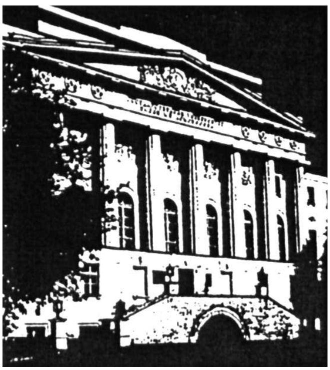
Серия

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

основана в 2002 году по инициативе ректора
МГУ им. М.В. Ломоносова
академика РАН В.А. Садовничего
и посвящена

250-летию
Московского университета



УДК 519.6
ББК 22.18
А 47

Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-0590-3.

В книге собрано примерно 700 задач на отыскание экстремумов для конечномерного случая, для задач классического вариационного исчисления, оптимального управления и выпуклого программирования. Содержатся элементы функционального анализа, дифференциального исчисления и выпуклого анализа.

В книге приведены теория, необходимая для решения задач, и примеры. Основу решения всех задач составляет единый принцип, восходящий к Лагранжу. Часть задач приведена с решениями. Имеется большое количество трудных задач, которые могут быть использованы в качестве курсовых и дипломных работ.

Для студентов вузов по специальностям «Математика» и «Прикладная математика», а также для аспирантов и научных работников.

Рекомендовано Учебно-методическим Советом по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию в качестве задачника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по группе математических направлений и специальностей.

ISBN 978-5-9221-0590-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II

КЛАССИЧЕСКОЕ ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава III

ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Глава IV

СВОДНЫЙ ОТДЕЛ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке этого издания были внесены лишь минимальные изменения. В основном мы ограничились лишь исправлением замеченных опечаток.

Авторы

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Роль методов оптимизации в экономике, технике, естествознании и самой математике огромна. Поэтому в наше время математическое образование немыслимо без элементов теории оптимизации.

Теория оптимизации переживает период бурного развития. Всего лишь четверть века тому назад в курсах математики касались лишь двух ее разделов — экстремумов функций многих переменных и вариационного исчисления. За эти годы сформировались новые дисциплины — выпуклый анализ, линейное и нелинейное программирование, оптимальное управление. Ныне они находят свое место в курсах высшей математики втузов и университетов. Создание этих дисциплин должно, без сомнения, внести новое в преподавание как традиционных разделов теории экстремальных задач, так и некоторых частей классического и функционального анализа.

Цель этой книги — способствовать тому, чтобы методы теории экстремальных задач заняли достойное место в современном математическом образовании.

Мы рассчитываем на то, что задачник будет использован и в обычных технических вузах, и в технических вузах с углубленным курсом математики, и в университетах. Нам представляется, что при любом уровне преподавания математики должно найтись место для элементов теории экстремальных задач. В нашем задачнике представлены важные разделы этой теории: в § 2 — математическое программирование, в §§ 5–7 — классическое вариационное исчисление, в § 10 — оптимальное управление. Эти параграфы являются основными в задачнике. Пункты «Постановка задачи» и «Правило решения» названных параграфов, а также примеры, разобранные в них, не требуют для своего понимания никаких специальных знаний, кроме основ математического анализа. Вместе с тем они дают возможность решать бóльшую часть задач этой книги. Таким образом, решать основную массу задач можно, опираясь лишь на минимальный курс дифференциального и интегрального исчисления.

В вузах с углубленным изучением математики могут быть использованы теоретические разделы перечисленных параграфов, относящиеся к необходимым условиям экстремума. Этот материал мы старались тщательно отработать методически. При доказательствах используются лишь основополагающие факты классического анализа, среди которых важнейшее место занимают теоремы об обратной и неявной функции.

Все остальное в теоретической части книги рассчитано на преподавание в университетах. § 1 посвящен базовым понятиям и теоремам функционального анализа, с помощью которых доказываются важнейшие теоремы теории экстремальных задач. На них же основывается выпуклый анализ. Основам выпуклого анализа посвящен § 3. Роль выпуклого анализа в общей теории экстремальных задач раскрывается в §§ 4, 9. Этот материал можно использовать в специальных курсах. § 8 посвящен общей задаче классического вариационного исчисления — задаче Лагранжа.

Материал § 12 призван показать, как можно использовать элементы теории экстремальных задач в курсах алгебры, анализа, геометрии, а также в различных исследованиях теоретического и прикладного характера.

Несколько слов об особенностях этой книги. Главная ее особенность состоит в том, что она построена на *единой методологии*, основывающейся на общем принципе исследования экстремальных задач, восходящем к Лагранжу. Сам принцип излагается во введении. Освоив его, можно приступать сразу к решению задач любого раздела. Сводный отдел (§ 11) как раз и приспособлен для такой методики решения экстремальных задач.

Вторая важная особенность состоит в том, что мы стремились дать *исчерпывающее исследование задач*. Поэтому в задачнике большее, чем обычно, внимание уделено достаточным условиям.

И наконец, мы всюду, где это возможно, старались подчеркивать *плодотворность новых методов теории* — выпуклого анализа, выпуклого программирования и оптимального управления.

В задачнике около 700 задач. Практически все они снабжены ответами. Часть задач приведена с решениями.

При написании книги нашел отражение опыт преподавания курсов оптимизации на механико-математическом факультете МГУ. Задачник примыкает к учебному пособию «Оптимальное управление», написанному В. М. Алексеевым, В. М. Тихомировым и С. В. Фоминым (Наука, 1979 г.). Но, в отличие от этого пособия, задачник рассчитан на более широкую аудиторию. Поэтому в важнейших частях изложение материала независимо от упомянутого пособия.

Работа над задачником едва лишь началась, когда в расцвете своих творческих сил скончался В. М. Алексеев, очень много сил отдавший разработке и постановке на механико-математическом факультете лекционных курсов и семинарских занятий. Общий замысел этой книги и ее план принадлежат В. М. Тихомирову, теоретические разделы явились плодом нашего совместного труда, в составлении и подборе задач бо́льшая доля принадлежит Э. М. Галееву.

