

МАТЕМАТИКА

2016

ЕГЭ

Под редакцией И. В. Яценко

профильный
уровень

ЗАДАЧА 13

С. А. Шестаков, П. И. Захаров

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ФГОС

ББК 22.1я72

Ш51

Шестаков С. А., Захаров П. И.

ЕГЭ 2016. Математика. Уравнения и системы уравнений.

Задача 13 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко.

Электронное издание.

М.: МЦНМО, 2016.

176 с.

ISBN 978-5-4439-2423-6

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2016. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 13 профильного уровня.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровеньный подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по теме «Уравнения и системы уравнений».

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует новому Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Подготовлено на основе книги:

Шестаков С. А., Захаров П. И. ЕГЭ 2016. Математика. Уравнения и системы уравнений. Задача 13 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0882-3

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.

<http://www.mccme.ru>

© Шестаков С. А., Захаров П. И., 2016.

© МЦНМО, 2016.

ISBN 978-5-4439-2423-6

Содержание

Предисловие	3
Диагностическая работа	5

Часть I. Уравнения

§ 1. Целые рациональные уравнения	8
Задачи	27
Тренировочная работа 1	29
Тренировочная работа 2	30
§ 2. Дробно-рациональные уравнения	31
Задачи	39
Тренировочная работа 3	41
§ 3. Иррациональные уравнения	42
Задачи	51
Тренировочная работа 4	53
§ 4. Тригонометрические уравнения	54
Задачи	83
Тренировочная работа 5	88
Тренировочная работа 6	89
Тренировочная работа 7	91
§ 5. Показательные уравнения	92
Задачи	99
Тренировочная работа 8	101
§ 6. Логарифмические уравнения	102
Задачи	109
Тренировочная работа 9	110

Часть II. Системы уравнений

§ 1. Системы целых алгебраических уравнений	112
Задачи	117
Тренировочная работа 10	119
§ 2. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения	120
Задачи	123
Тренировочная работа 11	126
§ 3. Системы, содержащие иррациональные уравнения	127
Задачи	130

Тренировочная работа 12	132
§ 4. Системы, содержащие тригонометрические уравнения	133
Задачи	138
Тренировочная работа 13	140
§ 5. Системы, содержащие показательные уравнения	141
Задачи	144
Тренировочная работа 14	146
§ 6. Системы, содержащие логарифмические уравнения	147
Задачи	150
Тренировочная работа 15	153
Диагностическая работа 1	154
Диагностическая работа 2	156
Диагностическая работа 3	158
Диагностическая работа 4	160
Диагностическая работа 5	162
Ответы	164

Предисловие

Это пособие предназначено для подготовки к решению задач по теме «Уравнения и системы уравнений» и, в частности, задачи 13 единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике (профильный уровень).

Задача 13 представляет собой уравнение или систему уравнений. Ключевым признаком задачи является необходимость отбора полученных в результате решения того или иного уравнения корней в соответствии с вытекающими из условия ограничениями. При этом для решения задачи 13 необходимо уверенное владение навыками решения всех типов уравнений и систем уравнений, изучаемых в основной и старшей школе: целых рациональных, дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических.

Для того чтобы подготовку к ЕГЭ сделать максимально эффективной, в пособие включены задания, соответствующие всем шести функционально-числовым линиям школьного курса, и описаны основные методы решения уравнений и систем уравнений для каждой из этих линий. Такое построение пособия, с одной стороны, позволит выявить существующие пробелы и проблемные зоны в подготовке с целью их устранения и выработки устойчивых навыков решения уравнений и систем уравнений, а с другой — позволит использовать комплексный подход при организации и проведении обобщающего повторения.

