А.Б. Золотов, П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева

МНОГОУРОВНЕВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

А.Б. Золотов, П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева

МНОГОУРОВНЕВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

Издательство АСВ
Москва
2013

УДК 539.3:624.04
ББК 38

Рецензенты:
действительный член РААСН, доктор технических наук, профессор *В.И. Андреев*
член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор *А.М. Белостоцкий*

Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.
Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода: Монография. – М.: Издательство АСВ, 2013. – 416 с.

ISBN 978-593093-977-4

В монографии рассматриваются многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода в приложениях к решению актуальных задач строительной механики, механики деформируемого твердого тела и математической физики. Представляемые подходы основаны на использовании современных математических средств, в частности элементов функционального анализа, теории обобщенных функций и численных методов, адекватных текущему уровню развития компьютерной техники. Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников, аспирантов, докторантов и студентов технических вузов.

The book covers contemporary discrete and discrete-continual versions of variation-difference method of structural analysis.

ISBN 978-593093-977-4

Научное издание

Золотов Александр Борисович
Акимов Павел Алексеевич
Мозгалева Марина Леонидовна

МНОГОУРОВНЕВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

Компьютерный набор и верстка: *П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева*
Редактор: *В.Ш. Мерзлякова*
Дизайн обложки: Н.С. Романова

Лицензия ЛР №0716188 от 01.04.98.
Подписано к печати 05.05.12 Формат 60х90/16
Бумага офс. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Усл. 26,0 п.л. Тираж 300 экз. Заказ №____

ООО «Издательство АСВ», 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26,
отдел реализации – оф. 511
тел./факс: +7(499) 183-56-83, e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru/

Разработка, исследование, развитие, верификация и апробация методов расчета строительных конструкций, зданий, сооружений и комплексов являются одними из важнейших научных направлений, обеспечивающих повышение надежности и долговечности строительных объектов, совершенствование конструктивных решений и оптимальный выбор строительных материалов, влияющих на здоровье людей, экономию финансовых средств, минимизацию затрат энергии в ходе эксплуатации. Современный этап развития строительной механики и механики деформируемого твердого тела характеризуется практически повсеместным использованием дискретных (численных) и дискретно-континуальных (численно-аналитических) методов. Благодаря прогрессу в области компьютерной техники и вычислительной математики, а также совершенствованию информационных технологий изменилось соотношение аналитических, экспериментальных, численных и численно-аналитических подходов к расчету строительных объектов. Как известно, современная практика выдвигает задачи моделирования сложнейших конструктивных систем, полное решение которых может быть получено в большинстве случаев только лишь численным путем. В самом деле, численно-аналитические методы имеют относительно узкую область применения, поиск замкнутого аналитического решения для адекватной математической модели сложной конструкции не представляется возможным, а экспериментальные исследования такого рода конструкций зачастую оказываются весьма дорогостоящими, а порой и неполными. Тем не менее, следует отметить, что даже при использовании высокопроизводительной компьютерной техники расчет достаточно обширного круга инженерных конструкций различного назначения (строительных, авиационных, энергетических и т.д.) остается порой весьма нетривиальной задачей. Как показывает имеющийся многолетний опыт, эффективность внедрения численных и численно-аналитических подходов в практику моделирования состояния строительных объектов зависит не сколько от мощности (производительности) используемой компьютерной техники, сколько от разработки корректных и рациональных моделей и алгоритмов. Таким образом, существующая тенденция к максимально полному учету специфики работы конструкции в нормальных и экстремальных условиях эксплуатации требует постоянного совершенствования и развития численных и численно-аналитических методов и алгоритмов расчета строительных объектов.

