалось. Во-первых, показывается, что известное из литературы  $\beta$ -отображение  $x_{n+1} = \{\beta x_n\}$  (авторы переименовывают его в  $\Phi$ -отображение) с коэффициентом в виде одного из чисел Фидия,  $\beta = \Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$  (эта величина обратна золотому сечению), является единственным кусочно-линейным отображением с двухступенчатой инвариантной плотностью. Во-вторых, впервые исчерпывающе решена спектральная задача для оператора Перрона–Фробениуса  $\Phi$ -отображения: сначала путем построения инвариантных подпространств данного оператора была опре-

делена структура собственных чисел (они оказались знакопеременными отрицательными степенями числа  $\Phi$ ) и первые 6 собственных функций. Затем результат был обобщен методом неопределенных коэффициентов с учетом структуры собственных чисел. Решение найдено в классе разрывных кусочно-полиномиальных функций. В-третьих, показано, что три разных значения коэффициента отображения определяют три отображения Реньи, обладающие инвариантными плотностями в форме трех ступенек. Наконец, сформулированы алгебраические уравнения, определяющие значения коэффициента отображения, при которых оно обладает кусочно-постоянным инвариантным распределением с заданным числом ступенек.

В гл. 5 представлены аналитические результаты для наиболее известного двумерного отображения — отображения пекаря, рассмотренного с позиции своеобразного цифрового фильтра.

На мой взгляд, настоящая книга дает хорошее представление о хаотических моделях, допускающих аналитическое решение, тем более, что таких книг нет и в мировой литературе. Одновременно это труд, вносящий интересный вклад в области математического моделирования, функционального анализа, статистической радиофизики.

Несколько слов об авторах работы. На титульном листе значатся две фамилии. Увы, доктор физико-математических наук профессор Александр Федорович Голубенцев уже не увидит этой книги. Удивительно одаренный и эрудированный человек, он почти в течение полувека плодотворно трудился на физическом факультете Саратовского государственного университета (СГУ), оставив о себе память как о незаурядной личности. Второй автор, доктор физико-математических наук профессор СГУ Валерий Михайлович Аникин, — один из учеников А. Ф. Голубенцева. Рукопись книги была подготовлена им уже после смерти А. Ф. Голубенцева, что стало очередным знаком его внимания к памяти учителя.

Доктор физико-математических наук,  
член-корреспондент РАН, профессор,  
заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн  
Саратовского государственного университета  
*Д. И. Трубецков*

## ВВЕДЕНИЕ

В книге представлено математическое описание одномерных и двумерных хаотических динамических систем (отображений), характеристики которых (траекторные решения, показатели Ляпунова, инвариантные плотности, решения спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса, автокорреляционные функции орбит и наблюдаемых и т. п.) могут быть вычислены аналитически. По данной краткой аннотации специалисты сразу поймут, что предметом настоящего исследования является чрезвычайно узкая «спектральная линия» из научного диапазона, называемого хаотической динамикой, для которой основные результаты получены (и могут быть преимущественно получены!) посредством компьютерных расчетов.

Синергия (взаимодействие) аналитических и компьютерных методов — характерная особенность современной науки, «пребывающей», согласно утвердившееся философской классификации, в *постнеклассическом* периоде своего развития [1]. Переход к новому качеству научных исследований произошел в результате научной революции, связанной с появлением новых технологий научных исследований [2, 3].

Потеряли ли в этой связи свою значимость точно решаемые модели? Вряд ли. И дело тут не только в математической эстетике и элегантности (как однажды красиво выразился Г. М. Заславский, *«история неоднократно демонстрировала вечную ценность простых и изящных моделей»* [4, с. 45]), но и в сохраняющейся значимости точных математических моделей как инструмента познания, вносящего зримый и глубокий вклад в становление современной научной картины мира как обобщенной модели окружающей действительности. Математические модели, обладающие аналитически достижимыми точными решениями, дают возможность понять основные черты явления и указывают направление поиска методов, пригодных в более сложных и более реалистических ситуациях [5, с. 9].

Один из основоположников хаотической динамики Д. Рюэль отмечал, что в принципе, физическая теория, безусловно, только выигрывает, когда соответствие между физическими и математическими величинами, которое она порождает, является более точным, а диапазон явлений, которая она описывает, более обширным. *«Но на практике, — добавляет ученый, — также важна решаемость математики, поэтому если у физиков есть альтернатива, то обычно исполь-*

зуют теорию более простую и удобную, а не более запутанную и, в действительности, менее точную» [6, с. 16–17]. Рюэль здесь имеет в виду, что упрощение в математическом описании должно помочь исследователю избежать положения, когда «из-за леса не видно дерева». Упрощение может достигаться не только посредством сознательного игнорирования некоторых усложняющих деталей, но и благодаря выбору подходящих (например, асимптотических) аналитических приближенных методов решения уравнений, составляющих костяк предлагаемой математической модели <sup>1)</sup>.

Кроме того, аналитический подход обладает, по крайней мере, еще тремя замечательными свойствами. Во-первых, аналитическое решение универсально, и очень многие математические модели, лишившись физической и технической оболочки, приобретают «способность количественного описания различных по своей физической природе процессов или по техническому назначению объектов» [7, с. 9]. Во-вторых, когда создается удачная модель физического явления, т. е. модель, которая позволяет делать точные вычисления и предсказания, то уже «сама математическая структура модели открывает новые стороны этого явления» [8, с. 9]. Наконец, аналитическое решение заведомо свободно от рассмотрения проблем, связанных с преодолением особенностей множества машинных чисел, являющего собой (в отличие от континуума чисел действительной оси) множество меры нуль, что особенно актуально для хаотических систем.

Множество машинных чисел дискретно, конечно и ограничено; оно состоит исключительно из рациональных чисел с жестко фиксированным числом цифр в мантиссе; соседние машинные числа отличаются друг от друга на шаг, зависящий от диапазона [9]. Подобная структура машинных чисел обуславливает невозможность точного представления большинства рациональных чисел (или диофантовых приближений) в машинных системах счисления и приводит к нарушению самых «очевидных» правил арифметики — к зависимости результата от порядка сложения, невозможности сложения двух машинных чисел и т. п. В численных методах (при решении нехаотических задач) эту ситуацию учитывают посредством построения «хитроумных» алгоритмов для проведения расчетов в «выгодных» (дающих наименьшую погрешность) числовых диапазонах или посредством организации «безошибочных вычислений» на основе модульной арифметики [10].