Разумеется, приступать к изучению методов решения уравнений и систем уравнений, соответствующих по уровню сложности задаче 13 ЕГЭ по математике, имеет смысл только в том случае, если решение простейших уравнений по каждой из функционально-числовых линий школьного курса не вызывает никаких затруднений. Для проверки навыков решения таких уравнений нужно предварительно решить тренировочные и диагностические работы пособия С. А. Шестакова «ЕГЭ 2016. Математика. Простейшие уравнения. Задача 5 (профильный уровень)» (М.: МЦНМО, 2016). После этого нужно выполнить вводную диагностическую работу настоящего пособия. Она состоит из двух частей: в первой представлены 12 уравнений — по два на каждую функционально-числовую линию школьного курса, во второй, имеющей ту же структуру, — 12 систем уравнений. Вначале нужно решить первую часть, постаравшись уложиться в два часа. Если процент правильно выполненных заданий окажется не меньше

75, можно переходить к решению задач второй части. В противном случае нужно определить, какие задачи вызывают затруднения, обратиться при необходимости к разбору задач, изучить методы решения, выполнить тренировочные работы и только после этого переходить к решению задач части 2, постаравшись потратить на нее не более двух часов. Если процент правильно выполненных заданий и здесь окажется не меньше 75, можно перейти к решению следующих диагностических работ, иначе — обратиться к методам решения соответствующих систем, разобраться в них, решить тренировочные работы и только потом — оставшиеся диагностические. В любом случае при наличии уравнений или систем уравнений, вызвавших затруднения или решенных неправильно, нужно проработать соответствующий материал пособия и решить тренировочные работы.

Пособие содержит 6 диагностических и 15 тренировочных работ, а также разбор задач вводной диагностической работы и необходимые методические рекомендации по решению уравнений и систем уравнений, проиллюстрированные большим числом примеров.

Подчеркнем, что в пособие включены задания, в основном отвечающие по уровню сложности заданию 13 ЕГЭ по математике, и подготовительные задачи.

При подготовке к решению задач Единого государственного экзамена с развернутым ответом важно помнить следующее. Проверка ответов осуществляется экспертами. Поэтому приводимое решение должно содержать все необходимые пояснения и обоснования и быть понятным не только его автору, но и любому компетентному человеку, в частности, проверяющему.

Диагностическая работа

Часть I. Уравнения

Решите уравнение.

1. $3(6x^2 - 13x + 6)^2 - 10(6x^2 - 13x) = 53.$

2. $|x^2 - 9| + |x + 3| = x^2 + x - 6.$

3. $\frac{x^7 - 4x^5 + 4x^2 - 7x - 2}{x^7 - 4x^5 + 3x^2 - 4x - 4} = 1.$

4. $\frac{2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{x - 5}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}.$

5. $(x - 3)\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 2x - 6.$

6. $\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} + 3\sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = 4.$

7. $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$

8. $\arcsin x(4 \arcsin x + \arccos x) = \pi^2.$

9. $x \cdot 2^x + 3 = 3 \cdot 2^x + x.$

10. $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18.$

11. $\log_3(x^2 - 12) + 0,5 \log_{\frac{1}{3}} x^2 = 0.$

12. $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$

Часть II. Системы уравнений

Решите систему уравнений.

1.
$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2 y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = -0,5. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2y^2}{y} = 3, \\ \left(\frac{x^2 + 2y^2}{y}\right)^2 = x^2 + 2y^2 - 3y + 9x. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7, \\ \sqrt{xy} = 10. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \sqrt{y + \cos^2 x - 2} + \cos x = 0, \\ y \sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3 \cdot 3^{\operatorname{tg} y} + 2 = 3^{-\operatorname{tg} y}, \\ \sqrt{x - 2} + 6 \cos y = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0, \\ y + 4\sqrt{3} \cos x = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 8 \log_9(xy) = \log_9 x^8, \\ 5x + 2y + 22 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{81^{\cos y} - 4 \cdot 9^{\cos y} + 3}{\sqrt{1 - 2 \sin y}} = 0, \\ \sqrt{x + 3} + \cos 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{2 \log_2^2(\sin x) + 3 \log_2(\sin x) + 1}{\log_3(-\cos x)} = 0, \\ \sqrt{y - 7} = \sqrt{2} \cos x + 1. \end{cases}$$

ЧАСТЬ I. УРАВНЕНИЯ

Главным этапом решения любого уравнения является сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям. Под простейшими уравнениями в зависимости от принадлежности к той или иной функционально-числовой линии школьного курса подразумеваются следующие:

- для целых рациональных уравнений — линейные и квадратные уравнения;

- для дробно-рациональных уравнений — уравнения вида $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени;

- для иррациональных уравнений — уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$ — многочлен первой или второй степени, $g(x)$ — многочлен степени не выше первой;

- для тригонометрических уравнений — уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число;

- для показательных уравнений — уравнения вида $a^{f(x)} = b$, где a — положительное действительное число, отличное от единицы, b — действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени;

- для логарифмических уравнений — уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где b — действительное число, a — положительное действительное число, отличное от 1, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени.

