Н.Н. Анохин

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

ЧАСТЬ II

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

АСВ

Н.Н. Анохин

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

ЧАСТЬ II

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

3-е издание, дополненное и переработанное

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по строительным специальностям

Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва
2010

ББК 38.112
А69
УДК 624.04

Рецензенты:
кафедра строительной механики и теории упругости Московского института коммунального хозяйства и строительства (заведующий кафедрой – кандидат технических наук, профессор *Н.В. Колкунов*); член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, проф. *Н.Н. Шапошников*

Анохин Н.Н.
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ. Ч II. Статически неопределимые системы: Учебное пособие. 3-е издание, дополненное и переработанное. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2010. – 464 с.

ISBN 978-5-93093-024-4______________

Учебное пособие, которое является второй частью курса строительной механики, разработано в соответствии с программой для строительных специальностей вузов.

Каждый параграф начинается с изложения соответствующего теоретического материала, затем приводятся с подробными решениями 106 характерных типовых примеров по теме и 659 задач для самостоятельного решения, к которым даны ответы.

Пособие будет полезно студентам для самостоятельной работы при выполнении расчетных заданий и подготовке к экзаменам, а также может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий по расчету статически неопределимых плоских стержневых систем.

В основу книги положен многолетний опыт преподавательской работы автора в Московском государственном строительном университете (бывший МИСИ).

This manual relates to the second part of the course of structural mechanics developed for the construction specialists in the field of civil engineering.

Each paragraph starts with a theoretical synopsis further complemented with detailed overview of solved by the author 106 typical problems. Additional 659 problems are offered for self-sufficient home training.

The manual could be of interest and useful for the externally studying students in their preparation work for examinations. Also it could be employed by teaching staff of the technical universities as a pool of examples for the seminars and workshops on statically indeterminate plane bar systems (truss).

This book has been a result of the great experience gained by the author in the process of teaching structural mechanics at Moscow State University of Civil Engineering (pr. MISI).

ISBN 978-5-93093-024-4______________

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

W – число степеней свободы, момент сопротивления сечения

Д – число дисков

Ш – число простых шарниров

C_0 – число опорных стержней

У – число узлов фермы

C – число стержней фермы

K – число замкнутых бесшарнирных контуров, матрица внешней жесткости

k – матрица внутренней жесткости, коэффициент запаса прочности

L – матрица внешней податливости

Л – число лишних связей

q – равномерно распределенная нагрузка

F – сосредоточенная сила

m – сосредоточенный момент

P – обобщенная сила

M – изгибающий момент

Q – поперечная сила

N – продольная сила

$\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$ – изгибающий момент, поперечная и продольная силы от единичной нагрузки

M_P, Q_P, N_P – изгибающий момент, поперечная и продольная силы от заданной нагрузки

E – модуль упругости

G – модуль сдвига

l – длина пролета

h – высота поперечного сечения

b – ширина поперечного сечения

A – площадь поперечного сечения, возможная работа внешних сил, статическая матрица

B – матрица деформаций (деформационная матрица)

$A_В$ – площадь поперечного сечения вертикального стержня

$A_Г$ – площадь поперечного сечения горизонтального (наклонного) стержня

$A_{ВН}$ – возможная работа внутренних сил

J – момент инерции поперечного сечения

$J_В$ – момент инерции поперечного сечения вертикального стержня

$J_Г$ – момент инерции поперечного сечения горизонтального (наклонного) стержня

V_A, V_B, V_C – вертикальные составляющие реакций, возникающих в опорах A, B, C.... Реакции, направленные вверх, принимаются положительными

H_A, H_B, H_C – горизонтальные составляющие реакций, возникающих в опорах A, B, C... Реакции, направленные вправо, принимаются положительными

$H_З$ – усилие в затяжке. Растягивающее усилие считается положительным

Ω – площадь эпюры

α – коэффициент линейного расширения

φ, C, C_1, C_2. – заданные смеще-ния опор

r, r_1, r_2 – коэффициенты жесткости упругоподатливых опор

σ_T – напряжение предела текучести материала

R – расчетное сопротивление материала

R_H – нормативное сопротивление материала

$M_{ПР}$, M_0 – предельный изгибающий момент, воспринимаемый поперечным сечением стержня

$F_{ПР}$ – предельная нагрузка

$W_{ПЛ}$ – пластический момент сопротивления сечения

γ_C – коэффициент условий работы

$t' = |t_1 - t_2|$ – перепад температур по высоте поперечного сечения стержня

$t_0 = \dfrac{(t_1 + t_2)}{2}$ – температура по нейтральной оси стержня

t_1, t_2 – приращения температуры в краевых точках сечения

$\dfrac{t_1}{t_2 = 0}$ – пунктир показывает с какой стороны стержня происходит изменение температуры

$\dfrac{t_1}{t_2}$ – изменение температуры по наружному и внутреннему волокну элемента конструкции

x_K (X_K) – горизонтальное перемещение точки K. Перемещение, направленное вправо, принимается положительным

y_K ($У_K$) – вертикальное перемещение точки K. Перемещение, направленное вверх, принимается положительным

Δ_K – полное перемещение точки K, определяемое по формуле:

$$\Delta_K = \sqrt{x_K^2 + y_K^2}$$

φ_K – угол поворота сечения в точке K. За положительное направление принимается поворот сечения по ходу часовой стрелки

x_{KN} (X_{KN}) – взаимное горизонтальное сближение (положительно) или расхождение (отрицательно) точек K и N

y_{KN} ($У_{KN}$) – взаимное вертикальное сближение (положительно) или расхождение (отрицательно) точек K и N

Δ_{KN} – взаимное сближение (положительно) или расхождение (отрицательно) по направлению прямой KN

φ_{KN} – взаимный угол поворота сечений в точках K и N

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателю учебное пособие проф. Н.Н. Анохина "Строительная механика в примерах и задачах. Ч. II. Статически неопределимые системы" является продолжением вышедшей в 1999 г. книги "Строительная механика в примерах и задачах. Ч. I. Статически определимые системы".