При работе над разделом «Задачи» мы использовали материалы из архива В. М. Алексеева, «Сборник задач по оптимальному управлению», написанный Э. М. Галеевым, А. Г. Кушниренко и В. М. Тихомировым (ротапринтное издание МГУ, 1980 г.), сборник из 100 задач, подготовленный В. М. Алексеевым и В. М. Тихомировым для французского издания учебного пособия, материалы некоторых учебников и задачников (из тех, что приведены в списке литературы в разделе «Учебники и учебные пособия») и некоторые ротапринтные издания по оптимизации, любезно присланные нам их авторами, в частности, пособия Казахского, Киевского и Ярославского университетов.

Мы рады выразить свою благодарность сотрудникам кафедры общих проблем управления механико-математического факультета за большую и разностороннюю помощь, особенно — М. И. Зеликину, С. В. Конягину и А. В. Фурсикову. Мы благодарны также студентам и аспирантам кафедры — настоящим и бывшим — способствовавшим улучшению книги. И в первую очередь — Ю. А. Александрову, С. А. Аюнцу, А. П. Буслаеву, Динь Зунгу, Б. Лудереру, Г. Г. Магарил-Ильяеву, Е. Б. Пекарю и А. А. Петросяну.

Мы будем очень признательны за любые замечания и предложения, относящиеся к замыслу, плану и содержанию книги.

Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров

Введение

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

0.1. Основные понятия, связанные с экстремальными задачами. С задачами на максимум и минимум мы сталкиваемся еще в школе. Рассмотрим для примера две планиметрические задачи.

Задача 1. Найти на данной прямой такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух заданных точек была минимальна (рис. 1).

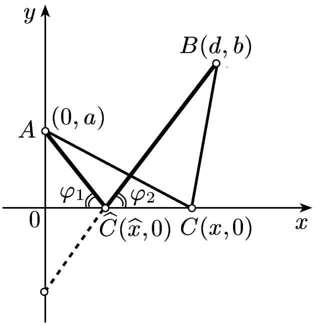


Рис. 1

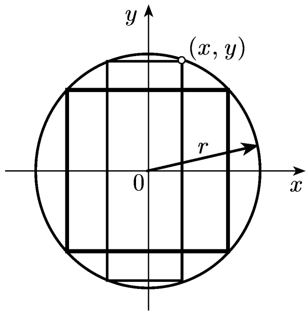


Рис. 2

Задача 2. Вписать в круг прямоугольник наибольшей площади (рис. 2).

Первая задача — это задача на минимум, вторая — на максимум. Слово maximum по латыни означает «наибольшее», слово minimum — «наименьшее». Оба эти понятия — *максимум* и *минимум*, наибольшее и наименьшее — объединяются единым термином *экстремум* (от латинского extremum, означающего «крайнее»). Иногда употребляют слово *оптимальный*, от латинского optimus, что означает наилучший, совершенный. Таким образом, задачи 1 и 2 — это *экстремальные задачи*, или *задачи оптимизации*. Теорию задач на отыскание наибольших и наименьших величин называют или *теорией экстремальных задач*, или *теорией оптимизации*, или иногда *теорией оптимального управления*. При употреблении последнего термина обычно предполагается связь задач с практическими приложениями.

Задачи 1 и 2 сформулированы словесно, без формул. Экстремальные задачи, возникающие в естественных науках или на практике, обычно ставятся именно так — словесно, в содержательных терминах той области, где данная задача возникла. Чтобы можно было воспользоваться теорией, необходим перевод задач на математический язык. Этот перевод называется *формализацией*. Одна и та же задача может быть формализована разными способами, и простота решения зачастую сильно зависит от того, насколько удачно она формализована.

Осуществим формализации задач 1 и 2. Начнем с задачи 1. Направим ось Ox по заданной прямой, а ось Oy проведем через точку A (см. рис. 1). Пусть координаты точек A и B таковы: $A = (0, a)$ и $B = (d, b)$; координата точки $C = (x, 0)$. Тогда мы приходим к следующей задаче: *найти минимум функции*

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

по всем $x \in \mathbf{R}$.

Формализуем задачу 2. Пусть окружность описывается уравнением $x^2 + y^2 = r^2$. Направим оси Ox и Oy параллельно сторонам прямоугольника и обозначим через (x, y) координаты вершины прямоугольника, лежащей в первом квадранте (см. рис. 2). Тогда площадь прямоугольника равна $4xy$. Получаем такую задачу: *найти максимум функции* $f_0(x, y) = 4xy$ *при условиях*

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad f_2(x, y) = x \geqslant 0,$$
$$f_3(x, y) = y \geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что условия $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ излишни, и задача *найти максимум* $4xy$ *при условии* $x^2 + y^2 = r^2$ эквивалентна задаче с неравенствами.

Любая формализованная задача устроена аналогично. Она включает в себя следующие элементы: *функционал* $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ (X — *область определения функционала*) *и ограничение*, т. е. подмножество $C \subset X$.

Поясним некоторые встретившиеся здесь обозначения и термины: $\overline{\mathbf{R}}$ — это расширенная действительная (вещественная) прямая, т. е. совокупность всех действительных чисел, дополненная значениями $+\infty$ и $-\infty$; запись $F\colon X \to Y$ означает, что отображение F имеет область определения X, а $F(x)$ для каждого элемента x из X лежит во множестве Y; слово «функционал» мы употребляем для отображений в расширенную прямую $\overline{\mathbf{R}}$. Таким образом, формализовать экстремальную задачу — это значит точно описать ее элементы f, X и C.

Для формализованной задачи употребляется запись

$$f(x) \to \inf\,(\sup); \quad x \in C. \tag{з}$$

Точки $x \in C$ называются *допустимыми*. Если $C = X$, то задача называется *задачей без ограничений*.

Задачу на максимум всегда можно свести к задаче на минимум, заменив задачу $f(x) \to \sup$, $x \in C$, задачей $\widetilde{f}(x) \to \inf$, $x \in C$, где $\widetilde{f}(x) = -f(x)$. И, наоборот, задачу на минимум можно аналогичным образом свести к задаче на максимум. Для определенности в тех случаях, когда формулировки необходимых условий экстремума в задачах на минимум и максимум разные, будем выписывать их только для задачи на минимум. Если необходимо исследовать обе задачи, то будем писать $f(x) \to \mathrm{extr};\ x \in C$.