Существует два основных способа сведения уравнения к одному или нескольким простейшим: алгебраические преобразования и замена переменной. Кроме того, решение некоторых уравнений требует применения таких свойств функций, как монотонность и ограниченность.

§1. Целые рациональные уравнения

Как уже отмечалось, простейшими целыми (слово «рациональные» иногда будем опускать) уравнениями являются линейные и квадратные. Решение практически любых целых уравнений, в том числе и тех, которые получены из дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений посредством замены переменной либо иным способом, сводится к решению линейных и квадратных уравнений. Поэтому умение быстро и без ошибок решать линейные и квадратные уравнения является одним из важнейших: обидно, придумав способ решения относительно сложной задачи и сведя ее к линейному или квадратному уравнению, ошибиться на последнем шаге. Далее решение линейных и квадратных уравнений не рассматривается (рекомендуется решать их самостоятельно), а сразу после их приведения к стандартному виду выписываются корни.

Рассмотрим основные способы решения целых рациональных уравнений.

1. Алгебраические преобразования

Одним из основных способов сведения уравнения к одному или нескольким простейшим являются алгебраические преобразования одной или обеих его частей. В таких случаях, как правило, все члены уравнения переносят в одну из его частей, приводят подобные и пытаются разложить полученное выражение на множители. Для целых уравнений с этой целью обычно используют формулы сокращенного умножения. Иногда, чтобы применить одну из формул сокращенного умножения, требуется применить искусственное преобразование: добавить и вычесть некоторое выражение. Если удастся «угадать» корень целого рационального уравнения степени выше второй, т.е. корень x_0 многочлена $p(x)$ в левой части уравнения $p(x) = 0$, то можно понизить степень уравнения, воспользовавшись тем, что тогда $p(x) = (x - x_0)q(x)$ и степень многочлена $q(x)$ ниже степени многочлена $p(x)$. Для получения формулы $p(x) = (x - x_0)q(x)$ используют либо разложение на множители, либо деление столбиком многочлена $p(x)$ на $x - x_0$. В некоторых случаях для того чтобы свести уравнение к линейному или квадратному, достаточно воспользоваться условием равенства степеней. Рассмотрим примеры решения целых уравнений с помощью алгебраических преобразований, начав с линейных и квадратных уравнений с иррациональными коэффициентами, которые, несмотря на их принадлежность к простейшим,

порой вызывают неразрешимые трудности у выпускников именно в силу иррациональности коэффициентов.

Пример 1. Решите уравнение

$$2(\sqrt{3}-x) + \sqrt{3}(2-x) = 2\sqrt{3}-4.$$

Решение. Данное уравнение является линейным. Выполним необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{3}-x) + \sqrt{3}(2-x) &= 2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3}-2x+2\sqrt{3}-\sqrt{3}x &= 2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)x &= 2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow (\sqrt{3}+2)x = 2\sqrt{3}+4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+2} \Leftrightarrow x = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}+2} \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример 2. Решите уравнение

$$2x^2 - (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x + \sqrt{6} + 2 = 0.$$

Решение. Данное уравнение является квадратным. Найдем дискриминант D уравнения:

$$\begin{aligned} D &= (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\sqrt{6} + 2) = \\ &= 12 + 12\sqrt{6} + 18 - 8\sqrt{6} - 16 = 14 + 4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Дискриминант представляет собой выражение вида $p + q\sqrt{r}$. В том случае, если это выражение является полным квадратом, обычно используют рассуждения, аналогичные следующим. Предположим, что дискриминант является квадратом суммы чисел a и b :

$$(a+b)^2 = 14 + 4\sqrt{6}.$$

Пусть сумма квадратов этих чисел равна 14, а их удвоенное произведение равно $4\sqrt{6}$. Тогда $ab = 2\sqrt{6}$. Наиболее вероятными «претендентами» на роль a и b являются либо 2 и $\sqrt{6}$, либо $2\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, либо $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Поскольку сумма квадратов искомым чисел равна 14, то это числа $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Следовательно, $\sqrt{D} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Тогда по формуле корней квадратного уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}, \\ x_2 = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Условие равенства степеней