Оно содержит 765 задач по основным разделам части II курса строительной механики "Статически неопределимые стержневые системы" (расчеты методами сил, перемещений, смешанным, комбинированным, матричным методом перемещений, а также расчет стержневых систем с учетом пластических свойств материала методом предельного равновесия) и ответы к ним, в том числе 106 задач с подробными решениями.

В число задач, рассмотренных автором, включены и такие, которые дают ответы на все вопросы расчетно-графических заданий по курсу строительной механики "Статика сооружений".

Изданный учебник "Основы строительной механики стержневых систем" (авт. – проф. Н.Н. Леонтьев и др.) и пособия Н.Н. Анохина образуют единый блок литературы по строительной механике, специально приспособленный к требованиям МГСУ и других вузов, имеющих строительные специальности.

Пособие вызовет большой интерес не только у студентов, для которых оно, собственно, и предназначено, но и у преподавателей строительной механики, поможет им в разработке зачетных и экзаменационных задач.

Особую ценность изданию придает также принятая методика изложения материала, в соответствии с которой в начале каждого параграфа автор приводит теоретический материал, облегчающий освоение предмета. Студент даже может ориентироваться в основном на это пособие, прибегая к помощи учебника лишь для углубленного изучения того или иного вопроса.

Полагаю, что тщательно и с любовью выполненная проф. Н.Н. Анохиным огромная работа принесет большую пользу всем, кто изучает строительную механику или по роду своей деятельности с ней связан.

Акад. РИА,
д-р техн. наук, проф. Д.Н. Соболев

ОТ АВТОРА

Часть I пособия, вышедшая в свет в 1999 г., посвящена плоским статически определимым стержневым системам. В части II пособия изложены методы расчета статически неопределимых систем (методы сил, перемещений, смешанный, комбинированный, матричный метод перемещений), а также вопросы расчета стержневых систем с учетом пластических свойств материала по методу предельного равновесия.

В этих изданиях, разработанных в соответствии с вузовской программой для строительных специальностей, использован многолетний опыт преподавания данного курса на кафедре строительной механики МГСУ (бывший МИСИ).

В данном пособии приведено 765 задач, 106 из них представлено с подробными решениями, к остальным – в конце книги даны ответы.

Каждый параграф начинается с подробного изложения основных вопросов теории, относящихся к конкретной теме. В конце глав предлагаются вопросы для самоконтроля.

В части I для задач и ответов к ним, а также для рисунков принята тройная нумерация: первая цифра показывает номер главы, вторая – номер параграфа этой главы, третья – порядковый номер задачи (ответа) или рисунка данного параграфа. Для формул и примеров принята двойная нумерация: первая цифра показывает номер главы, вторая – порядковый номер формулы или примера данной главы. В части II такой порядок нумерации продолжен.

Автор выражает благодарность рецензентам – проф. Н.В. Колкунову, чл.-кор. РААСН Н.Н. Шапошникову, научному редактору – чл.-кор. РААСН Н.Н. Леонтьеву, акад. РИА Д.Н. Соболеву, проф. М.Г. Ванюшенкову за ценные замечания и рекомендации, сделанные при рецензировании и прочтении рукописи, а также всем сотрудникам кафедры, с которыми автор общался в процессе написания пособия и советы которых способствовали улучшению содержания книги.

Автор будет признателен читателям за отклики и замечания по содержанию пособия, которые можно направлять по адресу: 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, кафедра "Строительная механика".

Глава 5. Расчет сооружений методом сил

Напомним, что под статически неопределимой системой понимается такая геометрически неизменяемая система, в которой внутренние усилия или опорные реакции, или те и другие не могут быть найдены только из уравнений статического равновесия. Такие системы содержат так называемые лишние (избыточные) связи, удаление которых не нарушает геометрической неизменяемости и неподвижности. Количество (число) лишних связей, как и ранее, будем называть степенью статической неопределимости системы.

Основные свойства статически неопределимых систем

1. В статически неопределимых системах от теплового воздействия, смещения опор, неточности изготовления и сборки конструкции, как правило, возникают внутренние усилия и опорные реакции. Эпюры внутренних усилий в этом случае будут прямолинейными.

2. Реакции и усилия в элементах статически неопределимых систем зависят от формы и размеров поперечных сечений стержней, а также от упругости материала сооружения. Поэтому перед расчетом таких систем необходимо задаваться жесткостными характеристиками элементов (EJ, EA, GA) или их соотношениями.

3. В статически неопределимых системах усилия в абсолютно необходимых связях всегда статически определимы.

4. Статически неопределимая система, находящаяся под внешним воздействием, допускает бесконечное множество решений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, но только одно из них будет соответствовать тем условиям, которые накладываются на перемещения с помощью лишних связей. Статически определимая система допускает, как известно, только одно решение, удовлетворяющее условиям равновесия как всей системы, так и отдельных ее частей.