Основная опасность, пристекающая из особенностей машинной арифметики, — это появление в машинной модели качеств, не свойственных реальному объекту. В случае хаотических динамических

---

<sup>1)</sup> Вполне четкая асимптотическая направленность характеризует, например, и космологическую модель, которой рассматривается в гл. 3.

систем цифровые шумы приводят к «теневым» траекториям, поведение которых может в корне отличаться от хода действительных орбит. Например, в силу неточного представления (в машинном «исполнении») начального значения вместо теоретического цикла может возникнуть машинная «апериодическая» траектория. Подобное положение служит дополнительным обоснованием того, почему численные расчеты в хаотической динамике целесообразно вести исключительно на статистической основе с вариацией начальных условий и усреднением по множеству траекторий (при наличии перемешивающих свойств динамической системы). Один из самых опасных «подводных камней», возникающих при дискретизации задач хаотической динамики, связан с решением задач на собственные значения для линейных эволюционных операторов, ассоциированных с хаотическими (перемешивающими) системами. Эти операторы не являются самосопряженными; несамосопряженность — атрибут диссипативных, необратимых процессов. Здесь при численных расчетах реально возникновение машинных «фантомов» — несуществующих собственных значений [11, гл. 9]. Поэтому наличие «оазисов» точных решений в таких ситуациях особенно актуально.

Естественно, «сталкивание лбами», резкое противопоставление моделей, реализуемых в ходе компьютерного эксперимента и при аналитическом решении, лишено смысла, ибо в любом случае наличие множества разнообразных (и тем более, различающихся по области применимости) моделей одного и того же явления полезно для выявления наиболее оптимальных из них, выстраивания своеобразных иерархий моделей, отличающихся новыми физическими результатами и возможностями прикладного использования. Наиболее разумным и перспективным для науки является сочетание двух математических подходов к исследованию природы. К тому же, известны яркие случаи, когда вычислительный эксперимент сыграл роль стимулятора плодотворных идей при создании качественно новых аналитических моделей. Так, с конца 60-х — начала 70-х годов XX века круг точно решаемых физически важных задач значительно расширился (и это произошло в немалой степени благодаря компьютерным экспериментам): было построено и исследовано большое количество нелинейных систем, точными аналитическими решениями которых являются *солитоны* (а началось все, как известно, со знаменитой численной задачи Ферми–Пасты–Улама [12]).

Практически одновременно в нелинейной науке утвердилась проблематика *динамического хаоса*, когда было установлено (точнее, переоткрыто в новых условиях), что характер эволюции динамических систем может существенно зависеть от выбора начальных условий (и параметров), что в конечном итоге предопределяет *исключительно вероятностный* характер предсказания будущего состояния такой си-

стемы. Парадигма хаоса быстро набрала обороты в науке и приобрела статус *междисциплинарной формы исследовательской деятельности* (еще одна черта современной, «постнеклассической», науки). Было продемонстрировано единство механизмов, соотнесенных с нелинейными явлениями различной природы. Хаотические модели нашли интересные применения в физике, астрономии, космологии, теории турбулентности, «заслужившей» образное наименование «кладбища теорий», химии, информационных технологиях, биофизике, климатологии, экологии, экономике и финансовой математике, демографии [13–20].

Особую роль среди хаотических моделей занимают отображения малой размерности, теоретико-методологическая и практическая ценность которых была подтверждена неоднократно: *«их анализ оказывается полезным и важным, проливая свет на многие феномены, встречающиеся в более сложных ситуациях»* [20, с. 25]. Вспомним в этой связи три различных по содержанию примера, убедительно иллюстрирующих этот тезис.

1. *Открытие универсальных внутренних свойств хаотических динамических систем* — обнаружение сценария перехода от регулярного режима к хаотическому через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода (М. Фейгенбаум [21]) с выявлением скейлинговых закономерностей этого перехода и привнесением в исследовательскую технологию нелинейной динамики метода ренормализационной группы; реальность этого сценария была впоследствии подтверждена при наблюдении разнообразных физико-химических явлений и процессов.

2. *Модельное концептуальное применение* — формулировка гипотезы относительно определяющей роли хаоса в возникновении «стрелы времени» (т. е. необратимости времени как несоответствия между наблюдаемой необратимостью физических процессов и обратимым характером уравнений движения) на основе изучения свойств одномерного диадического отображения — сдвига Бернулли (И. Р. Пригожин с соавторами [22]).

3. *Модельное «техническое» применение* — привлечение одномерного отображения Гаусса для описания закономерностей хаотической осцилляции метрики пространства-времени в рамках однородной анизотропной космологической модели (типа IX по Бианки, Mixmaster Universe) вблизи особенности (момента Большого Взрыва) (В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Лифшиц, Я. Г. Синай, И. М. Халатников, К. М. Ханин, Л. Н. Щур) [23]. Эта модель приобрела в общей теории относительности значимость «полномочного представителя» хаотической парадигмы.

Традиционное прикладное значение отображений малой размерности определяется их использованием в качестве датчиков псевдослучайных чисел (и, таким образом, они являются «сердцем» метода ста-

тистических испытаний — метода Монте–Карло). Сегодня актуально их использование и в разнообразных схемах кодирования и обработки информации [24]. В контексте нелинейной науки теоретически важным моментом является генезис отображений при установлении связи между дифференциальными уравнениями и отображениями с помощью метода сечений Пуанкаре. Одновременно по-прежнему представляет большой интерес расширение круга хаотических отображений в качестве как реальных, так и потенциальных модельных уравнений в различных сферах знания. Закономерности построения новых отображений, исследование их свойств и примеры конкретного использования в модельном аспекте отражены в данной работе.

В последнее время одно из центральных мест в исследовании хаотических отображений занимает операторный подход. Качественно он означает *переформулировку* (это важный методологический момент) изначально *нелинейной* задачи в *линейную* задачу посредством введения и изучения спектральных свойств линейных операторов — Перрона–Фробениуса (или, еще в одной терминологии, трансфер-операторов, трансфер-операторов Рюэля–Майера) и связанных с ним операторов (оператора Купмана и сопряженного к нему оператора). Потребность в операторном подходе возникла уже при первых попытках оценить скорость установления равновесных состояний и расщепления корреляций в хаотических динамических системах. Следует отметить, что оператор Перрона–Фробениуса для необратимых перемешивающих отображений не является самосопряженным оператором, поэтому численное решение задачи на собственные значения для него является достаточно сложным. В этой связи особый интерес вызывают отображения и ассоциированные с ними линейные операторы, для которых данная задача может быть решена *точно*. Именно такой класс операторов выделяется и рассматривается в работе. Первые аналитические результаты по расчету собственных функций и собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса и его спектральному разложению были получены для симметричных кусочно-линейных отображений (M. Dörfle, И. П. Пригожин (I. Prigogine), I. Antoniou, D. Driebe, P. Gaspard, Н. Н. Hasegava, G. Nicolis, W. C. Saphir, S. Sucanecki, S. Tasaki, D. MacKernan, R. F. Fox, Ю. А. Куперин). Общие свойства трансфер операторов изучаются в работах A. Lasota, M. C. Mackey, D. Ruelle, D. H. Mayer, V. Baladi, S. Isola, M. Iosifescu, M. Л. Бланка.