Уравнение вида $(g(x))^{2n+1} = (p(x))^{2n+1}$, где n — натуральное число, в силу свойств степенной функции с нечетным натуральным показателем равносильно уравнению $g(x) = p(x)$. Уравнение вида $(g(x))^{2n} = (p(x))^{2n}$, где n — натуральное число, в силу свойств степенной функции с четным натуральным показателем равносильно

совокупности
$$\begin{cases} p(x) = q(x), \\ p(x) = -q(x). \end{cases}$$

Пример 3. Решите уравнение

$$(x - 3)^6 + (x^2 - 2x - 1)^3 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(x - 3)^6 = -(x^2 - 2x - 1)^3.$$

Далее, поскольку $a^6 = (a^2)^3$, $-b^3 = (-b)^3$, получим

$$((x - 3)^2)^3 = (-x^2 + 2x + 1)^3.$$

В силу того, что $c^3 = d^3 \Leftrightarrow c = d$, последнее уравнение приводится к виду $(x - 3)^2 = -x^2 + 2x + 1$. Перенеся все члены уравнения в левую часть, раскрыв скобки, приведя подобные и разделив обе части полученного уравнения на число 2, получим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$, единственным корнем которого является 2.

Ответ: 2.

Разложение на множители

Среди целых уравнений степени выше второй, решаемых с помощью разложения на множители (для чего применяют формулы сокращенного умножения и вынесение за скобку общего множителя), можно выделить симметрическое уравнение третьего порядка $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$. Перегруппировав слагаемые и вынося за скобку общие множители, получим $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$. Применим в левой части уравнения формулу суммы кубов и вновь вынесем общий множитель за скобку:

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(ax^2 - ax + a + bx).$$

Таким образом, уравнение сводится к линейному уравнению $x + 1 = 0$, корнем которого является число -1 , и квадратному уравнению $ax^2 - (a - b)x + a = 0$.

Отметим, что для большинства других целых уравнений степени выше второй стандартный алгоритм решения указать не удастся, но

практически всегда в их решении можно существенно продвинуться, следуя одной из трех «инструкций», или «правил»: «примени формулу», «добавь и вычти», «угадай корень». Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Решите уравнение

$$5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0.$$

Решение. Перегруппировав слагаемые и вынося за скобку общие множители, получим $5(x^3 + 1) - 21x(x + 1) = 0$. Применим в левой части уравнения формулу суммы кубов и вновь вынесем общий множитель за скобку:

$$5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 21x(x + 1) = (x + 1)(5x^2 - 26x + 5).$$

Таким образом, уравнение сводится к линейному уравнению $x + 1 = 0$, корнем которого является число -1 , и квадратному уравнению $5x^2 - 26x + 5 = 0$, корнями которого являются числа $\frac{1}{5}$ и 5 .

Ответ: $-1; \frac{1}{5}; 5$.

Пример 5. Решите уравнение

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 9 = 0.$$

Решение. Этот пример иллюстрирует применение формул сокращенного умножения. Сначала воспользуемся формулой квадрата разности двух чисел: $x^4 - 2x^3 + x^2 = (x^2 - x)^2$. Теперь уравнение можно переписать так: $(x^2 - x)^2 - 3^2 = 0$. Применив формулу разности квадратов, получим $(x^2 - x - 3)(x^2 - x + 3) = 0$, откуда $x^2 - x - 3 = 0$ либо $x^2 - x + 3 = 0$. Корнями уравнения $x^2 - x - 3 = 0$ являются числа $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ и $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Уравнение $x^2 - x + 3 = 0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

Ответ: $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Пример 6. Решите уравнение

$$(x - 4)^3 + (x - 4)^2 + (x - 4)(x - 3) + (x - 3)^2 + (x - 3)^3 = 6.$$

Решение. Для решения уравнения вновь воспользуемся правилом «примени формулу». Выражение

$$(x - 4)^2 + (x - 4)(x - 3) + (x - 3)^2$$

представляет собой неполный квадрат суммы чисел $x - 3$ и $x - 4$. Поэтому если умножить его на разность этих чисел $(x - 3) - (x - 4)$,