5. В таких системах, в отличие от соответствующих им статически определимых, при действии одинаковых нагрузок возникают меньшие внутренние усилия, деформации и перемещения, к тому же они имеют в большинстве случаев более равномерное распределение.

6. Статически неопределимые системы, в противоположность статически определимым, обладают большей "живучестью", надежностью, так как разрушение части системы не всегда приводит к разрушению всего сооружения.

§ 5.1. Основная идея метода сил. Выбор рациональной основной системы

Перед изучением этого параграфа рекомендуется повторить материал, изложенный в § 1.2.*

Идею метода сил проиллюстрируем на следующем простом примере. Пусть требуется рассчитать раму, изображенную на рис. 5.1.1, *а*, и построить эпюры *M*, *Q*, *N*.

Определим степень статической неопределимости рамы по формуле (1.10): $Л = C_0 + 2Ш - 3Д = 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 2$. Так как заданная рама имеет две лишние связи, с помощью только уравнений равновесия эту задачу решить нельзя. Поступим следующим образом. Отбросим, например, две опорные связи в точках 1 и 2 и заменим их действие неизвестными пока силами X_1 и X_2. Система с отброшенными лишними связями является статически определимой. В дальнейшем такую систему будем называть о с н о в н о й с и с т е м о й метода сил – *О.С.* (рис. 5.1.1, *б*).

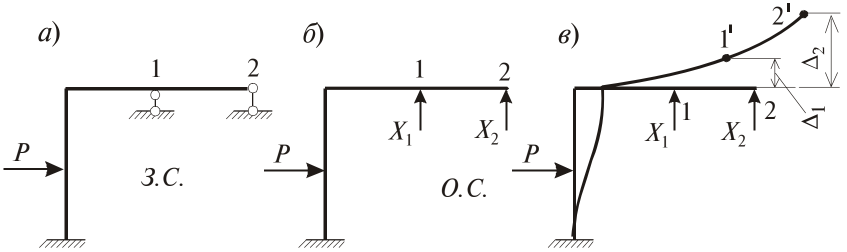

Рис. 5.1.1

По мнению автора, статически определимая система, показанная на рис. 5.1.1, *б*, получилась наиболее простой из всех статически определимых систем, каждую из которых можно было бы предложить в качестве основной. Как выбирать рациональную основную систему рассмотрим ниже.

Под действием неизвестных сил X_1, X_2 и обобщенной силы P точки основной системы получат перемещения. Так, точка 1 – точка приложения силы X_1 – переместится в положение $1'$, точка 2 – точка приложения силы X_2 – в положение $2'$, а проекциями перемещений этих точек соответственно на направления сил X_1 и X_2

---

*Здесь и далее – ссылки на книгу: Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. I. Статически определимые системы: Учеб. пос. – М.: Изд-во АСВ, 1999.

будут Δ_1 и Δ_2 (рис. 5.1.1, *в*). Поскольку в заданной системе таких перемещений, на самом деле, нет (по их направлению имеются опорные связи), а заданная и основная системы должны быть эквивалентны по перемещениям, необходимо добиться того, чтобы перемещения Δ_1 и Δ_2 в основной системе одновременно обратились в нуль:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= 0;\\ \Delta_2 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Применив принцип независимости действия сил, произведем расчет основной системы на каждую нагрузку отдельно. Так как значения сил X_1 и X_2 неизвестны, примем их пока равными по единице.

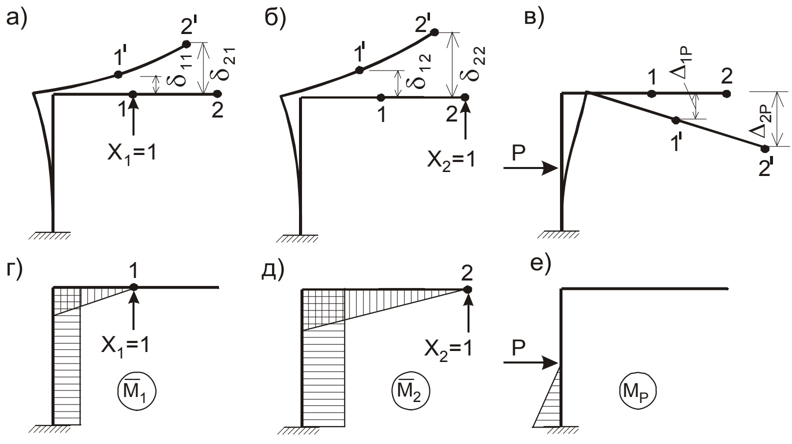

Рис. 5.1.2

На рис. 5.1.2, *а, б, г, д* показаны единичные перемещения δ_{11}, δ_{21}, δ_{12}, δ_{22} точек 1, 2 по направлению неизвестных X_1, X_2 и эпюры моментов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ от действия сил X_1=1 и X_2=1. Аналогичные перемещения Δ_{1P}, Δ_{2P} этих же точек и эпюра моментов от действия нагрузки представлены на рис. 5.1.2, *в, е,* причем на всех рисунках точки $1'$, $2'$ от различных воздействий, естественно, имеют различные положения, хотя обозначены одинаково.