Изучение особенностей оператора Перрона–Фробениуса позволило установить соответствие между свойствами эргодических динамических систем и марковских стохастических процессов [25]. Свойство марковости для перемешивающих хаотических отображений проявляется, в частности, в «забывании» начальных условий (подобным же свойством обладают простые эргодические марковские цепи): эволю-

ционные уравнения подобных отображений при *любом* начальном распределении имеют асимптотическое решение в форме инвариантного распределения, т. е., другими словами, они нечувствительны к начальным условиям. В то же время траектории хаотической динамической системы демонстрируют чувствительность к начальным условиям, которая «примирия» случайность и детерминизм, делает принципиально невозможной постановку задач прогноза для этих систем. Решение задачи Коши для таких систем теоретически существует, т. е. хаос в детерминированных системах возникает *благодаря* (не вопреки!) существованию решения задачи Коши. Подобная стохастическая устойчивость позволяет аппроксимировать (следуя идее С. Улама) хаотическую динамику марковской цепью с конечным числом состояний при специальном определении (с учетом вида отображения) переходных вероятностей [25, 26]. Правда, пользуясь при описании отображений понятиями марковских процессов, необходимо учитывать тот факт (он явно заложен в вывод выражения для оператора Перрона–Фробениуса), что в данном случае условные вероятности являются вырожденными, поскольку динамический процесс описывается сугубо детерминированным уравнением.

В настоящей книге рассматриваются следующие задачи детерминированного хаоса, допускающие исчерпывающие точные (аналитические) решения.

1. Введено понятие производящей функции для собственных функций трансфер-операторов хаотических отображений; определен вид производящих функций для собственных полиномиальных функций оператора Перрона–Фробениуса ряда симметричных одномерных кусочно-линейных хаотических отображений с одинаковым (по абсолютной величине) тангенсом углом наклона линейных составляющих, каждая из которых полностью переводит подынтервал своего задания на единичный интервал, в том числе полученных посредством суперпозиции и инверсий отдельных отображений. При введении производящих функций возможно компактное (своего рода, архивное) представление спектральных характеристик (собственных чисел и полиномиальных собственных функций) трансфер-операторов одномерных хаотических отображений. Названные характеристики «извлекаются» посредством действия соответствующего оператора на производящую функцию. Символическим методом получено обобщение формулы Эйлера — Маклорена для разложения на единичном отрезке целых аналитических функций по комбинированной системе неортогональных полиномов Бернулли и Эйлера. Данное разложение соотносено с решением задачи на собственные значения для трансфер-операторов в оснащем гильбертовом пространстве.



2. Развита приемы построения топологически сопряженных отображений, позволяющие получить многочисленные хаотические отображения, отличающиеся (в рамках каждой иерархической «ниши» — эргодические, перемешивающие или точные эндоморфизмы) фазовыми пространствами, вероятностными законами, корреляционными свойствами (например, со свойствами дискретного белого шума), демонстрирующие хаос в некоторой области изменения параметра, сочетающие «управляющие» и «антиуправляющие» свойства (переходы от хаоса к порядку и обратно). Эти отображения могут использоваться как хаотические генераторы псевдослучайных последовательностей при моделировании задач, относящихся к различным естественно-научным областям. Получена элегантная формула для аналитического расчета автокорреляционной функции траекторий и наблюдаемых для сопряженных отображений. Доказано, что дробно-линейное отображение с действительными параметрами для некоторых сочетаний их значений является эргодическим с инвариантной плотностью в форме закона Коши и нулевым показателем Ляпунова.

3. Непосредственно на основе общей связи совместных, маргинальных и условных распределений аналитически рассчитаны асимптотические многомерные совместные законы распределения коэффициентов разложения в непрерывную дробь случайного иррационального числа, распределенного по инвариантному закону отображения Гаусса — фундаментального одномерного отображения нелинейной динамики и теории чисел.

4. Исследован генезис одного из частных случаев кусочно-линейного отображения Реньи ( $\Phi$ -отображения) с иррациональным коэффициентом в виде одного из чисел Фидия. Определены коэффициенты отображения Реньи, при которых оно имеет кусочно-постоянную инвариантную плотность в форме трех ступенек (в отличие от двухступенчатого распределения для  $\Phi$ -отображения). Определена структура собственных чисел и собственных функций трансфер-оператора  $\Phi$ -отображения и его базисного эндоморфизма. Продемонстрирована возможность «перестройки» отображения Реньи посредством вариации его параметра; это приводит к изменению вероятностной инвариантной плотности отображения. Чрезвычайная чувствительность к изменению значения коэффициента позволяет предлагать отображение Реньи в качестве базового элемента для моделирования нейросетей, а также в схемах хаотической криптографии.

В гл. 5 дано аналитическое описание известного объекта нелинейной динамики — недиссипативного отображения пекаря, находящего сегодня интересные модельные применения. Показано, что это отображение может быть представлено авторегрессионной моделью первого порядка.

Результаты, представленные в книге, получены на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований Саратовского государственного университета. Научный профиль кафедры складывался под влиянием профессора Александра Федоровича Голубенцева, скоропостижно скончавшегося в августе 2003 г.<sup>1)</sup>

Автор (В. М. А.) искренне благодарен за внимание к работе и помощь в издании книги Дмитрию Ивановичу Трубецкову и Владимиру Ивановичу Наянову.

*В. М. Аникин  
Август 2006 г.*

---

<sup>1)</sup> Памяти А. Ф. Голубенцева (1933–2003) // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2003. Т. 3, вып. 2. С. 198–199; Памяти А. Ф. Голубенцева // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 3. С. 355–356.

А. Ф. Голубенцеву посвящены также специальные выпуски журнала «Радиотехника» (2005. № 4. Ученые России — Александр Федорович Голубенцев / Науч. ред. Ю. В. Гуляев, Н. И. Сеницын и В. М. Аникин. — 96 с.) и межвузовского научного сборника «Вопросы прикладной физики» (Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 11: Памяти А. Ф. Голубенцева / Под ред. Ю. В. Гуляева, Н. И. Сеницына и В. М. Аникина. — 256 с.).