Приведем формализованные записи задач 1 и 2. Задача 1 $(X = C = \mathbf{R})$:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \to \inf\,. \qquad (з_1)$$

Задача 2 (X — здесь двумерная плоскость, обозначаемая $\mathbf{R}^2$):

$$4xy \to \sup; \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \qquad (з_2)$$

Для задачи 2 имеется, как было сказано выше, другая формализация:

$$4xy \to \sup; \quad x^2 + y^2 = r^2. \qquad (з_2')$$

Задача $(з_1)$ — задача без ограничений, задача $(з_2)$ — с ограничением $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$, задаваемым в виде равенств и неравенств, задача $(з_2')$ — с ограничением типа равенства.

Допустимая точка $\widehat{x}$ называется *абсолютным* (или еще говорят *глобальным*) *минимумом* (*максимумом*) в задаче (з), если $f(x) \geqslant f(\widehat{x})$ для любого $x \in C$ (соответственно $f(x) \leqslant f(\widehat{x})$ для любого $x \in C$). При этом мы пишем $\widehat{x} \in \mathrm{abs\,min}\,з$ $(\mathrm{abs\,max}\,з)$. Абсолютный минимум (максимум) задачи будем называть *решением задачи*. Величина $f(\widehat{x})$, где $\widehat{x}$ — решение задачи, называется *численным значением задачи* (иногда для сокращения говорим просто *значение задачи*). Эту величину будем обозначать $S_з$ или $S_{\min}(S_{\max})$.

В задаче 1 абсолютный минимум $\widehat{x}$, определяющий искомую точку $\widehat{C} = (\widehat{x}, 0)$, характеризуется, как известно из геометрии, тем, что острые углы, образованные отрезками $[A\widehat{C}]$ и $[\widehat{C}B]$ с осью Ox, равны («угол падения равен углу отражения»); значение задачи $S_{з_1} = \sqrt{(a+b)^2 + d^2}$.

В задаче 2 искомым прямоугольником является квадрат (попробуйте доказать это геометрически); это соответствует решению $\widehat{x} = r/\sqrt{2}$, $\widehat{y} = r/\sqrt{2}$, $S_{з_2} = 2r^2$.

Кроме глобальных экстремумов будем также рассматривать локальные экстремумы. Дадим их строгое определение. Пусть в задаче (з) X — нормированное пространство. Говорят, что точка $\widehat{x}$ доставляет в задаче (з) *локальный минимум* (*максимум*), и пишут $\widehat{x} \in \mathrm{loc\ min}\ з$ $(\mathrm{loc\ max}\ з)$, если $\widehat{x} \in C$ и существует $\delta > 0$ такое, что для любой допустимой точки x, для которой $\|x - \widehat{x}\| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(\widehat{x})$ $(f(x) \leqslant f(\widehat{x}))$. Иными словами, если $\widehat{x} \in \mathrm{loc\,min}\,з$ $(\mathrm{loc\,max}\,з)$, то существует окрестность $\mathscr{U}$ точки $\widehat{x}$ такая, что $\widehat{x} \in \mathrm{abs\ min}\ з'$ $(\mathrm{abs\ max}\ з')$ в задаче

$$f(x) \to \inf\,(\sup); \quad x \in C \cap \mathscr{U}\,. \qquad (з')$$

Теория экстремальных задач дает правила нахождения решений экстремальных задач. В большинстве своем эти правила выделяют некоторое подмножество точек, среди которых должно содержаться решение задачи. Это множество точек, которое мы называем *критическим*, возможно, несколько шире, чем множество абсолютных и даже локальных экстремумов. После нахождения всех критических точек надо выделить из них решения.

Найдем критические точки, локальные и абсолютные экстремумы в следующей задаче.

Задача 3.

$$f(x) = x^3(x^2 - 1) \to \mathrm{extr}; \quad -1 \leqslant x \leqslant 2 \qquad (з_3)$$

(рис. 3).

Абсолютный экстремум в задаче может достигаться на концах отрезка или во внутренней точке. Если экстремум достигается во

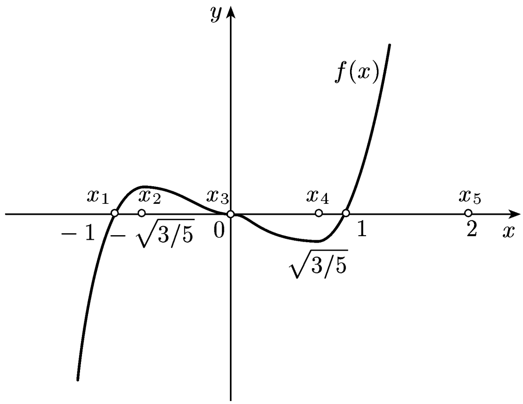


Рис. 3

внутренней точке, то в этой точке производная должна равняться нулю, т. е.

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 5x^4 - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-\sqrt{3/5},\ 0,\ \sqrt{3/5}\}.$$

Таким образом, имеем 5 критических точек: $x_1 = -1$, $x_2 = -\sqrt{3/5}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \sqrt{3/5}$, $x_5 = 2$, из которых точки x_2, x_3, x_4 являются стационарными. Из графика функции f (см. рис. 3) видно, что x_1, $x_4 \in \mathrm{loc\,min}\ з_3$; $x_2, x_5 \in \mathrm{loc\,max}\ з_3$; $x_4 \in \mathrm{abs\,min}\ з_3$; $x_5 \in \mathrm{abs\,max}\ з_3$.

0.2. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями. Сущность принципа Лагранжа состоит в редукции задач с ограничениями к ряду задач более простой структуры (в большинстве случаев — к задачам без ограничений).