Из рис. 5.1.2, *а...в* следует, что суммарное перемещение Δ_1 точки приложения неизвестного X_1 по его направлению от действия неизвестных X_1, X_2 и нагрузки определяется выражением $\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P}$. Аналогично для точки 2: $\Delta_2 = \delta_{21}X_1 +$

$+\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P}$. Учитывая два условия совместности перемещений ($\Delta_1 = \Delta_2 = 0$), приведенные выражения можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \Delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Полученная система уравнений для определения неизвестных X_1 и X_2 называется системой канонических уравнений метода сил. Коэффициенты этих уравнений могут быть вычислены по формуле Максвелла – Мора, так как они представляют собой перемещения определенных точек основной системы по заданному направлению от сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ и внешней нагрузки:

$$\delta_{ik} = \sum\int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EJ} ds; \qquad \Delta_{iP} = \sum\int \frac{\overline{M}_P \overline{M}_i}{EJ} ds.$$

После нахождения истинных значений X_1 и X_2 из решения системы канонических уравнений окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена как алгебраическая сумма ординат эпюр $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, умноженных на найденные значения неизвестных сил X_1, X_2, и эпюры от заданной нагрузки в основной системе M_P: $M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + M_P$. По окончательной эпюре M обычным образом строят эпюры Q и N и проводят проверки правильности построения эпюр.

Из сказанного следует, что первым и наиболее важным этапом расчета статически неопределимых систем методом сил является определение числа лишних связей и выбор основной системы. Рассмотрим более подробно этот вопрос.

Расчет статически неопределимой системы методом сил начинается с определения количества лишних связей, т.е. степени ее статической неопределимости. За лишние связи могут быть приняты как реакции внутренних связей, так и реакции опорных связей. Их общее количество для многопролетных балок, рам, арок и ферм может быть подсчитано по одной из формул (1.10)...(1.12) § 1.2:

$$Л = C_0 + 2Ш - 3Д; \quad Л = C_0 + 2Ш + 3К - 3Д; \quad Л = C_0 + C - 2У.$$

После определения числа лишних связей переходят к выбору основной системы. Основная система получается из заданной путем отбрасывания лишних связей, а их влияние, во избежание разницы между этими системами, заменяется неизвестными обобщенными силами, действующими по направлению отброшенных связей. Неизвестные силы обозначают буквой X с подстрочным индексом

($X_1, X_2, ..., X_n$). Эти силы обычно называют "основными неизвестными". Свое название метод сил получил именно потому, что за основные неизвестные приняты силы.

Для любой статически неопределимой системы можно предложить бесчисленное множество вариантов выбора основной системы.

Трудоемкость расчета зависит от того, насколько удачной (рациональной) выбрана основная система. Неудачный выбор приводит к излишней затрате труда и времени и увеличивает вероятность появления ошибок при счете.

Основные требования, предъявляемые к основной системе

1. Она должна быть геометрически и мгновенно неизменяемой.
2. Основная система должна быть простой и удобной для построения эпюр изгибающих моментов от действия неизвестных и нагрузки.
3. Если заданная статически неопределимая система является симметричной, то и основная система должна быть также симметричной.
4. Желательно, чтобы число стержней, в которых возникают изгибающие моменты от различных воздействий, было наименьшим.

Выполнение первого требования является обязательным, а остальных – желательным, это зависит от опыта расчетчика, приобретенного при решении большого количества разнообразных задач. Чтобы основная система была геометрически и мгновенно неизменяемой, удалять следует только условно необходимые связи.

Всем перечисленным требованиям в полной мере удовлетворяет статически определимая система, а это значит, что отбрасывать лишние связи надо в таком количестве, какова степень статической неопределимости заданной системы, хотя в качестве основной системы можно использовать и статически неопределимую. В этом случае из заданной системы отбрасывается число связей, меньшее числа ее лишних связей *Л*.

Статически неопределимые системы определенных типов по конфигурации имеет смысл применять, если для них имеются готовые формулы, таблицы и эпюры внутренних усилий в общем виде от различных внешних воздействий (см., например: Бычков Д.В. Формулы и графики для расчета рам. М.: Госстройиздат, 1957).

Итак, за основную систему при расчете по методу сил будем принимать статически определимую систему. Направления основных неизвестных при образовании основной системы выбираются произвольно. Удаление лишних связей осуществляется с помощью приемов, приведенных в § 1.2.

Ниже, в примерах, будет представлено несколько вариантов выбора основной системы для каждой заданной статически неопределимой системы, среди которых на первом месте помещается, по мнению автора, наиболее удачная (рациональная) основная система.

Пример 5.1. Для рамы, изображенной на рис. 5.1.3, выбрать основную систему.

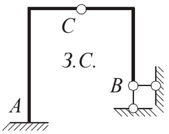

Рис. 5.1.3

Определим степень статической неопределимости рамы: $Л = С_0 + 2Ш - 3Д = 5 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1$.

Основную систему образуем путем удаления одной лишней связи и по ее направлению прикладываем неизвестную обобщенную силу X_1. Взамен одной отброшенной лишней связи в виде горизонтальной или вертикальной опорной реакции прикладываем горизонтальную или вертикальную неизвестную силу X_1. Очевидно, что полученные таким образом две основные системы (рис. 5.1.4, *а, б*) по рациональности выбора будут равноправными.

Другие основные системы приведены на рис. 5.1.4, *в, г*.