## Глава 1

# ВЕРОЯТНОСТНО-ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ БАЗОВЫХ ОДНОМЕРНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

### 1.1. Одномерные хаотические отображения: принимаемые понятия

Предметом рассмотрения в первых четырех главах монографии являются одномерные отображения — детерминированные разностные уравнения первого порядка

$$x_{n+1} = g(x_n, \lambda); \quad x_n \in X \subset \mathbb{R}; \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.1)$$

Уравнение (1.1.1) задает итеративную вычислительную процедуру, позволяющую, исходя из заданного начального условия  $x_0$ , определить последовательности значений переменной целочисленного аргумента  $x_n = x(n)$  на некотором множестве (сегменте)  $X$  действительной прямой. Нас интересует ситуация, когда уравнение (1.1.1) отображает множество  $X$  в себя, а его *незамкнутые* (отличные от циклов) траектории — решения

$$\begin{aligned} x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1) = g(g(x_0)) = g^2(x_0), \dots, \\ x_n = g(x_{n-1}) = g(\underbrace{g(\dots g(x_0))}_{n \text{ раз}}) = g^n(x_0), \dots \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

демонстрируют свойства, требующие статистического подхода к их описанию. Подобный характер решений уравнений (1.1.1) соотносится с понятием «детерминированный (динамический) хаос» [1–25]<sup>1)</sup>.

В качестве итерирующей функции  $g$  рассматривается некоторая детерминированная вещественная *нелинейная кусочно-монотонная необратимая* функция, *чувствительная* к вариациям начального условия. Отдельные (или все!) участки монотонности этой функции

---

<sup>1)</sup> И. Р. Пригожин в статье «От классического хаоса к квантовому» для журнала «Природа» (1993. № 12. С. 23) приводит ссылку на статью Б. Купмана и Дж. фон Неймана 1932 г., где, по его мнению, впервые термин «хаос» был употреблен в связи с динамическими системами (В. Соортман, J. von Neumann // PNAS, USA. 1932. V. 18. P. 255).

могут быть и линейными; речь в этом случае идет о кусочно-линейных отображениях, в определение которых может входить операция выделения дробной части числа. В качестве области определения  $X$  разностного уравнения (отображения) (1.1.1) будут рассматриваться как единичный отрезок  $I = [0, 1]$ , так и области, получаемые из него линейной или нелинейной *монотонной (обратимой)* заменой переменной  $x$ . Мы ограничиваемся случаем, когда интервалы  $X_i$  монотонного изменения функции (их число может быть конечным или счетным, так что  $X = \bigcup_i X_i$ ) могут быть разделены *исключительно только точками разрыва* первого или (в случае, когда  $X$  совпадает со всей числовой осью  $\mathbb{R}$  или с положительной полуосью  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ) второго рода <sup>1)</sup>.

Запись (1.1.1) отвечает общему случаю обозначения одномерных отображений, явно включая параметр  $\lambda$  (некоторое вещественное число), вариация значений которого приводит к изменению динамики отображения. Уравнения сорта (1.1.1) особенно интенсивно изучались на протяжении последних трех десятилетий представителями различных естественнонаучных специальностей — при известной простоте и специфичности их исследование дало удивительно содержательный вклад в развитие нелинейной динамики. Можно отметить, что первые теоретические и прикладные исследования сложного поведения решений разностных уравнений с кусочно-линейными итеративными функциями выполнены представителями Нижегородской радиофизической школы еще в 50-х годах прошлого столетия (Ю. И. Неймарк, Н. Н. Леонов, А. С. Алексеев, З. С. Баталова, Н. А. Фуфаев, В. Н. Белых) [5].

Среди одномерных отображений целесообразно вести определенные «соподчинения» и выделить классы «базовых» отображений и отображений, топологически сопряженных базовым. Первый класс отображений в книге представлен в основном в форме растягивающих кусочно-линейных отображений, «раздвигающих» при итерациях близ-

---

<sup>1)</sup> В [26] рассмотрено кусочно-линейное отображение со «щелью» в области определения:

$$x_{n+1} = \begin{cases} px_n, & 0 \leq x_n \leq 1/p, \\ q(x_n - 1 + 1/q), & 1 - 1/q \leq x_n \leq 1, \end{cases}$$

где  $p > 1$ ,  $q > 1$  — положительные действительные числа, связанные условием  $1/p + 1/q \leq 1$ . Таким образом, на подынтервале  $(1/p, 1 - 1/q)$  данная итеративная функция считается принимающей нулевое значение. Тем не менее, отображение имеет инвариантное множество, по структуре напоминающее канторовское. Случай  $1/p + 1/q = 1$  соответствует асимметричному сдвигу Бернулли [52], обладающему равномерным инвариантным распределением на единичном интервале.

ко расположенные точки, что обеспечивает наличие (в области существования) производной итерирующей функции с модулем, превосходящим единицу. Для растягивающих отображений с полными<sup>1)</sup> ветвями (необязательно линейными) (и сопрягаемых с ними отображений!) существуют общие теоремы, доказывающие (при условии, что отображение имеет дважды кусочно-непрерывные производные) наличие у них непрерывных инвариантных распределений [27–30]. Наиболее изучены *кусочно-линейные* отображения с полными ветвями; для подобных отображений характерно существование непрерывного (равномерного) инвариантного распределения.

Базовому классу хаотических отображений посвящена данная глава, главной темой которой является изучение спектральных свойств ассоциированного с хаотическими отображениями линейного оператора Перрона–Фробениуса. Сопряженные отображения, рассматриваемые в следующей главе, «управляются» базовыми, поскольку строятся из них посредством непрерывной монотонной дифференцируемой замены переменной, от которой зависит и вид инвариантной плотности нового отображения.

### 1.1.1. Хаотические динамические системы как эндоморфизмы.

Вопрос о том, каким способом система, описываемая детерминированными уравнениями эволюции, может демонстрировать квазислучайное поведение, — одна из фундаментальных проблем хаотической динамики [5, 14–16]. Механизм «примирения» детерминизма и случайности общепризнан: как пишет один из основоположников теории детерминированного хаоса Д. Рюэль, «то, что мы сейчас называем хаосом, является эволюцией с *чувствительной зависимостью* от начальных условий» [14, с. 68]. Для отображений, обладающих этим свойством, траектории, исходящие из первоначально близких точек, в процессе итераций удаляются друг от друга на расстояния, сравнимые с длиной интервала определения отображения. В формализованной математической трактовке это представляется так (см., например, [11]): для любой точки  $x$ , принадлежащей к открытому множеству,  $x \in U \subseteq X$ , найдется точка  $y$  из того же множества и такое целое число  $n > 0$ , что  $|g^n(x) - g^n(y)| > \varepsilon$  для  $0 < \varepsilon < 1$  (если речь идет о единичном интервале).