Прежде чем переходить к описанию этого принципа, покажем на примере задачи 1 (п. 0.1), как следует поступать с задачами без ограничений. Функция f в формализации ($з_1$) из п. 0.1 задачи 1 дифференцируема. Из курса дифференциального исчисления известна теорема Ферма, согласно которой, если точка $\widehat{x}$ доставляет локальный экстремум дифференцируемой функции f, то выполнено соотношение $f'(\widehat{x}) = 0$. Имеем

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Уравнение $f'(x)=0$ имеет единственное решение $\widehat{x}$, при котором как раз и выполнено соотношение «угол падения равен углу отражения» (см. рис. 1):

$$\frac{\widehat{x}}{\sqrt{a^2+\widehat{x}^2}} = \frac{d-\widehat{x}}{\sqrt{b^2+(d-\widehat{x})^2}} \Longleftrightarrow \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \Longleftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2.$$

Из сказанного вытекает, что если абсолютный минимум существует, то им может быть лишь точка $\widehat{x}$; другие точки не могут быть даже локальными минимумами. Можно доказать, что в задаче (з$_1$) минимум действительно существует. (Доказательство «теоремы существования» решения в (з$_1$) осуществляется, как и в большинстве подобных случаев, с помощью теоремы Вейерштрасса — см. далее п. 1.2.1.) Таким образом, задача (з$_1$) решена и $\widehat{x}$ есть ее решение.

Все вышесказанное дает повод наметить план действий для решения задач без ограничений и при наличии некоторых простейших ограничений (такого рода задачи мы далее называем *элементарными*).

1. Формализовать задачу.
2. Выписать необходимые условия экстремума.
3. Найти все критические точки.
4. Отыскать решения среди критических точек (например, доказав, что решение существует, и перебрав значения функционала в критических точках) или показать, что решения нет.

Принцип Лагранжа — это правило исследования задач с ограничениями путем сведения первоначальной задачи к отысканию и исследованию критических точек некоторой элементарной задачи. Покажем, в чем состоит принцип Лагранжа, на примере конечномерных задач с ограничениями типа равенств.

Рассмотрим задачу ($X = \mathbf{R}^n$)

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}; \quad f_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad f_m(x) = 0, \tag{з}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Здесь ограничение задается системой равенств $C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$. Функционал f_0 и функции f_1, задающие уравнения связи $f_i(x) = 0$, будем предполагать непрерывно дифференцируемыми (иначе говоря, такими, что все их частные производные первого порядка непрерывны).

Посмотрим, как предлагал решать эту задачу сам Лагранж. Он пишет: «Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одной или несколькими функциями, то нужно прибавить к функции, экстремум которой ищется, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных».

Воспользуемся правилом Лагранжа (несколько уточнив его). Первое, что нужно сделать согласно Лагранжу, это «прибавить к функции, экстремум которой ищется, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители». Составим функцию

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x,\, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x), \quad \lambda = (\lambda_0,\, \ldots,\, \lambda_m),$$

которую будем называть *функцией Лагранжа*. Числа λ_i называются *множителями Лагранжа*. Первое уточнение состоит в том, что и функция, экстремум которой ищется, домножена на неопределенный множитель. Если не сделать этого уточнения, то рецепт Лагранжа может оказаться неверным (см. далее пример 1). При этом в задаче на минимум следует брать $\lambda_0 \geqslant 0$, в задаче на максимум брать $\lambda_0 \leqslant 0$.

Второе, что необходимо сделать согласно Лагранжу, это «искать максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы». По замыслу Лагранжа, следовательно, надо рассмотреть задачу

$$\mathscr{L}(x,\, \lambda) \to \operatorname{extr}\ (\text{по } x) \tag{з$_э$}$$

(мысленно зафиксировав λ).

Задача (з$_э$) проще, чем исходная, так как здесь ограничений нет. Она относится к классу элементарных. Не будем искать ее максимумы и минимумы (ибо может оказаться, что ее максимумы и минимумы не имеют отношения к максимуму и минимуму исходной задачи — см. далее пример 2). Поступим несколько иначе, будем искать *стационарные точки в задаче* (з$_э$), т. е. напишем для элементарной задачи (з$_э$) необходимое условие минимума или максимума, выражающееся все в той же самой теореме Ферма. Согласно этой теореме должны удовлетворяться уравнения

$$\mathscr{L}_x(x,\, \lambda) = 0 \iff \mathscr{L}_{x_i}(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, \lambda_0,\, \ldots,\, \lambda_m) = 0,$$
$$i = 1,\, \ldots,\, n$$

(в которых не все множители Лагранжа равны нулю). Полученные n уравнений, дополненные m уравнениями связи, и «послужат для определения всех неизвестных». В самом деле, хотя неизвестных $(x,\, \lambda)$ на одно больше, чем количество уравнений, но надо учесть то обстоятельство, что множители Лагранжа можно умножать на любое число, отличное от нуля. И именно в силу этого число уравнений равно числу неизвестных. В подобных случаях мы будем говорить о *полноте набора условий* для определения стационарных точек. Надо иметь в виду, что наибольший интерес имеют те случаи, когда $\lambda_0 \neq 0$, ибо при $\lambda_0 = 0$ соотношения принципа Лагранжа указывают лишь на некоторую вырожденность ограничений (от которой зачастую легко избавиться) и оказываются не связанными с функционалом. Решения полученных уравнений ($\mathscr{L}_{x_i} = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ f_j(x) = 0,\ \ j = 1, \ldots, m$) и образуют совокупность стационарных точек.

Таким образом, для решения задачи (з) следует:

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

2. Выписать необходимые условия экстремума:

$$\mathscr{L}_x(x, \lambda) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

3. Найти стационарные точки, т. е. допустимые точки, являющиеся решениями уравнений п. 2, в которых не все $\lambda_i,\ i = 0, 1, \ldots, m$, равны нулю. При этом бывает полезно рассмотреть отдельно случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно в задаче на минимум положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе, в задаче на максимум — равным минус единице или любой другой отрицательной константе.

4. Отыскать решения среди всех стационарных точек или доказать, что решений нет.

Описанная процедура и называется *принципом Лагранжа*. Этот принцип применим не только к задаче (з), но и к очень широкому кругу экстремальных задач. Большинство задач из этого задачника можно решить с помощью этого принципа. Но при этом важно иметь в виду следующее:

а) Принцип Лагранжа применим, вообще говоря, не всегда. В примере 3, приведенном ниже, решение задачи существует, но принцип Лагранжа к нему не приводит.