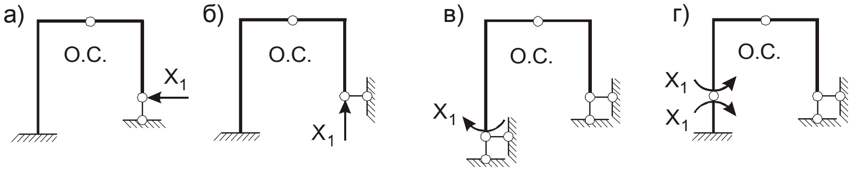

Рис. 5.1.4

Отметим, что при введении шарнира в жесткую заделку A неизвестный момент X_1 вместо отброшенной моментной связи прикладывается бесконечно близко сверху от шарнира, а опора с жесткой заделкой превращается в шарнирно-неподвижную опору (см. рис. 5.1.4, *в*).

При введении простого шарнира в какое-либо другое сечение стержня, кроме опорного, вместо одной удаленной моментной связи прикладываются неизвестные взаимно уравновешенные моменты X_1 бесконечно близко с двух сторон от введенного шарнира (см. рис. 5.1.4, *г*), не позволяющие поворачиваться сечениям, в которых приложены моменты, относительно друг друга.

Пример 5.2. Для симметричной рамы, изображенной на рис. 5.1.5, *а*, выбрать рациональную основную систему.

Система называется симметричной, если ее геометрическая схема имеет ось симметрии и жесткости симметрично расположенных элементов равны друг другу.

Так как $Л = С_0 + 2Ш - 3Д = 6 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 3$, заданная система трижды статически неопределима.

Поскольку заданная система является симметричной, согласно требованиям, предъявляемым к основной системе, и основная система должна быть симметричной. Одну лишнюю связь удалим путем рассечения по оси симметрии (посредине) ферменного элемента *DE*, еще две лишние связи можно, как известно, удалить одним действием – убрать на оси симметрии простой шарнир *C*.

Важно подчеркнуть следующее обстоятельство. При рассечении ферменного элемента *DE* и удалении шарнира *C* образуются бесконечно малые зазоры F_1F_2 и C_1C_2 (рис. 5.1.5, *б*), в крайние точки которых (F_1, F_2 и C_1, C_2) и прикладываются попарно взаимно уравновешенные неизвестные силы X_1, X_2 и X_3 (рис. 5.1.5, *в*), представляющие собой силы взаимодействия левой и правой частей рамы. Силы X_1, X_2 не дают сближаться (расходиться) концевым точкам F_1, F_2 и C_1, C_2 в горизонтальном направлении, а силы X_3 – в вертикальном направлении точек C_1 и C_2. Естественно, что точки F_1, F_2, C_1 и C_2 на основных системах показывать не надо. Чтобы разрезанные части DF_1 и EF_2 ферменного элемента *DE* не могли вращаться вокруг своих концевых шарниров *D* и *E*, надо представить себе, что в месте разреза имеется муфта, которая изображается на рисунках двумя параллельными черточками.

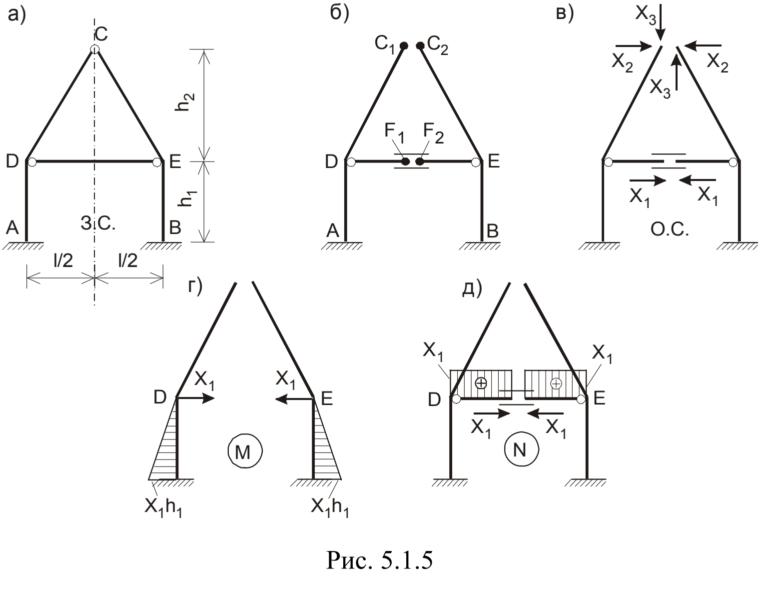

Рис. 5.1.5

Для удобства построения эпюры моментов неизвестные продольные силы X_1 можно перенести в крайние точки *D* и *E*, удалив временно ферменный элемент *DE* (рис. 5.1.5, *г*). Однако при построении эпюры *N* продольные силы X_1 надо снова приложить в крайних точках бесконечно малого зазора и не забыть построить эпюру *N* на участках DF_1 и EF_2 ферменного элемента *DE* (рис. 5.1.5, *д*).

Неизвестные, расположенные на оси симметрии, автоматически становятся симметричными и обратносимметричными (кососимметричными) неизвестными. Вообще называть неизвестные симметричными и обратносимметричными можно только в симметричных основных системах. В данном примере неизвестные X_1 и X_2 являются симметричными неизвестными, а X_3 – обратносимметричным.

Эпюры изгибающих моментов от действия симметричных неизвестных будут симметричными, а от действия обратносимметричных неизвестных – обратносимметричными.

В общем случае можно сказать так: от действия на симметричную систему любого симметричного воздействия эпюры M и N будут симметричными, эпюра Q – обратносимметричной, а от действия на симметричную систему любого обратносимметричного воздействия эпюры M и N будут обратносимметричными, эпюра Q – симметричной.