Если начальное условие  $x_0$  известно лишь с некоторой точностью (а это типичная ситуация) или *a priori* является случайным, то по-

---

<sup>1)</sup> Такая терминология означает, что «полная» монотонная ветвь отображения переводит область своего задания на *весь* интервал определения отображения (в отличие от «неполной» ветви, которая обеспечивает отображение лишь на часть общего интервала).

ведение системы (благодаря существованию решения задачи Коши для каждого начального значения) становится совершенно *непредсказуемым*, и в этой ситуации единственным и естественным выходом является переход к статистическому описанию.

Вопрос заключается в том [15], *какие статистические свойства можно потребовать от детерминированного уравнения?* Существуют до какой-то степени альтернативные подходы к определению (и изучению!) динамического хаоса, и само это явление характеризуют не одним, а целым рядом признаков (причем с некоторой вариабельностью определений), которые математически не являются эквивалентными, но выступают, как правило, в форме единого «ансамбля», «аккомпанирующего» тому, что понимается под хаосом.

Отображения (1.1.1), обладающие хаотическими свойствами, рассматривают как детерминированные (в уравнение явным образом не входят никакие случайные возмущения) динамические системы (итерации отображения определяют траектории динамической системы)<sup>1</sup>). Фазовое пространство этих систем является пространством (Лебега) с нормированной (вероятностной) мерой; математической базой для описания таких отображений является эргодическая теория [15, 31–39]. В этом контексте одномерное хаотическое отображение выступает как *эндоморфизм*, т. е. однозначное (но необратимое) отображение, переводящее единичный (или иной) интервал на себя, причем такое, что мера любого подмножества из рассматриваемого интервала равна мере полного прообраза этого подмножества [36]. Говоря более строго, если  $X$  — фазовое пространство динамической системы с выделенной некоторой сигма-алгеброй подмножеств, на которой определена мера  $\mu$ , тогда отображение  $g$  называют эндоморфизмом, если для любого подмножества  $A$  из выделенной сигма-алгебры подмножеств имеет

---

<sup>1</sup>) Классическую триаду, входящую в определение динамической системы, составляют [38]: 1) соответствующим образом структурированное «фазовое пространство»  $X$ , элементы которого («точки») представляют возможные состояния системы (в случае отображений — это точки траектории); структура фазового пространства не изменяется в процессе эволюции; 2) «время», которое может быть непрерывным или дискретным (последнее и имеет место для отображений, причем процесс не является обратимым, и времени соответствует множество неотрицательных целых чисел  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ); 3) закон эволюции системы — правило, позволяющее однозначным образом преобразовывать начальное условие в текущее состояние в каждый последующий момент времени (для одномерных отображений закон эволюции — это само отображение). Для необратимых процессов с дискретным временем закон эволюции обладает полугрупповыми свойствами:  $g^k(g^s(x_0)) = g^{k+s}(x_0)$  (это демонстрируется на основе выражений для точного решения (1.1.2)).

место:

$$\mu(A) = \mu(g^{-1}A), \quad (1.1.3)$$

где через  $g^{-1}A$  обозначен полный прообраз множества  $A$  (рассматриваются *несингулярные* отображения, для которых  $\mu(g^{-1}A) > 0$  для любого измеримого подмножества  $A \subseteq X$  с положительной мерой Лебега  $\mu(A) > 0$ ). Мера  $\mu$  называется инвариантной мерой отображения  $g$ . Меры, непрерывные относительно меры Лебега (длины), обычно представляются в виде «взвешенной» меры Лебега:

$$d\mu(x) = \rho(x) dx, \quad (1.1.4)$$

где  $\rho(x)$  — инвариантная плотность отображения.

Отображение, обладающее (единственной) инвариантной мерой, определяет (строго) *эргодическое преобразование*  $g(x)$ , замечательной особенностью которого является то, что почти для всех начальных значений  $x_0$  (за исключением точек множества меры нуль) траектория (1.1.2) воспроизводит пространство  $X$ . Точнее [35]: если для преобразования  $g$  не существует инвариантных множеств (они определяются условием  $g^{-1}(A) = A$ ) за исключением множеств  $A = \emptyset$ ,  $A = X$ , то для каждого множества  $A$  траектории (1.1.2) попадают в  $A$  с асимптотической относительно частотой  $\mu(A)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \theta_A(g^k x_0) = \mu(A), \quad (1.1.5)$$

где  $\theta_A$  — характеристическая функция множества  $A$ , так что сумма, стоящая в (1.1.5), дает число элементов последовательности (1.1.2), принадлежащих  $A$ . Соотношение (1.1.5) является частным случаем эргодической теоремы. Эргодическое преобразование называют также *метрически транзитивным* или *неразложимым* [35]. В физической литературе, как известно, эргодичность представляется в эквивалентной форме, выражая равенство временного среднего (вычисляемого вдоль траектории) пространственному среднему (как характеристики ансамбля траекторий, заполняющих фазовое пространство).

Если эргодичность позволяет определять постоянные во времени усредненные характеристики динамической системы, то за релаксацию системы к равновесному (стационарному) состоянию ответственно другое свойство — свойство перемешивания. Это понятие, как и понятие эргодичности, имеет несколько эквивалентных формулировок.

Статистический подход к описанию детерминированной системы основан на гипотетическом рассмотрении *ансамбля* систем, в совокупности реализующих процессы, отвечающие всем возможным значениям начальных условий. Иначе говоря, разностное уравнение (1.1.1) рассматривается как *стохастическое* уравнение, в котором случай-

ность порождена случайностью начальных условий. Процесс релаксации в хаотических динамических системах означает, что если начальные условия характеризуются некоторым вероятностным законом, отличным от «естественного» инвариантного закона, то в процессе последующей эволюции исходное вероятностное распределение «перемалывается» таким образом, что в асимптотике устанавливается именно инвариантное распределение, и это происходит независимо от того, по какому вероятностному закону было распределено начальное условие. Такое свойство хаотических систем можно назвать «*нечувствительностью*» системы к начальным условиям в рамках статистического описания.