получим разность кубов этих чисел. Но $(x-3) - (x-4) = 1$, поэтому

$$(x-4)^2 + (x-4)(x-3) + (x-3)^2 = (x-3)^3 - (x-4)^3.$$

Теперь уравнение можно переписать так:

$$(x-4)^3 + (x-3)^3 - (x-4)^3 + (x-3)^3 = 6,$$

откуда, приведя подобные и разделив обе части уравнения на число 2,

получаем $(x-3)^3 = 3$. Значит, $x-3 = \sqrt[3]{3}$, и $x = 3 + \sqrt[3]{3}$.

Ответ: $3 + \sqrt[3]{3}$.

Пример 7. Решите уравнение $x^4 + 4x - 1 = 0$.

Решение. Для того чтобы решить это уравнение, попробуем применить к его левой части правило «добавь и вычти», дополнив x^4 до квадрата суммы:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x - 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 + 4x - 2 = \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2(x^2 - 2x + 1) = (x^2 + 1)^2 - 2(x-1)^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)^2 - 2(x-1)^2 &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 = \\ &= (x^2 + 1 + \sqrt{2}x - \sqrt{2})(x^2 + 1 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Получаем два квадратных уравнения:

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0.$$

Корнями уравнения $x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$ являются числа

$$\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Уравнение $x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

Ответ: $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$.

Пример 8. Решите уравнение $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.

Решение. Левая часть уравнения представляет собой многочлен третьей степени с целыми коэффициентами. Для решения уравнения такого типа следует применить инструкцию «угадай корень», выяснив, не является ли какое-нибудь целое число x_0 корнем уравнения. Такое число нужно искать среди делителей свободного члена. В самом деле, если x_0 — корень какого-либо целого уравнения с целыми

коэффициентами, например, уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то при его подстановке в уравнение получим верное числовое равенство $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$. Так как каждое из трех первых слагаемых левой части этого равенства делится на x_0 , то и последнее слагаемое d должно делиться на x_0 . Аналогичные рассуждения применимы и для уравнений степени выше третьей. Если такое число x_0 существует, то левую часть уравнения можно будет разложить на множители, одним из которых является $x - x_0$. Для этого следует «разбить на пары» левую часть уравнения таким образом, чтобы в каждой паре можно было выделить множитель $x - x_0$, либо выполнить деление многочлена на многочлен столбиком. Так, число -1 является корнем данного уравнения, в чем можно убедиться простой проверкой. Теперь левую часть уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}2x^3 + 3x^2 - 1 &= (2x^3 + 2x^2) + (x^2 - 1) = \\ &= 2x^2(x + 1) + (x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x^2 + x - 1).\end{aligned}$$

Таким образом, $x = -1$ либо $2x^2 + x - 1 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа -1 и $0,5$.

Ответ: $-1; 0,5$.

Уравнения, содержащие более одной переменной

Уравнения, содержащие более одной переменной, обычно ставят в тупик недостаточно подготовленного выпускника, хотя в большинстве случаев их решение не требует изощренных преобразований или нестандартных подходов. Как правило, такие уравнения являются квадратными относительно одной из переменных, и ключевая идея заключается в исследовании дискриминанта уравнения: из условия его неотрицательности находят допустимые значения второй переменной.

Пример 9. Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y , для каждой из которых $5x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$.

Решение. Переписав данное уравнение как квадратное относительно x , получим

$$5x^2 - 4(y + 2)x + y^2 + 2y + 5 = 0.$$

Пусть D — дискриминант уравнения, тогда

$$\frac{D}{4} = 4(y + 2)^2 - 5(y^2 + 2y + 5),$$

откуда, раскрыв скобки и приведя подобные, находим

$$\frac{D}{4} = -y^2 + 6y - 9 = -(y - 3)^2.$$

Если $y \neq 3$, то $\frac{D}{4} < 0$, и уравнение не имеет решений. Если $y = 3$, то $\frac{D}{4} = 0$, и тогда $x = \frac{2(y+2)}{5} = 2$.

Ответ: (2; 3).