б) Сфера применимости принципа Лагранжа достаточно широка. Иногда к задаче нельзя применить имеющуюся теорему, однако принцип Лагранжа (примененный без обоснования) тем не менее приводит к некоторым точкам, подозрительным на экстремум, из которых можно выделить решение.

Решим теперь с помощью принципа Лагранжа задачу 2 п. 0.1.

1. Рассмотрим более простую формализацию ($з_2'$) (где множитель 4 при функционале отброшен):

$$xy \to \sup; \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \lambda_0 xy + \lambda_1(x^2 + y^2 - r^2).$$

2. Выпишем необходимые условия:

$$\mathscr{L}_x = 0, \quad \mathscr{L}_y = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 y + 2\lambda_1 x = 0, \quad \lambda_0 x + 2\lambda_1 y = 0.$$

3. Найдем стационарные точки. Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 \neq 0$ (ибо не все множители Лагранжа равны нулю) и, значит, $x = y = 0$. Но тогда условие $x^2 + y^2 = r^2$ не удовлетворяется. Следовательно, в случае $\lambda_0 = 0$ стационарных точек нет. Положим $\lambda_0 = -1$. Необходимые условия переписываются в виде

$$y = 2\lambda_1 x, \quad x = 2\lambda_1 y.$$

Из этих уравнений определяются 4 стационарные точки:

$$(r/\sqrt{2},\, r/\sqrt{2}), \quad (r/\sqrt{2},\, -r/\sqrt{2}), \quad (-r/\sqrt{2},\, r/\sqrt{2}), \quad (-r/\sqrt{2},\, -r/\sqrt{2}).$$

4. Максимальное значение доставляют точки $(r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$ и $(-r/\sqrt{2}, -r/\sqrt{2})$. Соответствующие прямоугольники являются квадратами. Обе точки действительно являются решениями, но это необходимо еще обосновать. Для обоснования можно сослаться на теорему Вейерштрасса о существовании решения в задаче. Можно поступить и по-другому. Пусть $x = (r/\sqrt{2} + \alpha)$, $y = (r/\sqrt{2} + \beta)$ и $x^2 + y^2 = r^2$. Тогда $\alpha^2 + \beta^2 = -2(\alpha + \beta)r/\sqrt{2}$ и, следовательно,

$$xy = (r/\sqrt{2} + \alpha)(r/\sqrt{2} + \beta) = r^2/2 + \alpha\beta - \alpha^2/2 - \beta^2/2 \leqslant r^2/2,$$

т. е. $(\widehat{x}, \widehat{y}) = (r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$ есть решение задачи. Аналогичные рассуждения можно провести и для второй точки.

Ответ. Решением задачи является квадрат.

В общем случае принцип Лагранжа применяется так:

1. Формализовать задачу к виду

$$f(x, u) \to \inf; \quad F(x, u) = 0, \quad u \in \mathscr{U},$$

$f\colon X \times \mathscr{U} \to \overline{\mathbf{R}}$, $F\colon X \times \mathscr{U} \to Y$, где X и Y — нормированные пространства. Это — задача с ограничениями типа равенств, параметризованных некоторым множеством $\mathscr{U}$. Еще можно сказать, что это *задача с ограничениями типа равенств и включений.*

Составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, u, y^*, \lambda_0) = \lambda_0 f(x, u) + \langle y^*, F(x, u)\rangle,$$

где y^* — элемент сопряженного пространства Y^*.

В функцию Лагранжа ограничения типа включений $u \in \mathscr{U}$ не входят.

2. Для задач

$$\mathscr{L}(x, \widehat{u}, y^*, \lambda_0) \to \inf \quad (\text{по } x),$$
$$\mathscr{L}(\widehat{x}, u, y^*, \lambda_0) \to \inf, \quad u \in \mathscr{U},$$

выписать необходимые условия.

3. Найти критические точки, т. е. допустимые точки, являющиеся решениями уравнений п. 2, в которых y^* и λ_0 одновременно не равны нулю. При этом удобно бывает рассмотреть отдельно случаи $\lambda_0 = 0$

и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4. Отыскать решения среди всех критических точек или доказать, что решения нет.

В заключение приведем те три примера, о которых говорилось выше.

Пример 1 (показывает, что в правиле множителей Лагранжа не всегда можно полагать $\lambda_0 = 1$).

$$f_0(x_1,\, x_2) = x_1 \to \inf; \quad f_1(x_1,\, x_2) = x_1^3 - x_2^2 = 0 \quad (X = \mathbf{R}^2).$$

Функции f_0 и f_1 непрерывно дифференцируемы. Легко понять, что решение задачи $\widehat{x} = (0,\, 0)$. Если прямо следовать Лагранжу, то надо составить сумму $\mathscr{L} = x_1 + \lambda(x_1^3 - x_2^2)$ и далее решать уравнения

$$\mathscr{L}_{x_1} = 0, \quad \mathscr{L}_{x_2} = 0 \Longleftrightarrow 1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \quad -2\lambda x_2 = 0.$$

Но эти уравнения несовместны с уравнением связи $x_1^3 - x_2^2 = 0$.

Пример 2 (показывает, что экстремум функции Лагранжа как задачи без ограничений может не совпадать с экстремумом исходной задачи с ограничениями).

$$f_0(x_1,\, x_2) = x_2^2 - x_1 \to \inf;$$

$$f_1(x_1,\, x_2) = x_1 + x_1^3 = 0 \quad (X = \mathbf{R}^2).$$

Ясно, что решение задачи $\widehat{x} = (0,\, 0)$. Функция Лагранжа: $\mathscr{L} = \lambda_0(x_2^2 - x_1) + \lambda(x_1 + x_1^3)$. Необходимое условие экстремума:

$$\mathscr{L}_{x_1} = 0, \quad \mathscr{L}_{x_2} = 0 \Longleftrightarrow -\lambda_0 + \lambda(1 + 3x_1^2) = 0, \quad 2\lambda_0 x_2 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \neq 0$ и, следовательно, $1 + 3x_1^2 = 0$ — противоречие. Значит, $\lambda_0 \neq 0$. Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда функция Лагранжа примет вид

$$\mathscr{L} = x_2^2 - x_1 + \lambda(x_1 + x_1^3).$$

Однако ни при каких λ эта функция в точке $\widehat{x} = (0,\, 0)$ не имеет даже локального минимума.