Для необратимых систем, сохраняющих меру (ансамблевый подход), свойство перемешивания определяется как [15, 16, 31–39]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(g^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad (1.1.6)$$

для всех измеримых подмножеств  $A, B \subseteq X$ . Соотношение (1.1.6) отражает такую интересную ситуацию [36]: начиная с некоторого момента точки из множества  $A$  при своем движении все время будут пересекать множество  $B$ , причем мера той части  $A$ , которая в момент  $n$  попала в  $B$  асимптотически (при  $n \rightarrow \infty$ ) пропорциональна мере  $B$ . Условие (1.1.6) как раз и обеспечивает для перемешивающих систем сходимость начального распределения к инвариантному [36]. Важно отметить, что перемешивание часто интерпретируется и как свойство расщепления (убывания, затухания) корреляций (decay of correlations) в процессе динамических преобразований. В самом деле, условие перемешивания (1.1.6) в более общей форме может быть представлено как [36]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(g^n x) \varphi(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu \int_X \varphi(x) d\mu, \quad (1.1.7)$$

где  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — непрерывные функции динамической переменной из гильбертова пространства функций  $L^2$ , определенных на множестве  $X$ . Корреляционная функция для двух наблюдаемых  $f$  и  $\varphi$  определяется как [15, 40]

$$C_{f,\varphi}(n) = \int_X f(g^n x) \varphi(x) d\mu - \int_X f(x) d\mu \int_X \varphi(x) d\mu. \quad (1.1.8)$$

Поэтому перемешивание действительно определяет убываний корреляций. Однако кроме самого факта убывания корреляций в статистической физике огромную роль играет *характер* этого процесса, определяющий *скорость* релаксации и сказывающийся на вычислении коэффициентов переноса для динамических переменных [15]. Большое внимание исследованию скорости убывания корреляций уделяется при



изучении детерминированного и так называемого «зашумленного» хаоса [22].

С поведением траекторий ряда хаотических отображений (например, сдвигов Бернулли  $x_{n+1} = Mx_n \bmod 1$ , где  $M$  — целое, пирамидального отображения, или tent map,  $x_{n+1} = 1 - |2x_n - 1|$ ,  $x_n \in (0, 1)$ ) ассоциируется свойство одномерных хаотических систем, определенное В. А. Рохлиным [33]: *точность*. Оно означает, что в асимптотике для любого подмножества  $A$  множества определения отображения  $X$  выполняется следующее условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(g^n(A)) = 1. \quad (1.1.9)$$

Для названных отображений *свойство точности* означает, что для любого открытого (в  $I$ ) интервала  $A \subset I$  существует  $m > 0$ , при котором  $g^m A = I$ . Точные отображения с максимальной степенью эффективности являются перемешивающими [2, 27, 33].

**1.1.2. Свойства итеративной функции, определяющие хаотичность одномерного отображения.** Явно выписанное определение динамического хаоса, включающие топологические компоненты, дано, например, у Devaney [6, 11]: одномерное непрерывное отображение вида (1.1.1) метрического пространства считается хаотическим по Devaney, если выполняются следующие условия:

1) итеративная функция  $g$  обладает существенной зависимостью от начальных условий;

2) отображение  $g$  является транзитивным: для любой пары открытых множеств  $U, V \subseteq X$  существует такое  $n > 0$ , что пересечение образа  $U$ , полученного на  $n$ -м шаге итераций, с  $V$  будет непустым, т. е.  $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ;

3) периодические орбиты (траектории) отображения  $g$  плотны в  $X$ , т. е. в *любой* окрестности *всякой* точки  $x \in X$  найдется по крайней мере одна периодическая точка.

В статье Banks'а с соавторами [41] показано, что чувствительная зависимость от начальных условий является *следствием* свойств транзитивности и плотности периодических точек. В работе Z. Xu с соавторами (2004) в контексте определения хаоса по Devaney сформулированы два удобных для практики положения [42]: 1) условиям Devaney отвечают растягивающие отображения; 2) свойство перемешивания отображения, выражаемое через условие убывания корреляций, «поглощает» свойство транзитивности и чувствительной зависимости от начальных условий, т. е. перемешивающее отображение одновременно является транзитивным и чувствительным к начальным условиям. Авторы [41] также анонсировали исследование о связи перемешивания с плотностью периодических траекторий. Справедливости ради нужно

отметить, что вывод о транзитивности перемешивающего отображения — известный результат теории динамических систем; строго доказаны и свойства транзитивности и плотности периодических орбит для растягивающих отображений [1, 2, 38].

Говоря о периодических траекториях хаотических отображений, нельзя не упомянуть о широко известной иерархии циклов одномерных непрерывных отображений по Шарковскому [1, 2]: если отображение имеет цикл порядка 3, то оно имеет циклы всех периодов, что обуславливает сложную топологическую структуру периодических траекторий (о характере циклов — притягивающие они или отталкивающие — в теореме Шарковского не говорится; на это обращено внимание, в частности, в [16, 22]). Цикл периода 3 порождает хаос по Li — Yorke [15, 16, 22, 29]: при наличии такого цикла помимо счетного множества циклов любого порядка существует континуум непериодических (незамкнутых) траекторий.

Для дискретной динамической системы (отображения) возможны три типа траекторий [24]:

1) неподвижные точки  $x^*$ , находимые из уравнения  $x^* = g(x^*)$ ;  
 2) циклы (периода  $n$ ):  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , определяемые условиями:  $g^n(x_0) = x_0$ ,  $x_i = g^i(x_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$  (неподвижные точки можно рассматривать как циклы периода 1, и, наоборот, циклы периода  $n$  можно трактовать как неподвижные точки отображения  $g^n$ );

3) незамкнутые траектории, все элементы которых различны.

Признаком хаотичности отображения, как уже говорилось, является плотность периодических орбит, точки которых составляют множество меры нуль. Точки аperiodических траекторий образуют множество с мощностью континуума. В случае сохраняющих меру одномерных и двумерных отображений, демонстрирующих хаотическое поведение, траектории заполняют все фазовое пространство, в качестве которого выступает фиксированный сегмент числовой прямой или некоторая фиксированная двумерная область. Поскольку траектории не покидают названных областей, с ними (областями) ассоциируют понятие *аттрактора*, хотя более насыщенное содержание это термина и описываемые им объекты (притягивающие множество сложной структуры, на котором в асимптотике «разыгрывается» динамический процесс), имеют место лишь для динамических систем с размерностью не менее трех [15, 16, 22]. Для малоразмерных (размерности 1 и 2) динамических систем фазовое пространство содержит (образует) единственный аттрактор, когда циклические траектории, состоящие из отталкивающих точек, не образуют притягивающее множество.