В настоящее время, как уже отмечалось выше, численные (преимущественно) и численно-аналитические (в меньшей степени) методы прочно вошли в практику проектных организаций, конструкторских бюро и профильных научно-исследовательских институтов. Очевидно, что широкое внедрение этих методов требует от них достаточной простоты (если, конечно, это возможно), корректности, надежности и эффективности, что необходимо, в частности, для проведения серийных расчетов на имеющейся в наличии вычислительной технике в реальные календарные сроки. Для разработки численного или численно-аналитического метода, обладающего указанными свойствами, необходимо учитывать специфические особенности класса задач, на решение которых направлен этот метод.

Определяющими условиями успеха метода расчета конструкции являются удачно выбранная механическая модель (расчетная схема) и дискретная или дискретно-континуальная модель, т.е. соответственно численный или численно-аналитический метод решения математической задачи и способы реализации алгоритма на ЭВМ. При численном решении больших сложных задач строительной механики предварительное аналитическое, численно-аналитическое и экспериментальное изучение различных локальных свойств проблемы может оказать большую помощь, а иногда и вовсе является решающим фактором для успешного построения и реализации численного алгоритма. Экспериментальная проверка и сравнения (верификация) с имеющимися аналитическими и численно-аналитическими решениями задачи в более простых и частных случаях позволяют дать оценку принятой расчетной схеме конструкции, алгоритма и полученного решения, в частности его точности. Здесь, впрочем, следует заметить, что оценка точности численного решения сформулированной математической задачи должна проводиться исключительно математически, без привлечения данных экспериментальных исследований. Качественные и количественные сравнения с экспериментом должны давать информацию о том, насколько принятая механическая модель близка к реальному объекту. Вообще, на всех этапах исследования напряженно-деформированного состояния здания или сооружения математическая теория, экспериментальные методы и численный расчет должны применяться совместно и согласованно, а всякое противопоставление здесь неуместно и бессмысленно.

Создание дискретной (численной) или дискретно-континуальной (численно-аналитической) модели конструкции для определенной расчетной схемы связано с рассмотрением следующих основных вопросов:

– математическая формулировка (постановка) задачи;

– дискретное (для численных методов) или дискретно-континуальное (для численно-аналитических методов) представление модели конструкции (дискретизация);

– построение вычислительного алгоритма;

– корректная реализация алгоритма с учетом оптимальных требований к ресурсам ЭВМ.

Рассмотрим перечисленные этапы более подробно.

Расчетные схемы конструкций, зданий и сооружений всегда состоят из одного или нескольких элементов (стержни, плиты, оболочки, массивные фрагменты и т.д.). Напряженно-деформированное состояние каждого отдельно взятого элемента описывается краевой или начально-краевой задачей для одного дифференциального уравнения или для системы дифференциальных уравнений. Расчет сооружения состоит в решении краевых задач для всех его конструктивных элементов с заданными условиями их сопряжения. Традиционная постановка граничных задач состоит из описания исходной области, условий внутри области (дифференциальных уравнений) и условий на ее границе (начальных и краевых), при этом все три части исходной постановки достаточно независимы, хотя и соблюдаются некоторые требования согласованности и непротиворечивости. Независимость формулировок внутренних и граничных условий не играет роли, когда ищется точное аналитическое решение задачи, но становится весьма неудобной в случае применения приближенных методов решения. Основной причиной является необходимость вычисления и оценки невязки для произвольных функций, которые в общем случае не удовлетворяют ни уравнениям, ни граничным условиям. Кроме того, для вычисления невязки и формирования разрешающей системы желательно иметь единые алгоритмы, учитывающие внутренние и граничные условия одновременно. Таким образом, появляется необходимость в конструктивных формулировках граничных задач, которые включали бы все части традиционной постановки в согласованном с вычислительной точки зрения виде.