Пример 3 (показывает, что принцип Лагранжа при несоблюдении определенных условий может приводить к неверным результатам).

Пусть

$$X = Y = l_2, \quad f(x) = x_1 + x_2/2 + \ldots + x_n/n + \ldots,$$
$$F(x) = (x_1,\, x_2/2, \ldots,\, x_n/n,\, \ldots)$$
$$(x = (x_1,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)).$$

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \inf; \quad F(x) = 0.$$

Здесь $\widehat{x} = 0$ есть единственный допустимый элемент, следовательно, он и является решением задачи. Если предположить, что существуют множители Лагранжа $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ и $y^* \in l_2^*$, не равные одновременно нулю и такие, что для элементарной задачи $\mathscr{L} = \lambda_0 f(x) + \langle y^*,\, F(x)\rangle \to \inf$

выполнено необходимое условие минимума $\mathscr{L}(x,\lambda_0,y^*)$ (теорема Ферма), то

$$\mathscr{L}_x(x,\lambda_0,y^*)=0 \Longleftrightarrow \lambda_0=-y_1,\quad \ldots,\quad \lambda_0=-y_n,\quad \ldots,$$

где $y^*=(y_1,\ldots,y_n,\ldots)\in l_2$, поскольку l_2^* изоморфно l_2 (КФ, гл. IV, § 2). Но эти условия противоречивы: либо $\lambda_0\neq 0$, тогда $y^*=(-\lambda_0,\ldots,-\lambda_0,\ldots)\notin l_2$; либо $\lambda_0=0$, тогда $y^*=0$, т. е. оба множителя Лагранжа равны нулю. Здесь l_2 — пространство всех последовательностей $x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$, для которых $\|x\|=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}<\infty$, l_2^* — пространство, сопряженное к l_2 (КФ, гл. IV, § 2).

Упражнения. В упр. 1–8 привести примеры задач без ограничений об экстремуме бесконечно дифференцируемых функций одной или двух переменных, в которых выполняются указанные ниже требования.

1. Абсолютные максимум и минимум достигаются в бесконечном числе точек.

2. Функционал ограничен, абсолютный максимум достигается, минимум — нет.

3. Функционал ограничен, но абсолютные минимум и максимум не достигаются.

4. Функционал ограничен, имеет критические точки, но абсолютные минимум и максимум не достигаются.

5. Функционал ограничен, имеет локальные максимумы и минимумы, но глобальные максимум и минимум не достигаются.

6. Имеется единственный локальный экстремум, не являющийся глобальным.

7. Имеется бесконечное число локальных максимумов, но нет ни одного локального минимума.

8. Ограничение функции, заданной на плоскости, на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет в нуле локальный минимум, но вместе с тем начало координат не является точкой локального минимума.

9. Можно ли утверждать, что если функция одной переменной имеет в какой-либо точке локальный минимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки функция убывает, а справа возрастает?

10. Пусть функция f определена и дифференцируема на $\mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=+\infty$ и $f'(x)$ имеет единственный нуль $\widehat{x}$. Доказать, что $\widehat{x}$ является точкой абсолютного минимума функции f.

11. Пусть каждый функционал на некотором множестве X достигает своего абсолютного минимума. Доказать, что X — конечное множество.

Формализовать упр. 12–17.

12. Найти кратчайшее расстояние от заданной точки $(1,\ 2)$ на плоскости до прямой $2x_1 + 3x_2 = 1$.

13. Найти кратчайшее расстояние от заданной точки в трехмерном пространстве до заданной плоскости.

14. Вписать в круг треугольник с наименьшей суммой квадратов сторон.

15. Найти на плоскости точку, сумма расстояний от которой до трех заданных точек минимальна.

16. Разделить заданное положительное число на две части так, чтобы произведение произведения этих частей на их разность было максимальным.

17. Среди полиномов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, найти полином, имеющий наименьшую норму в $L_2([-1,\ 1])$.

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

§ 1. Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления

Многие факты, отмеченные в этом параграфе, содержатся в книге АТФ. Поэтому мы будем иногда ограничиваться лишь формулировками теорем.

1.1. Нормированные и банаховы пространства.

1.1.1. Основные определения. Линейное пространство X называется *нормированным*, если на X определен функционал $\|\cdot\|\colon X \to \mathbf{R}$, называемый *нормой* и удовлетворяющий условиям:

а) $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in X$ и $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

б) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}, \quad \forall\, x \in X$;

в) $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| \quad \forall\, x_1,\, x_2 \in X$.

Иногда, чтобы подчеркнуть, что норма задана именно на X, мы пишем $\|\cdot\|_X$. Две нормы в X $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X.$$

Всякое нормированное пространство становится *метрическим*, если в нем ввести расстояние $\rho(x_1,\, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. Полное относительно введенного расстояния пространство называется *банаховым* пространством.

1.1.2. Примеры банаховых пространств.

Пример 1. Конечномерное пространство $\mathbf{R}^n$, состоящее из векторов $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$, с нормой $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

Пример 2. Пространство $C(K,\, \mathbf{R}^n)$ непрерывных вектор-функций $x(\cdot)\colon K \to \mathbf{R}^n$, заданных на компакте K, с нормой $\|x(\cdot)\|_0 = \max\limits_{t \in K} |x(t)|$.

Пример 3. Пространство $C^r([t_0,\, t_1],\, \mathbf{R}^n)$ r раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций $x(\cdot)\colon [t_0,\, t_1] \to \mathbf{R}^n$, заданных на конечном отрезке $[t_0,\, t_1] \subset \mathbf{R}$, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_r = \max\{\|x(\cdot)\|_0,\, \ldots,\, \|x^{(r)}(\cdot)\|_0\}.$$

Пример 4. Пространство l_2, состоящее из последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, с нормой, задаваемой формулой $\|x\| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2\Big)^{1/2}$.