Попутно отметим следующее обстоятельство. В численных методах разностные уравнения вида (1.1.1) играют чрезвычайно важную

роль, являясь «сердцем» итеративных процедур, предназначенных для нахождения корней нелинейных уравнений как *неподвижных* точек. Если итеративная функция имеет непрерывную производную, удовлетворяющую в неподвижной точке  $x^*$  условию  $|g'(x^*)| < 1$ , то последовательность значений  $x_n$ , получаемая в результате итераций (1.1.1), сходится независимо от начального значения  $x_0$  из некоторой окрестности неподвижной точки к искомому значению корня:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ . Эту точку называют *устойчивой (притягивающей)*. Другими словами, в данной ситуации *возможна предсказуемость результата* независимо от выбора (точности выбора) стартового значения  $x_0$  итеративного процесса.

На понятии и методе неподвижной точки основаны доказательства ряда теорем существования пределов последовательностей в полных нормированных пространствах, в частности, доказательство существования неподвижной точки для линейных операторов, схемы построения разнообразных фракталов.

### 1.1.3. Хаотические отображения с точными решениями.

В данной работе рассматриваются, как правило, те отображения вида (1.1.1), которые, демонстрируя хаотическое поведение при *конкретных* значениях параметра  $\lambda$ <sup>1)</sup>, обладают аналитически представляемыми характеристиками — траекторными, вероятностными, операторными. В первую очередь речь идет о точном решении разностного уравнения (1.1.1), т.е. о нахождении значений функции *целочисленного аргумента*  $x(n) = x_n$ ,

$$x_n = x_n(n; x_0), \quad (1.1.10)$$

для произвольных начальных значений  $x_0$ . Знание точного решения (1.1.10) уравнения (1.1.1) позволяет *аналитически* вычислять другие важные характеристики отображения.

Так, инвариантная плотность одномерного отображения в согласии с (1.1.5) может быть вычислена как предел [3]:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_n(n, x_0)), \quad (1.1.11)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Техника расчетов по формуле (1.1.11) будет продемонстрирована ниже на конкретных примерах.

---

<sup>1)</sup> В дальнейшем при записи отображений этот параметр будет представлен своим конкретным значением.

Показатель Ляпунова для одномерного хаотического отображения можно трактовать как функцию чувствительности для числовой последовательности  $\{dx_n(n, x_0)/dx_0\}$  [3]:

$$\Lambda(x_0) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dx_n(n, x_0)}{dx_0} \right|. \quad (1.1.12)$$

Это предельное соотношение, где идет усреднение по дискретной «временной» координате, с использованием выражения для инвариантного распределения (1.1.11) может быть сведено к интегральному представлению, приводимому в [4] (к усреднению по фазовой переменной). Замечая, что

$$|dx_n(n; x_0)/dx_0| = |g'(x_{n-1})| \cdot |g'(x_{n-2})| \cdot \dots \cdot |g'(x_0)|,$$

найдем:

$$\begin{aligned} \Lambda(x_0) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |g'(x_k)| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \ln |g'(x)| \delta(x - x_k) dx = \\ &= \int_0^1 \ln |g'(x)| \rho(x) dx. \quad (1.1.13) \end{aligned}$$

Формулы (1.1.12) и (1.1.13) достаточно эффективны при конкретных применениях.

**1.1.4. Кусочно-линейные хаотические отображения с точными решениями и равномерным инвариантным распределением.** Приведем примеры кусочно-линейных отображений с точными решениями, характеризующиеся равномерной инвариантной плотностью. В гл. 2 будут даны примеры и построены новые отображения, инвариантная плотность которых отличается от равномерного распределения.

*Сдвиг Бернулли (Bernoulli shift).* Это самое известное отображение на единичном интервале, связанное с представлением числа в виде дроби с произвольным целым основанием. Простейшее (диадическое) преобразование Бернулли имеет вид (рис. 1.1, а)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n \bmod 1 = \{2x_n\} = \\ &= \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n < 1/2, \\ 2x_n - 1, & 1/2 \leq x_n \leq 1/2, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.14) \end{aligned}$$

(фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа).

Траекторное точное решение для диадического отображения представляется как

$$x_n = \{2^n x_0\}. \quad (1.1.15)$$

В самом деле, (1.1.15) сводится к (1.1.14):

$$x_n = \{2 \cdot 2^{n-1} x_0\} = \{2 [2^{n-1} x_0] + 2 \{2^{n-1} x_0\}\} = \{2x_{n-1}\},$$

что подтверждает справедливость (1.1.15) (скобки  $[ \ ]$  означают выделение целой части числа).

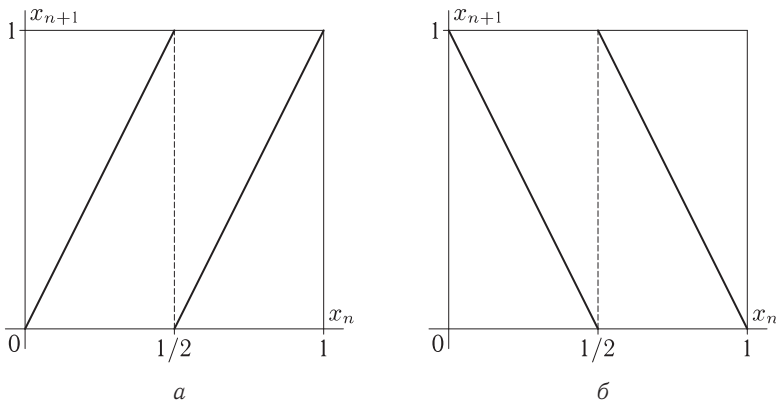


Рис. 1.1. Кусочно-линейные хаотические отображения: сдвиг Бернулли (а), инверсный сдвиг Бернулли (б)

Используя (1.1.15) в выражении для инвариантной плотности (1.1.11), можно непосредственно убедиться, что инвариантным распределением для диадического отображения будет равномерное распределение. Для этого при переходе к пределу в (1.1.11), следует учесть, что здесь, по существу, ведется расчет среднего значения функции от непрерывной величины  $\alpha = \{2^n x_0\}$ , обладающей вероятностными свойствами и распределенной на единичном интервале по равномерному закону (Г. Вейль) (см. [43–45]). Поэтому операция суммирования в (1.1.11) может быть в пределе сведена к интегрированию функции по мере Лебега. В общем случае при вычислении среднего значения функции от случайной величины интегрирование ведется с весом в форме вероятностного распределения этой величины. Если речь идет о равномерном распределении, характеризуемом плотностью

$$\rho(x) = \Theta_{0,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1), \end{cases} \quad (1.1.16)$$

где  $\Theta_{0,1}(x)$  — индикаторная функция единичного интервала (в (1.1.16) записано ее определение), то для сдвигов Бернулли имеет место:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_n(n, x_0)) = \\ &= \int_0^1 \Theta_{0,1}(\alpha) \cdot \delta(x - \alpha) d\alpha = \Theta_{0,1}(x), \quad x \in (0, 1). \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Аналогично можно показать, что и все другие кусочно-линейные отображения, рассматриваемые в данном разделе, имеют равномерное распределение. Равноценным доказательством этого факта является и доказательство существования неподвижной точки в форме (1.1.16) для соответствующих операторов Перрона–Фробениуса (см. следующий раздел).