2. Замена переменной

Уравнение вида $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + c = 0$

Такие уравнения (их иногда называют трехчленными) являются одними из наиболее распространенных. Наверное, самый известный пример этого типа уравнений — биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (здесь $f(x) = x^2$). Заменой переменной $t = f(x)$ трехчленное уравнение сводится к квадратному относительно переменной t уравнению $at^2 + bt + c = 0$. В качестве первого примера подобного типа уравнений рассмотрим **задачу 1 части I** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите уравнение

$$3(6x^2 - 13x + 6)^2 - 10(6x^2 - 13x) = 53.$$

Решение. Обозначим $6x^2 - 13x + 6$ через t . Тогда $6x^2 - 13x = t - 6$ и уравнение примет вид $3t^2 - 10(t - 6) = 53$, откуда $3t^2 - 10t + 7 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и $\frac{7}{3}$. Сделаем обратную замену. При $t = 1$ получим уравнение $6x^2 - 13x + 6 = 1$, откуда $6x^2 - 13x + 5 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{3}$. При $t = \frac{7}{3}$ получим уравнение $6x^2 - 13x + 6 = \frac{7}{3}$, откуда, умножив обе части уравнения на 3, получаем $18x^2 - 39x + 18 = 7$ и, значит, $18x^2 - 39x + 11 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{11}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{6}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$3(2x - 1)^4 - 16(2x - 1)^2 + 16 = 0.$$

Решение. Сделаем замену переменной: $z = (2x - 1)^2$, $z \geq 0$. Уравнение примет вид: $3z^2 - 16z + 16 = 0$. Корни этого уравнения:
$$\begin{cases} z = 4, \\ z = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Условию $z \geq 0$ удовлетворяет каждый из корней уравнения. Вернемся к переменной x :

$$\left[\begin{array}{l} (2x-1)^2 = 4, \\ (2x-1)^2 = \frac{4}{3} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 = 2, \\ 2x-1 = -2, \\ 2x-1 = \sqrt{\frac{4}{3}}, \\ 2x-1 = -\sqrt{\frac{4}{3}} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2}, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ x = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}, \\ x = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}. \end{array} \right.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}; \frac{3}{2}$.

Уравнение вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = k$, где $a+b=c+d$

Уравнение указанного типа после перемножения двух первых и двух последних скобок в левой части легко преобразовать к виду

$$(x^2 - (a+b)x + ab)(x^2 - (a+b)x + cd) = k$$

и свести к квадратному заменой

$$t = x^2 - (a+b)x \quad \text{или} \quad t = x^2 - (a+b)x + ab.$$

Иногда левая часть таких уравнений представляет собой произведение двух квадратных трехчленов и требует предварительного разложения каждого из них на множители.

Пример 3. Решите уравнение $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) + 24 = 0$.

Решение. Разложим каждый из квадратных трехчленов в левой части уравнения на множители. Корнями трехчлена $x^2 - 4x + 3$ являются числа 1 и 3, поэтому $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Корнями трехчлена $x^2 + 6x + 8$ являются числа -4 и -2 , поэтому

$$x^2 + 6x + 8 = (x+4)(x+2).$$

Теперь данное уравнение можно переписать в виде

$$(x-1)(x-3)(x+4)(x+2) + 24 = 0.$$

Поскольку $1 + (-2) = 3 + (-4)$, перемножим скобки левой части полученного уравнения следующим образом: первую с последней, а вторую с третьей. Получим $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 24 = 0$. Сделаем замену переменной. Пусть $t = x^2 + x - 2$. Тогда $x^2 + x - 12 = t - 10$, и уравнение примет вид $t(t-10) + 24 = 0$, откуда $t^2 - 10t + 24 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 4 и 6. Сделаем обратную замену. При $t = 4$ получим уравнение $x^2 + x - 2 = 4$,

откуда $x^2 + x - 6 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа -3 и 2 . При $t = 6$ получим уравнение $x^2 + x - 2 = 6$, откуда $x^2 + x - 8 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа $\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$ и $\frac{-1 - \sqrt{33}}{2}$.

Ответ: $\frac{-1 - \sqrt{33}}{2}$; -3 ; 2 ; $\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$.