Другие основные системы получаются гораздо менее удачными, и они здесь не приводятся.

Пример 5.3. Для неразрезной балки, показанной на рис. 5.1.6, выбрать основную систему.

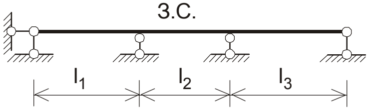

Рис. 5.1.6

Н е р а з р е з н о й   б а л к о й называется такая статически неопределимая балка, которая перекрывает два и более пролетов и не имеет сквозных шарниров.

Если в формулу для числа лишних связей *Л* подставить *Ш* = 0 и *Д* = 1, то получим более простую формулу для подсчета степени статической неопределимости для неразрезных балок: $Л = C_0 + 2Ш - 3Д = C_0 - 3 = 5 - 3 = 2.$

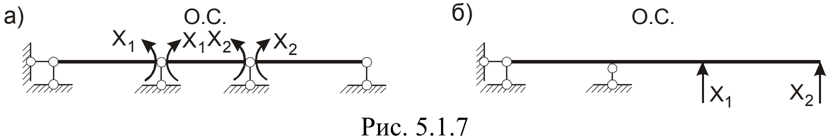

Рис. 5.1.7

Чтобы эпюры изгибающих моментов от неизвестных обобщенных сил имели меньшее число общих участков, основную систему для неразрезной балки выбирают в виде совокупности однопролетных шарнирно опертых балок. Для этого вводят сквозные шарниры на всех промежуточных опорах балки (рис. 5.1.7, *а*), а если имеются жесткие заделки, то и в них. Простой, но менее удачной будет основная система, если отбросить две опорные связи (рис. 5.1.7, *б*).

Пример 5.4. Выбрать рациональную основную систему для рамы, изображенной на рис. 5.1.8.

Определим количество лишних связей:

$$Л = C_0 + 2Ш - 3Д = 5 + 2\cdot 3 - 3\cdot 3 = 2.$$

Рассечение ферменного элемента BC посредине, как известно, приводит к устранению одной лишней связи. Неизвестные продольные силы X_1 в этом случае прикладываются к концам бесконечно малого зазора. Вторую лишнюю связь удалим с помощью отбрасывания вертикального опорного стержня в точке B или введением шарнира в каком-либо сечении стержня рамы.

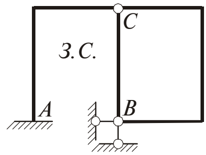

Рис. 5.1.8

Различные основные системы представлены на рис. 5.1.9, *а...в*.

Система, показанная на рис. 5.1.9, *г*, не может называться основной, так как она является мгновенно изменяемой.

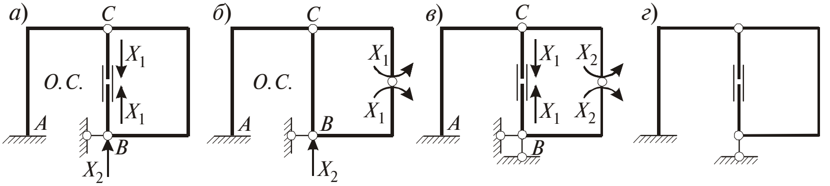

Рис. 5.1.9

Пример 5.5. Выбрать рациональную основную систему для рамы, представленной на рис. 5.1.10.

Определим число лишних связей:

$$Л = С_0 + 2Ш - 3Д = 4 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 3.$$

Наиболее простую основную систему получим, если разрежем ферменный элемент AE и удалим простой шарнир D (рис. 5.1.11, *а*).

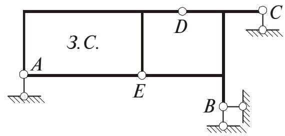

Рис. 5.1.10

Вторую основную систему выбираем, основываясь на том свойстве, что простой шарнир эквивалентен двум связям. Одну из них, а именно горизонтальную связь, удалим (рис. 5.1.11, *б*).

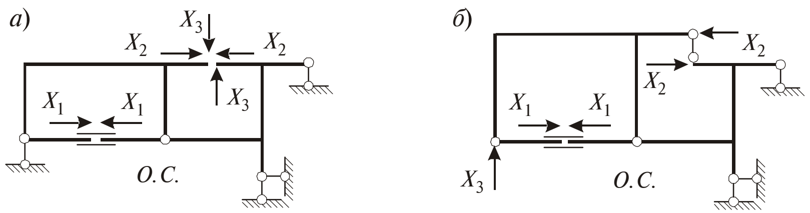

Рис. 5.1.11

При построении эпюр внутренних усилий желательно представить выбранную основную систему в виде поэтажной схемы.

Пример 5.6. Выбрать рациональную основную систему для симметричной рамы, показанной на рис. 5.1.12.

Так как заданная система имеет один замкнутый бесшарнирный контур, количество лишних связей определим по формуле (1.12):

$$Л = С_0 + 2Ш + 3К - 3Д = 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 4.$$

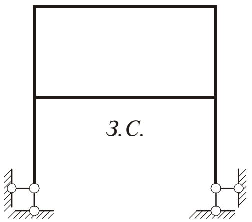

Рис. 5.1.12

Все четыре лишние связи можно удалить на вертикальной оси симметрии. Для этого разрежем посредине один из ригелей, а в другой так же посредине введем простой шарнир (рис. 5.1.13, *а, б*).