Используем теперь точное решение (1.1.11) и найденное выражение для инвариантной плотности (1.1.17) при расчете показателя Ляпунова диадического отображения. Из формулы (1.1.13) получим:

$$\Lambda = \int_0^{1/2} \ln 2 dx + \int_{1/2}^1 \ln 2 dx = \ln 2. \quad (1.1.18)$$

Инверсный сдвиг Бернулли (рис. 1.1, б) отличается от привычного отображения иным наклоном ветвей:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = 1 - \{2x_n\} = \{-2x_n\} &= \begin{cases} 1 - 2x_n, & 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2 - 2x_n, & 1/2 \leq x_n \leq 1, \end{cases} \\ &n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Точное траекторное решение для этого отображения имеет вид

$$x_n = \{(-2)^n x_0\}, \quad (1.1.20)$$

поскольку в этом случае

$$\begin{aligned} x_n = \{-2 \cdot (-2)^{n-1} x_0\} &= \{-2 \cdot [(-2)^{n-1} x_0] - 2 \cdot \{(-2)^{n-1} x_0\}\} = \\ &= \{-2x_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Инвариантная плотность и показатель Ляпунова отображения (1.1.19) задаются соответственно формулами (1.1.16) и (1.1.18).

Пирамидальное отображение (отображение «палатка», *tent map*) — одно из самых значимых и «эксплуатируемых» в теории одномерных хаотических отображений (рис. 1.2, а):

$$x_{n+1} = 1 - |2x_n - 1| = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2 - 2x_n, & 1/2 \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.21)$$

Точные траекторные решения для этого отображения представимы как

$$x_n = 1 - |1 - 2\{2^{n-1}x_0\}| = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos 2^n \pi x_0) \quad (1.1.22)$$

(представление через тригонометрические функции обусловлено связью отображения (1.1.21) с полиномом Чебышева второго порядка (см. гл. 2)). Инвариантное распределение отображения является равномерным, а показатель Ляпунова выражается все тем же значением (1.1.16),  $\Lambda = \ln 2$ .

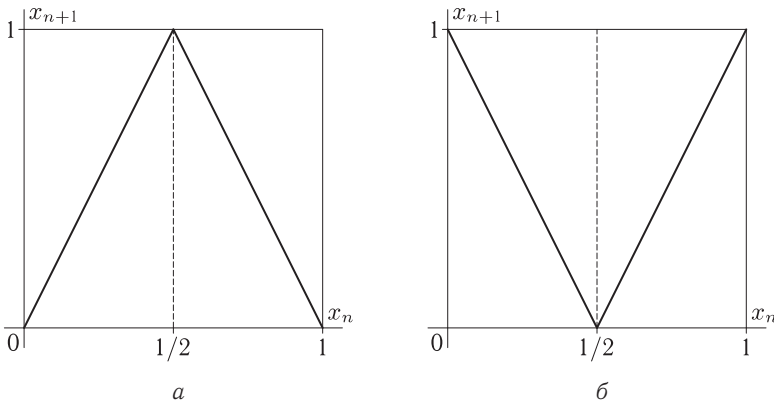


Рис. 1.2. Кусочно-линейные хаотические отображения: пирамидальное отображение (а) и инверсное (V-образное) пирамидальное отображение (б)

Инверсное пирамидальное (V-образное) отображение (рис. 1.2, б) суть:

$$x_{n+1} = |1 - 2x_n| = \begin{cases} 1 - 2x_n, & 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2x_n - 1, & 1/2 \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.23)$$

Точное решение разностного уравнения (1.1.23) можно представить в форме:

$$\alpha_n = |1 - 2\{2^{n-1}\alpha_0\}|, \quad (1.1.24)$$

Как и в предыдущем случае, инвариантным является равномерное распределение, а показатель Ляпунова дается значением (1.1.17).

*N*-образное отображение. В качестве частных примеров кусочно-линейных отображений введем еще два трехзвенных отображения — *N*-образное отображение и инверсное к нему. Первое преобразование (рис. 1.3, а) определяется как

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n, & 0 \leq x_n < 1/3, \\ 2 - 3x_n, & 1/3 \leq x_n < 2/3, \\ 3x_n - 2, & 2/3 \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1.25)$$

Точное решение для отображения (1.1.25), нелинейной обратимой заменой переменной сводимое к кубическому полиному Чебышева первого рода (см. гл. 2), имеет вид

$$x_n = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos 3^n \pi x_0). \quad (1.1.26)$$

Инвариантным для (1.1.25) остается равномерное распределение, а показатель Ляпунова, вычисляемый согласно (1.1.12), задается величиной:

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln 3^n = \ln 3. \quad (1.1.27)$$

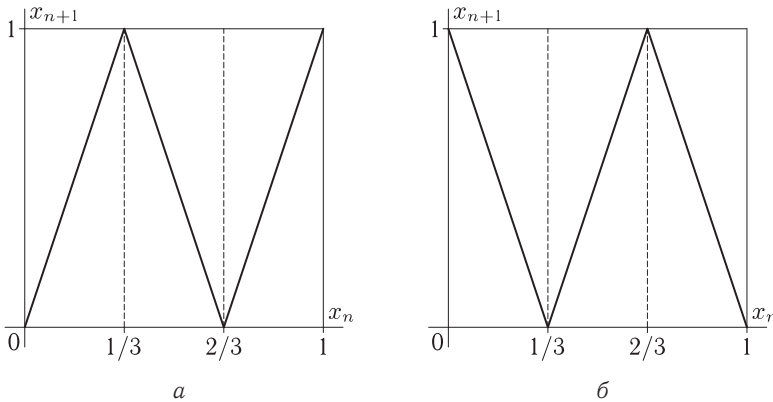


Рис. 1.3. Кусочно-линейные хаотические отображения: *N*-образное отображение (а) и инверсное *N*-образное отображение (б)

*Инверсное N-образное отображение*, как и «оригинал» (1.1.25), имеет три линейные ветви (рис. 1.3, б):

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 - 3x_n, & 0 \leq x_n < 1/3, \\ 3x_n - 1, & 1/3 \leq x_n < 2/3, \\ 3 - 3x_n, & 2/3 \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.28)$$