Уравнение вида $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = kx^2$, где $ab = cd \neq 0$

Такие уравнения сводятся к квадратным после следующих преобразований. Перемножим две первые и две последние скобки левой части с учетом того, что $ab = cd$:

$$(x^2 - (a + b)x + ab)(x^2 - (c + d)x + ab) = kx^2.$$

Теперь, учитывая то, что $x \neq 0$ (иначе одно из чисел a, b, c, d должно быть равно нулю, а это противоречит условию), разделим обе части уравнения на x^2 следующим образом:

$$\left(\frac{x^2 - (a + b)x + ab}{x}\right)\left(\frac{x^2 - (c + d)x + ab}{x}\right) = k,$$

откуда $\left(x + \frac{ab}{x} + (a + b)\right)\left(x + \frac{ab}{x} + (c + d)\right) = k$.

Обозначив $t = x + \frac{ab}{x}$ или $t = x + \frac{ab}{x} + a + b$, получим квадратное уравнение.

Пример 4. Решите уравнение $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$.

Решение. Перемножим первую и последнюю, а также вторую и третью скобки левой части:

$$(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2.$$

Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения, и разделим обе части уравнения на x^2 следующим образом:

$$\left(\frac{x^2 + 14x + 24}{x}\right)\left(\frac{x^2 + 11x + 24}{x}\right) = 4.$$

Выполним почленное деление в каждой из скобок левой части последнего уравнения и перегруппируем слагаемые:

$$\left(x + \frac{24}{x} + 14\right)\left(x + \frac{24}{x} + 11\right) = 4.$$

Теперь можно сделать замену переменной. Пусть $t = x + \frac{24}{x} + 14$. Тогда $x + \frac{24}{x} + 11 = t - 3$ и уравнение примет вид $t(t - 3) = 4$, откуда $t^2 - 3t - 4 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -1 и 4 . Сделаем обратную замену. При $t = -1$ получим уравнение $x + \frac{24}{x} + 14 = -1$, откуда $x^2 + 15x + 24 = 0$. Корнями послед-

него уравнения являются числа $\frac{-15 - \sqrt{129}}{2}$ и $\frac{-15 + \sqrt{129}}{2}$. При $t = 4$ получим уравнение $x + \frac{24}{x} + 14 = 4$, откуда $x^2 + 10x + 24 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа -6 и -4 .

Ответ: $\frac{-15 - \sqrt{129}}{2}$; -6 ; -4 ; $\frac{-15 + \sqrt{129}}{2}$.

Уравнение вида $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) \cdot g(x) + c \cdot g^2(x) = 0$

Такое уравнение называется однородным уравнением второго порядка. Оно сводится к квадратному уравнению после деления обеих частей на $g^2(x)$ и введения новой переменной $t = \frac{f(x)}{g(x)}$. Следует подчеркнуть, что при делении на $g^2(x)$ может произойти потеря корней уравнения, поэтому обязательной является проверка тех значений x , при которых $g^2(x) = 0$. Если эти значения являются корнями исходного уравнения, то их также следует включить в ответ. Другой способ решения однородного уравнения состоит в рассмотрении его как квадратного относительно одной из функций $f(x)$ или $g(x)$.

Пример 5. Решите уравнение

$$x^2(x-1)^2 + x(x^2-1) = 2(x+1)^2.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$(x^2-x)^2 + (x^2-x)(x+1) - 2(x+1)^2 = 0.$$

Заметим, что $x = -1$ не является корнем уравнения, и разделим обе части уравнения на $(x+1)^2$. Получим

$$\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)^2 + \frac{x^2-x}{x+1} - 2 = 0.$$

Сделаем замену переменной. Пусть $t = \frac{x^2-x}{x+1}$. Тогда уравнение примет вид $t^2 + t - 2 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и -2 . Сделаем обратную замену. При $t = 1$ получим уравнение $\frac{x^2-x}{x+1} = 1$, откуда $x^2 - 2x - 1 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$. При $t = -2$ получим уравнение $\frac{x^2-x}{x+1} = -2$, откуда $x^2 + x + 2 = 0$. Это уравнение не имеет корней, так как его дискриминант отрицателен.

Ответ: $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$.

Уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где $a \neq 0$

Такое уравнение, коэффициенты которого симметричны относительно середины, называется возвратным уравнением четвертого по-