1.1.3. Произведение пространств. Пусть X и Y — нормированные пространства. Декартово произведение $X \times Y$ можно превратить в нормированное пространство, введя норму

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

(легко проверить, что все аксиомы нормы выполняются). Возможны и другие эквивалентные нормировки (см. далее упр. 8).

Отметим очевидное утверждение: *декартово произведение банаховых пространств банахово.*

1.1.4. Сопряженное пространство и сопряженный оператор. Совокупность X^* всех линейных непрерывных функционалов на нормированном пространстве X образует *сопряженное* к X пространство. Оно является банаховым пространством относительно нормы $\|x^*\|_{X^*} = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \langle x^*, x\rangle$, где $\langle x^*, x\rangle$ означает действие на x функционала x^* (КФ, гл. IV, § 2). Пространство, сопряженное к конечномерному пространству $\mathbf{R}^n$, изоморфно $\mathbf{R}^n$. Скалярное произведение двух векторов $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ представляется в виде суммы $\langle y, x\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i$. Та же сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i$ будет обозначаться нами просто как yx, если $y \in \mathbf{R}^{n^*}$, $x \in \mathbf{R}^n$; при этом следует x считать столбцом, y — строкой (и тогда yx есть не что иное, как произведение матриц).

Пусть X и Y — нормированные пространства и $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$ — линейный непрерывный оператор из X в Y. Тогда можно определить *сопряженный оператор* $\Lambda^*\colon Y^* \to X^*$ такой, что $\langle \Lambda^* y^*, x\rangle = \langle y^*, \Lambda x\rangle$ $\forall\, x \in X$ (КФ, гл. IV, § 2).

Для линейного непрерывного функционала на произведении пространств имеет место следующая очевидная

Лемма. *Всякий функционал $\Lambda \in (X \times Y)^*$ однозначно представим в виде*

$$\langle \Lambda, (x, y)\rangle = \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, y\rangle, \quad \textit{где} \quad x^* \in X^* \quad \textit{и} \quad y^* \in Y^*.$$

Упражнения.

1. Выяснить, какие из перечисленных ниже функций двух переменных и при каких значениях параметров задают норму в $\mathbf{R}^2$:

а) $N(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, \quad p > 0;$

б) $N(x) = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2| + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|$;

в) $N(x) = \max\{|a_{11}x_1 + a_{12}x_2|,\ |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|\}$;

г) $N(x) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2)^{1/2}$.

2. Доказать, что нормы $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ эквивалентны.

3. Доказать, что если $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbf{R}^n$, то единичный шар в этой норме $B = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ является замкнутым выпуклым ограниченным центрально-симметричным множеством, для которого центр — начало координат — является внутренней точкой.

4. Доказать, что если множество B является замкнутым выпуклым ограниченным центрально-симметричным множеством в $\mathbf{R}^n$, для которого центр — начало координат — является внутренней точкой, то существует такая норма, при которой B будет единичным шаром.

5. Доказать, что все нормы в $\mathbf{R}^2$ эквивалентны.

6. Доказать, что все конечномерные нормированные пространства банаховы.

7. Построить пример нормированного, но не банахова пространства.

8. Доказать, что если $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — нормированные пространства, то $\|x\|_X + \|y\|_Y$ и $(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2}$ — эквивалентные нормы в $X \times Y$.

9. Пусть нормированное пространство X состоит из непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций с нормой $\|x(\cdot)\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt$. Принадлежит ли линейный функционал $\langle x^*, x(\cdot)\rangle = x(0)$ пространству X^*?

10. Чему равна норма $\|x\|$, $x \in \mathbf{R}^2$, если единичный шар задается неравенствами:

а) $B = \{(x_1, x_2) \mid -a_1 \leqslant x_1 \leqslant a_1,\ -a_2 \leqslant x_2 \leqslant a_2\}$;

б) $B = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} \leqslant 1,\ -b_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ -b_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\right\}$?

11. Привести пример двумерного подпространства $C([0, 1])$, единичным шаром которого является единичный круг (или иначе: рассечь единичный шар пространства $C([0, 1])$ плоскостью так, чтобы в сечении был круг).

12. Пусть $X = \mathbf{R}^2$. Найти норму пространства, сопряженного $(X, \|\cdot\|)$, если норма в X задается соотношениями:

а) $N(x) = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$;

б) $N(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$;

в) $N(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, \quad p > 1$;

г) $N(x) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2)^{1/2}$,
$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

1.2. Некоторые теоремы из геометрии и функционального анализа.

1.2.1. Теоремы Вейерштрасса о достижении максимума и минимума. Чаще всего будет использована следующая основная

Теорема Вейерштрасса. *Непрерывная функция на непустом ограниченном замкнутом подмножестве конечномерного пространства достигает своих абсолютных максимума и минимума* (Н, т. 1, с. 235).

Выделим простое следствие из этой теоремы, которое часто будем использовать.

Следствие. *Если функция f непрерывна на $\mathbf{R}^n$ и* $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ $\big(\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty\big)$, *то f достигает своего абсолютного минимума* (*максимума*) *на любом замкнутом подмножестве* $\mathbf{R}^n$.

Напомним, что множество A в метрическом пространстве называется *компактом*, если из всякой последовательности элементов из A можно выбрать сходящуюся к элементу из A подпоследовательность или (равносильное определение) если из всякого покрытия A открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Ограниченное и замкнутое подмножество конечномерного пространства является компактом.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$, заданная на метрическом пространстве X, называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*), если для любого C множество $\{x \in X \mid f(x) \leqslant C\}$ $(\{x \in X \mid f(x) \geqslant C\})$ замкнуто.

Следующая обобщенная теорема Вейерштрасса применима ко многим задачам вариационного исчисления и оптимального управления.

Теорема Вейерштрасса (обобщенная). *Полунепрерывная снизу* (*сверху*) *функция f, заданная в метрическом пространстве X, достигает минимума* (*максимума*) *на всяком компакте, содержащемся в X. В частности, f достигает своего минимума* (*максимума*) *на всем X, если для некоторого C множество* $\{x \mid f(x) \leqslant C\}$ $(\{x \mid f(x) \geqslant C\})$ *непусто и компактно* (АТФ, п. 3.1.5).