Этим требованиям в значительной мере удовлетворяют вариационные постановки, получившие широкое распространение в строительной механике и механике деформируемого твердого тела [35,55,120,122-126,129,130, 133,288]. Если соответствующий функционал может быть эффективно вычислен для любой соответствующей функции, то формирование невязки и разрешающей системы при реализации условия его стационарности не вызывает принципиальных трудностей, за исключением относительно невысокой скорости этого формирования. Кроме того, следует помнить, что не для всех задач существует эквивалентный минимизирующий функционал (например, нестационарные задачи). В связи с тем, что традиционная постановка краевых задач предъявляет несколько завышенные требования к гладкости функций и имеет сложную формулировку естественных краевых условий, на практике основной постановкой краевых задач является именно вариационная. Она имеет меньший порядок производной, не требует отдельной записи естественных краевых условий, автоматически обеспечивает симметричную структуру аппроксимирующих систем уравнений. Отметим, что из вариационной постановки выводится в качестве уравнений Эйлера краевая задача в виде уравнений. Обратная связь напрямую не прослеживается, поскольку в традиционной формулировке при краевых условиях отсутствуют весовые характеристики.

Основным формулировкам краевых задач строительной механики посвящена *Глава 2* настоящей монографии. Следует отметить, что почти все представленные операторы краевых задач являются самосопряженными, в том числе и для задач со смешанными краевыми условиями. Показывается, что определяющими факторами для формулировки краевых задач являются дифференциальный оператор и характеристическая функция области, занимаемой конструкцией. Вид и тип краевых условий вытекает непосредственно из действия оператора на произведение характеристической функции и искомой функции и, вообще говоря, не требуется отдельно основанная на физической постановке формулировка краевых условий, как естественных (силовых), так и главных (кинематических). Важным фактором является формулировка правых частей краевых задач с использованием обобщенных функций, что способствует получению общих решений из единых формул. Другое преимущество такой формулировки – очевидная возможность построения краевых условий в однородном виде для произвольного случая. Серьезным алгоритмическим преимуществом операторных постановок является тот факт, что их можно рассматривать в любой расширенной области, в частности стандартной, что приводит к общим алгоритмам, не зависящим от конфигурации реальной конструкции.

Все численные и численно-аналитические подходы к решению задач строительной механики используют дискретное и дискретно-континуальное представление конструкций с помощью конечноразностных схем [273-278], конечных элементов [76,88,90,118,279,302] и граничных элементов [126]. В настоящее время наиболее популярными методами дискретизации краевых задач строительной механики, как известно, являются метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ) и вариационно-разностный метод (ВРМ). Все три указанных метода достаточно подробно отражены в многочисленных монографиях и учебниках, реализованы в программно-алгоритмических комплексах промышленного типа. Своеобразными корректными численно-аналитическими «аналогами» перечисленных подходов, предложенными в работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова, являются соответственно дискретно-континуальный метод конечных элементов (ДКМКЭ), дискретно-континуальный метод граничных элементов (ДКМГЭ) и дискретно-континуальный вариационно-разносный метод (ДКВРМ). Описанию теоретических основ и приложений ДКМКЭ и ДКМГЭ посвящены монографии [122-126,129,130]. В рамках данной книги излагаются многоуровневые дискретные (*Главы 3, 4*) и дискретно-континуальные (*Главы 4, 6*) реализации ВРМ. Заметим, что, в целом, здесь не предлагается принципиально новых подходов к дискретизации задач расчета конструкций. За основу принимаются ВРМ и ДКВРМ, хотя многие предлагаемые «фундаментальные» методы и алгоритмы, в частности представленные в *Главе 4*, на которых базируются все авторские разработки, могут быть с успехом использованы совместно с другими численными и численно-аналитическими подходами. В этом смысле следует особо отметить универсальные корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач расчета строительных конструкций для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с кусочно-постоянными коэффициентами и их систем. Важно подчеркнуть, что построение аналитических решений для такого рода задач, как правило, наталкивается на трудности, связанные с наличием в общем виде решения гиперболических функций и экспоненциальных функций с положительными аргументами. При практической реализации это приводит к явлению, называемому в вычислительной математике «вычислительной катастрофой». Заметим, что подобное характерно для многих традиционных (известных базовых) подходов, в частности, например, для такого известного в строительной механике метода, как метод начальных параметров. Правильный выбор фундаментального решения позволяет полностью исключить указанные выше нежелательные функции и обеспечивает корректную с вычислительной точки зрения реализацию решения. Сформулированы общие решения краевых задач строительной механики на основе использования фундаментальной функции, гарантирующие корректную реализацию вне зависимости от длины и жесткостных характеристик конструкции. Также приведены удобные в практическом отношении основные формулы дифференцирования решений дифференциальных уравнений с помощью некоторых матриц перехода. Все это избавляет расчетчика от непосредственного дифференцирования функций. В целом, по мнению авторов, наиболее рекомендуемым способом для решения рассматриваемого круга задач является представление соответствующих систем и, что самое главное, их решение на основе сведения к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Это облегчает учет произвольных краевых условий, а также позволяет вычислять искомые функции и их производные без выполнения операций дифференцирования, уменьшает объем вычислений, обеспечивает необходимую универсальность подхода. Вместе с тем необходимо отметить, что в ряде случаев при решении задач строительной механики альтернативой является их решение на основе сведения к системе дифференциальных уравнений второго порядка. Это характерно, например, при расчете плит. В этой связи также представлены универсальные корректные методы точного аналитического решения задач такого вида.