Еще один вариант весьма простой основной системы получим, если наряду с разрезом одного из ригелей удалим один из горизонтальных опорных стержней (рис. 5.1.13, *в*). Рассечение стержня, как известно, эквивалентно отбрасыванию трех связей.

Как и ранее, неизвестные силы X_2, X_3 и X_4 прикладываем к концам бесконечно малого зазора, получающегося после разрезания ригеля (рис. 5.1.13, *а...в*).

Напомним, что понятия симметричных и обратносимметричных (кососимметричных) неизвестных относятся только к симметричным основным системам. На основании этого определения неизвестные X_1, X_2 и X_3, показанные на рис. 5.1.13, *а, б,* являются симметричными неизвестными, а X_4 – обратносимметричным.

Основная система, изображенная на рис. 5.1.13, *в*, несимметрична, так как закрепления нижних концов стоек различны. Поэтому, в силу того же определения, неизвестные X_1, X_2 и X_3 нельзя называть симметричными неизвестными, а X_4 – обратносимметричным, хотя эпюры моментов в основной системе от действия неизвестных X_1, X_2 и X_3 будут симметричными, а эпюра моментов от действия неизвестного X_4 – обратносимметричной.

Первые две основные системы можно использовать при расчете на любую внешнюю нагрузку, в то время как основную систему, показанную на рис. 5.1.13, *в*, не рекомендуется применять при действии горизонтальной обратносимметричной нагрузки, так как эпюра моментов от такой нагрузки не будет обратносимметричной. Из дальнейшего станет ясно, что в этом случае для такой несимметричной основной системы, в отличие от основных систем, представленных на рис. 5.1.13, *а, б,* неизвестные X_1, X_2 и X_3 априорно в нуль не обратятся.

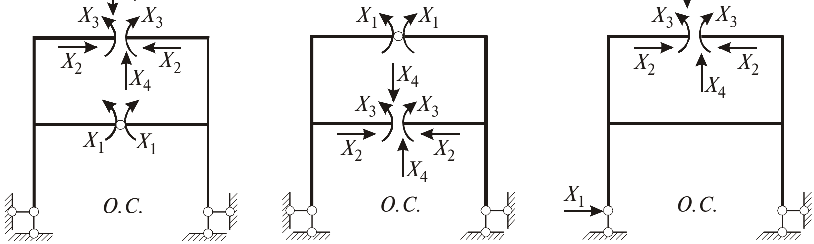

Рис. 5.1.13

Пример 5.7. Выбрать рациональную основную систему для симметричной рамы, изображенной на рис. 5.1.14, *а*.

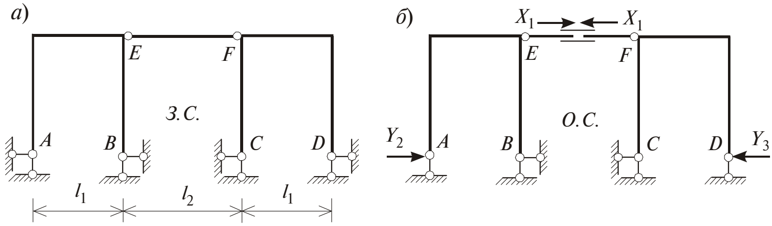

Рис. 5.1.14

Определим число лишних связей: $Л = C_0 + 2Ш - 3Д = 8 + 2{\cdot}2 - 3{\cdot}3 = 3$.

Так как заданная система является симметричной, основная система должна быть выбрана симметричной. Из трех лишних связей только одну можно удалить на оси симметрии путем рассечения ферменного элемента *EF*. Неизвестное симметричное усилие X_1 прикладываем в крайних точках бесконечно малого зазора (рис. 5.1.14, *б*).

Для удаления оставшихся двух лишних связей поступим следующим образом. Чтобы не нарушать симметрию основной системы относительно вертикальной оси, отбросим в точках *A* и *D* две симметрично расположенные горизонтальные опорные связи, а их влияние заменим двумя неизвестными силами, обозначенными пока через Y_2 и Y_3 (см. рис. 5.1.14, *б*). Из последнего рисунка видно, что хотя геометрия системы является симметричной, но сами неизвестные Y_2, Y_3 и эпюры моментов, построенные от них, не будут симметричными и обратносимметричными.

Для решения проблемы получения симметричной основной системы воспользуемся известной теоремой из курса алгебры. Согласно этой теореме две неизвестные величины Y_2 и Y_3 можно заменить суммой и разностью двух других неизвестных X_2 и X_3, т. е. $Y_2 = X_2 + X_3$ и $Y_3 = X_2 - X_3$, где новые неизвестные X_2 и X_3 определяются по формулам $X_2 = (Y_2 + Y_3)/2$ и $X_3 = (Y_2 - Y_3)/2$.

Применительно к данной задаче это означает, что неизвестную реакцию Y_2 в опоре *A* можно представить в виде суммы двух сил X_2 и X_3, а неизвестную опорную реакцию Y_3 в точке *D* – в виде разности этих же сил X_2 и X_3 (рис. 5.1.15, *а*). Естественно, можно сделать и наоборот: в опоре *A* приложить разность сил X_2 и X_3, а в опоре *D* – их сумму.

В строительной механике приведенное выше преобразование неизвестных носит название с п о с о б а г р у п п и р о в к и н е и з в е с т н ы х.

Практически этот способ формально применяется так: в одной из двух симметрично отброшенных связей две неизвестные обобщенные силы направляют в одну сторону, а в другой – эти же силы – в противоположные стороны.