Теорема Вейерштрасса и следствие из нее сразу вытекают из этой обобщенной теоремы.

1.2.2. Теоремы отделимости. Введем понятия отделимости и строгой отделимости двух множеств. Пусть A и B — некоторые подмножества нормированного пространства X, X^* — сопряженное к X пространство (пространство линейных непрерывных на X функционалов). Говорят, что функционал $x^* \in X^*$ *разделяет* множества A и B, если
$$\langle x^*, x\rangle \leqslant \langle x^*, y\rangle \quad \forall\, x \in A \quad \text{и} \quad \forall\, y \in B.$$
Функционал $x^* \in X^*$ *строго разделяет* множества A и B, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что
$$\langle x^*, x\rangle \leqslant \langle x^*, y\rangle - \varepsilon \quad \forall\, x \in A \quad \text{и} \quad \forall y \in B.$$

В первом случае множества A и B называются *отделимыми*, во втором случае — *строго отделимыми*.

В конечномерном случае функционал x^* можно отождествить с вектором из $\mathbf{R}^n$. Равенство $\langle x^*, x\rangle = \beta$, где $x^* \neq 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, определяет в $\mathbf{R}^n$ гиперплоскость, т. е. линейное многообразие размерности $n-1$. Поэтому отделимость множеств A и B означает существование гиперплоскости, делящей $\mathbf{R}^n$ на две части (полупространства), в одной из которых находится множество A, а множество B расположено в другой. Сформулируем теоремы отделимости для конечномерного случая.

Теорема 1 (первая теорема отделимости в конечномерном случае). *Пусть A — непустое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$, не содержащее точки $b \in \mathbf{R}^n$. Тогда точку b можно отделить от множества A.*

Теорема 2 (вторая теорема отделимости в конечномерном случае). *Пусть A — непустое замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$ и b — точка, не принадлежащая A. Тогда точку b можно строго отделить от A.*

Из теоремы Хана–Банаха (КФ, гл. IV § 1) выводятся следующие теоремы отделимости в произвольном нормированном пространстве.

Теорема 1′ (первая теорема отделимости). *Пусть X — нормированное пространство. Если множества $A \subset X$ и $B \subset X$ выпуклы, непусты, не пересекаются между собой и при этом A открыто, то существует ненулевой функционал $x^* \in X^*$, разделяющий множества A и B* (КФ, гл. IV § 1; АТФ, п. 2.1.4).

Теорема 2′ (вторая теорема отделимости). *Пусть X — нормированное пространство, $A \subset X$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество и $\widehat{x} \in X$ — точка, не принадлежащая A. Тогда найдется ненулевой функционал $x^* \in X^*$, строго разделяющий $\widehat{x}$ и A, т. е. такой, что* $\sup\limits_{x\in A}\langle x^*, x\rangle < \langle x^*, \widehat{x}\rangle$ (АТФ, п. 2.1.4).

Упражнения.

1. Привести пример ограниченной непрерывной функции на ограниченном подмножестве прямой, для которой нижняя и верхняя грани не достигаются.

2. Привести пример ограниченной непрерывной функции на замкнутом подмножестве прямой, для которой нижняя и верхняя грани не достигаются.

3. Пусть X — некоторое подмножество прямой, не являющееся компактом. Доказать, что найдется такая непрерывная на X функция, нижняя грань которой не достигается.

4. Привести пример функции, полунепрерывной снизу, но не непрерывной.

5. Являются ли компактами следующие множества:

а) полуинтервал $[a, b)$;

б) последовательность точек на прямой $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$;

в) подмножество прямой $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [n, n + 1/n]$;

г) в пространстве l_2 эллипсоид $Э = \Big\{x = \{x_k\}_{k \geqslant 1} \in l_2 \,\Big|\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \leqslant \leqslant 1\Big\}$?

6. Привести пример ограниченного замкнутого множества, не являющегося компактом.

7. Привести пример нормированного пространства X и непрерывного функционала $f\colon X \to \mathbf{R}$ такого, что $f(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$, но нижняя грань функционала не достигается.

8. Доказать, что в конечномерном пространстве задача о кратчайшем расстоянии от точки до замкнутого множества всегда имеет решение.

9. Привести пример банахова пространства X, его замкнутого подпространства L и точки $\widehat{x}$, не принадлежащей этому подпространству, таких, что задача о наикратчайшем расстоянии от точки до подпространства не имеет решения.

10. Отделить точку $(2, 3)$ от эллипсоида $x^2/4 + y^2/9 = 1$.

11. Доказать, что в первой теореме отделимости можно взять выпуклые непустые множества A и B такие, что $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ и $\operatorname{int} A \cap B = = \varnothing$.

12. Показать, что в первой теореме отделимости условие открытости отбросить нельзя.

1.3. Леммы. В теории экстремальных задач весьма часто применяются следующие четыре леммы, являющиеся следствиями из теорем отделимости и теоремы Банаха об обратном операторе (КФ, гл. IV § 5).

1.3.1. Лемма о нетривиальности аннулятора.

Напомним что *аннулятором* $A^{\perp}$ подмножества A линейного пространства X называется множество тех линейных функционалов l на X, для которых $\langle l, x\rangle = 0$ $\forall x \in A$. Отметим, что $A^{\perp}$ всегда содержит $0 \in \in X^*$.

Лемма. *Пусть L — замкнутое подпространство нормированного пространства X, причем $L \neq X$. Тогда аннулятор $L^{\perp}$ содержит ненулевой элемент* (АТФ, п. 2.1.4).

В конечномерном случае эта лемма означает, что если L — собственное подпространство в $\mathbf{R}^n$ (т. е. $L \neq \mathbf{R}^n$), то существуют числа $a_1, \ldots, a_n$, не равные одновременно нулю и такие, что $a_1x_1 + \ldots + + a_nx_n = 0$ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in L$.

1.3.2. Лемма о правом обратном операторе. *Пусть X и Y — банаховы пространства, Λ — непрерывный линейный эпиморфизм X на Y ($\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$, $\operatorname{Im}\Lambda = Y$). Тогда существуют отображение $M\colon Y \to X$ (вообще говоря, нелинейное и разрывное) и константа*