Глава 3 посвящена непосредственному описанию дискретных реализаций вариационно-разностного метода на основе метода расширенной (стандартной) области. Аппроксимация стандартной области состоит в задании сетки, топологически эквивалентной прямоугольной таким образом, чтобы она как можно лучше соответствовала очертаниям конструкции, т.е. исходной области. Понятие топологической эквивалентности в данном случае означает, что она может быть получена из прямоугольной сетки в результате некоторой невырожденной деформации ячеек последней без их «перекручивания». Выбор такого класса сеток, с одной стороны, дает возможность аппроксимировать большое количество разнообразных конструкций, а с другой – позволяет использовать простую регулярную нумерацию узлов, что приводит в дальнейшем к удобным математическим формулам, эффективным вычислительным схемам и алгоритмам, а также существенно упрощает сбор исходной информации и вывод результатов. Следует обратить внимание на то, что полученные дискретные формулы почти полностью повторяют исходные операторные уравнения краевых задач, что свидетельствует о целесообразности операторных формулировок. Имеются также и ленточные представления соответствующих операторов. Кроме того, в главе излагается и наиболее эффективный в настоящее время подход к решению произвольных многомерных задач на основе многоуровневых методов, частным случаем которых выступает полуитерационный метод, относящийся к классу многосеточных. Полуитерационный метод базируется на построении специального эквивалентного оператора к оператору исходной задачи, причем это построение ведется на специальной последовательности сеточных (в частности, вариационно-разностных) аппроксимаций.

В *Главе 5* настоящей монографии излагается самый, пожалуй, популярный в настоящее время подход к решению произвольных многомерных задач на основе многоуровневых методов, частным случаем которых выступает полуитерационный метод, относящийся к классу многосеточных. Полуитерационный метод основан на построении специального эквивалентного оператора к оператору исходной задачи, причем это построение ведется на специальной последовательности сеточных аппроксимаций.