Группировать можно как неизвестные силы, так и моменты. Группировка неизвестных моментов показана на второй основной системе (рис. 5.1.15, *б*).

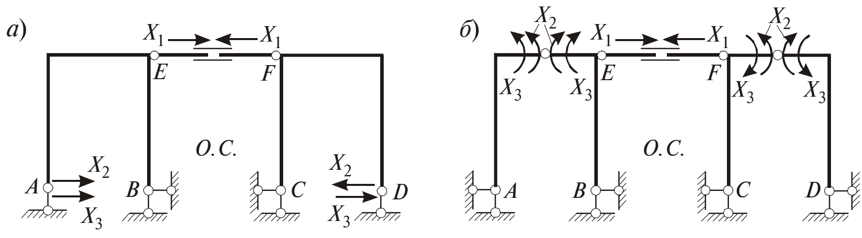

Рис. 5.1.15

Неизвестные X_2 и X_3, приложенные в симметричных точках рамы, называются групповыми неизвестными, так как каждое из них состоит из группы (двух) сил. Эпюры изгибающих моментов, построенные от каждого группового неизвестного, также называются групповыми эпюрами. Неизвестное X_2 и эпюра моментов M_2, построенная от его воздействия, являются симметричными, а неизвестное X_3 и эпюра моментов M_3 – обратносимметричными.

Пример 5.8. Выбрать рациональную основную систему для рамы, представленной на рис. 5.1.16.

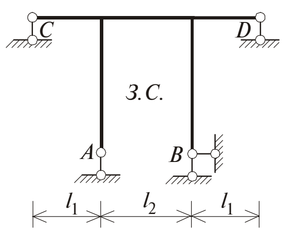

Рис. 5.1.16

Определим число лишних связей: $Л = C_0 + 2Ш - 3Д = 5 + 2{\cdot}0 - 3{\cdot}1 = 2$.

Из-за наличия различных опорных условий закрепления в точках *A* и *B* заданная рама не является симметричной, хотя и близка к ней. Для такой системы и ей подобных с целью получения симметричных и кососимметричных эпюр моментов в основной системе, как правило, можно воспользоваться, как и в случае симметричных систем, способом группировки неизвестных.

В данной раме удалим две вертикальные опорные связи в точках *C* и *D*, симметрично расположенных относительно вертикальной оси, проходящей через середину среднего ригеля. Два неизвестных усилия в этих связях сгруппируем так, как это было описано в предыдущем примере. Например, неизвестные силы X_1 и X_2 в точке *C* направим в одну сторону, а в точке *D* – в противоположные стороны (рис. 5.1.17, *а*).

Аналогично можно поступить и с вертикальными опорными связями в точках *A* и *B* (рис. 5.1.17, *б*). Эпюра моментов в этих основных системах от действия парного неизвестного X_1 будет симметричной, а от действия парного неизвестного X_2 – кососимметричной, однако сами неизвестные X_1 и X_2 нельзя называть симметричным и кососимметричным.

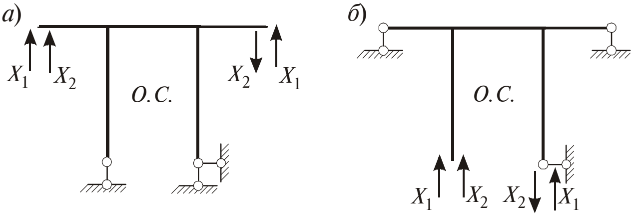

Рис. 5.1.17

Пример 5.9. Выбрать рациональную основную систему для симметричной неразрезной балки (рис. 5.1.18, *а*).

Определим число лишних связей: $Л = C_0 - 3 = 6 - 3 = 3$.

Основная система будет самой удачной, если на всех промежуточных опорах ввести шарниры, а вместо отброшенных связей приложить неизвестные моменты. Так как неизвестное X_1, находящееся на оси симметрии, автоматически становится симметричным, для получения симметричной основной системы сгруппируем, по приведенным выше правилам, неизвестные X_2 и X_3, расположенные в симметричных сечениях балки (рис. 5.1.18, *б*).

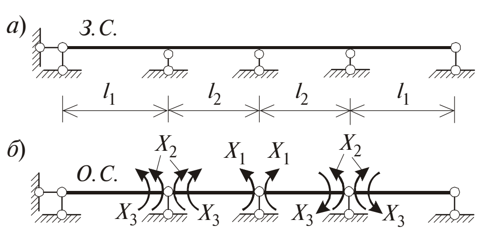

Рис. 5.1.18

Пример 5.10. Выбрать основную систему для фермы, изображенной на рис. 5.1.19, *а*.

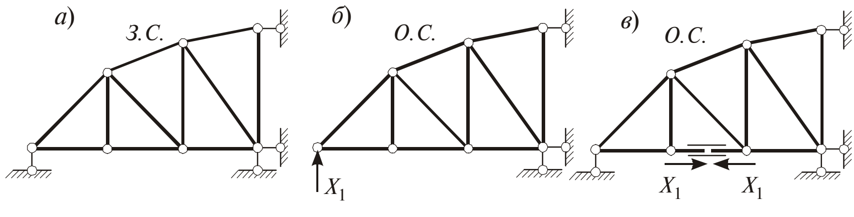

Рис. 5.1.19

Определим число лишних связей по формуле (1.11): $Л = C_0 + C - 2У = 4 + 11 - 2 \cdot 7 = 1$.