В *Главе 6* рассматриваются дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. Предложенный А.Б. Золотовым и П.А. Акимовым [122-125,129,130] дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ) предназначен для расчета конструкций, физико-геометрические параметры которых постоянны или кусочно-постоянны (регулярны) по некоторому (основному) координатному направлению. Метод является дискретно-континуальным в том смысле, что по данному основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический характер получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация с использованием стандартной техники вариационно-разностного метода. Выбор подобной схемы аппроксимации позволяет гармонично сочетать простоту и наглядность, свойственные конечно-разностным методам, с преимуществами вариационной постановки (меньший порядок производных и автоматическое удовлетворение решения основным (естественным) граничным условиям), с одной стороны, и очевидные достоинства аналитического решения − с другой. Использование ДКВРМ позволяет сравнительно просто получить дискретную операторную формулировку рассматриваемой задачи по направлениям сеточной аппроксимации, внешне повторяющую ее континуальную постановку, представленную соответствующими дифференциальными уравнениями. В случае, когда максимальный порядок производной по неосновным направлениям равен единице, ДКВРМ и ДКМКЭ совпадают на уровне разрешающих систем и, следовательно, приводят к одинаковому решению. При наличии производных более высокого порядка ДКВРМ позволяет получить разрешающую систему с меньшим числом неизвестных. Следует отметить, что ДКВРМ используется как для получения непосредственного решения задач, так и для сопоставления с результатами, найденными при помощи ДКМКЭ.

Основной целью представляемых в настоящей монографии исследований являлась разработка, совершенствование и развитие численных и численно-аналитических методов расчета сложных, в частности трехмерных, конструкций. Многие представленные в книге методы можно отнести к многоуровневым в том смысле, что решение задачи включает решение последовательности вспомогательных задач. Введение последовательности вспомогательных задач позволяет в ряде случаев использовать в алгоритмах априорную информацию о свойствах решения, вытекающих из механической природы задачи, и о геометрической структуре исходной конструкции. Построение соответствующих алгоритмов может быть осуществлено, например, за счет разумного сочетания прямых и итерационных подходов.

В *Главе 6* излагаются многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода применительно к задачам локального расчета конструкций. Эти методы, очевидно, связаны с построением локальных решений, необходимых для исследования конструкций в наиболее ответственных местах. Такими алгоритмами являются подходы, основанные на сгущении сеток аппроксимации, и методы фрагментации (последовательного «вырезания»). В монографии эти методы рассматриваются, главным образом, с точки зрения «правильной» асимптотики «мельчения» сетки или фрагментации. Данные исследования основаны на использовании в оценках асимптотики поведения фундаментальной функции. Авторами получены конкретные результаты, позволяющие строить правильное «разбиение» сеток. В тексте главы также представлены элементы и основные понятия многоуровневого кратномасштабного вейвлет-анализа, являющегося, в частности, эффективным инструментарием при разработке авторами как дискретных, так и дискретно-континуальных реализаций вариационно-разностного метода локального расчета строительных конструкций. Отметим, что вейвлет-анализ является одним из самых прогрессирующих направлений в анализе и решении различных задач, связанных с дифференциальными уравнениями, а также в целом ряде других проблем математической физики. Это направление в какой-то степени является альтернативой и обобщением известного аппарата преобразований Фурье. Главное свойство – возможность локализации прямого и обратного преобразований при решении задач расчета конструкций, что позволяет исследовать отдельно решение локальных и глобальных проблем.

Книга отражает результаты многолетних исследований, выполненных на кафедре информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета (МГСУ) в рамках научно-педагогической школы «Численное моделирование и методы прикладной математики в задачах строительства», основателем и руководителем которой являлся Почетный член Российской академии архитектуры и строительных наук, Почетный работник высшего образования России, Почетный профессор МГСУ, доктор технических наук, профессор Александр Борисович Золотов. Непосредственная работа над написанием монографии началась уже после того, как Александр Борисович ушел из жизни, но вместе с тем именно он, выдающийся российский ученый, Учитель каждого из соавторов, основоположник большинства представляемых постановок, методов и алгоритмов, по сути, и является научным редактором издания в целом.

Список литературных источников, приведенный в конце книги, ни в коей мере не может претендовать на полноту.

Соавторами различных параграфов книги стали бывшие и нынешние коллеги авторов по кафедре информатики и прикладной математики МГСУ: М.В. Белый, В.Е. Булгаков, Т.Б. Кайтуков, А.В. Ларионов, Д.В. Медведько, В.Н. Сидоров, В.А. Харитонов и И.В. Ширинская.

Авторы признательны за поддержку, полученную при подготовке монографии от В.А. Золотовой. При изложении материала учитывались высказанные в разное время замечания и пожелания профессоров А.А. Амосова, В.И. Андреева, А.М. Белостоцкого, Е.Б. Кореневой, С.В. Кузнецова, А.Н. Леонтьева, В.Л. Мондруса, Н.С. Никитиной, А.Б. Павлова, В.Н. Савостьянова, С.И. Трушина, В.А. Харитонова, В.И. Ширинского (все – МГСУ), Н.И. Карпенко (Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН (НИИСФ РААСН)), Л.С. Ляховича (Томский государственный архитектурно-строительный университет), В.И. Травуша (Экспериментальный научно-проектный институт (ЭНПИ)), А.В. Александрова, С.Б. Косицына, Н.Н. Шапошникова (все – Московский государственный университет путей сообщения), В.И. Сливкера (ЗАО «Институт Гипростроймост – Санкт-Петербург»), С.М. Алейникова (Воронежский государственный архитектурно-строительный университет), В.И. Ванько (Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана), А.Н. Супруна (Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет), Н.П. Осмоловского и А.А. Шкаликова (оба – Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова).

Авторы благодарны рецензентам книги, профессорам В.И. Андрееву и А.М. Белостоцкому, за проявленный интерес и доброе отношение к работе.

Для оформления обложки книги использовались иллюстрации, любезно предоставленные профессором А.М. Белостоцким.

Авторы будут признательны за любые высказанные мнения и замечания по содержанию и изданию книги.

Исследования частично проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.

2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.

3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 г.

Акимов Павел Алексеевич
e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна
e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА И КРАТКИЙ ОБЗОР ПОСТАНОВОК КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ И НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ИХ ЧИСЛЕННОГО И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Представляемый ниже обзор проведен, в основном, с позиции излагаемых в настоящей монографии дискретных и дискретно-континуальных реализаций вариационно-разностного метода решения краевых задач, основанных на традиционных, вариационных и операторных постановках. Эти постановки взаимно однозначно связаны друг с другом на основе формулировок по методу расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова. Использование в качестве расширенной области стандартной, например прямоугольной, ведет к построению относительно простых и эффективных численных и численно-аналитических методов расчета конструкций, отличающихся от общепринятых подходов. С этих позиций основное внимание в обзоре уделяется вопросам постановки краевых задач и в достаточно общих чертах анализируются традиционные и авторские методы решения, упоминаются, прежде всего, наиболее известные авторы и исследователи последних лет.

§ 1.1. Постановки краевых задач

1.1.1. Виды постановок краевых задач.

Традиционно краевые задачи формулируются в виде дифференциальных уравнений для внутренних точек конструкции и краевых условий на границе последней. Первоначальная постановка соответствующих задач для теории упругости, плит и оболочек сформулирована достаточно давно, однако появление новых материалов и конструктивных решений влечет за собой необходимость совершенствования формулировок и технических теорий, что, в свою очередь, требует развития методов расчета.

Ввиду того, что традиционная постановка краевых задач предъявляет несколько завышенные требования к гладкости функций и имеет сложную формулировку естественных краевых условий, основной постановкой краевых задач в практических приложениях является вариационная.

Вариационная постановка имеет меньший порядок производных, не требует отдельной записи естественных краевых условий, автоматически обеспечивает симметричную структуру аппроксимирующих систем уравнений.

Следует отметить, что из вариационной постановки выводится в качестве уравнения Эйлера традиционная постановка краевой задачи. Вместе с тем, обратная связь напрямую не прослеживается, поскольку в традиционной формулировке при краевых условиях отсутствуют весовые характеристики.

Третьей постановкой краевой задачи являются граничные интегральные уравнения либо в виде теории потенциала, либо в виде прямой или непрямой формулировок. Последние получаются на основе использования функции Грина в расширенной области или фундаментальной функции, а также из вариационных формулировок с применением формул Грина или Бетти. К преимуществам этого подхода относятся уменьшение количества неизвестных и хорошая обусловленность, а к недостаткам – сложность математического аппарата, связанная с регуляризацией сингулярных интегралов, а также заполненность и несимметричность разрешающих дискретных систем, существенно теряется эффективность метода для уравнений с переменными коэффициентами.

В строительной механике непрямой метод граничных интегральных уравнений может рассматриваться как частный случай метода компенсирующих или фиктивных нагрузок, предложенного Б.Г. Кореневым [163-165].

Перечисленные традиционные подходы достаточно подробно рассмотрены в книгах С.Г. Михлина [208-214]. Представительный библиографический список изданий, посвященных теории и приложениям граничных интегральных уравнений, представлен в [126]. Основные вариационные постановки краевых задач приведены, в частности, Л.А. Розиным [266,267] и В.И. Сливкером [288].

1.1.2. Обобщенные функции и обобщенные решения.

Существенный прорыв в понимании и формализации краевых задач произошел в связи с развитием понятия обобщенных функций, обобщенного решения и соболевских пространств. Значительную роль здесь сыграли, в частности, такие ученые, как С.Л. Соболев [295,296], Л. Шварц [345], И.М. Гельфанд [81], Г.Е. Шилов [81,347], Ж.-Л. Лионс [196] и др.

Введение понятия обобщенных функций позволило снять математические ограничения на гладкость входящих в уравнение функций, использовать новые функции, такие как дельта-функция в точке, дельта-функция на поверхности и их производные, имеющие реальный физический смысл. Понятие обобщенного решения позволило рассматривать решение краевых задач с позиций использования функционалов, поскольку для обобщенных функций отсутствует понятие значения в точке.

Введение соболевских пространств, а затем гильбертовой шкалы пространств и пространства следов позволило рассматривать краевые задачи над произвольными функциями и дало основную математическую трактовку оператора эллиптической краевой задачи как оператора, осуществляющего отображение

$$H^{2m+r}(\Omega) \Rightarrow H^{r}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-0.5}(\partial\Omega)\,, \qquad (1.1.1)$$

где $2m$ – порядок оператора внутренних условий исходной постановки (порядок максимальной производной); m_j – порядок граничных условий: $0 \le m_j \le 2m-1$; r – произвольное число; $H^{2m+r-m_j-0.5}(\partial\Omega)$ – пространство следов функций из $H^{2m+r}(\Omega)$.

Тем не менее, несмотря на математическую строгость определения понятия краевой задачи, конструктивное (алгоритмическое) определение оператора краевой задачи отсутствует, что и является существенным недостатком для построения численного решения.

Введение обобщенных функций также позволило развить теорию граничных уравнений в связи с определением таких обобщенных функций, как K -кратный слой, т.е. $\mu\delta^{(k-1)}(p)$, что облегчает переход от уравнений на области к уравнениям на границе.

Развитие теории граничных интегральных уравнений с применением обобщенных функций имеется в работах А.И. Цейтлина [330-332], Л.Г. Петросяна [246,332], В.И. Травуша [308,309] и др. Так, в частности, А.И. Цейтлин использует тождественное преобразование (свертку с дельта-функцией) с последующим «перебросом» оператора на дельта-функцию. При этом перебросе используются формулы типа Гаусса-Остроградского (Лагранжа-Грина), Бетти и т.д. Это приводит к постановке краевой задачи на всем пространстве с правой частью в виде скачков на границе от результата действия граничных операторов на разрывную функцию, умноженную на результат выполнения других граничных операторов над дельта-функцией. В дальнейшем при использовании функции Грина в расширенной области получаются традиционные граничные уравнения. В простейшем случае здесь повторяются результаты, используемые в качестве примеров у Г.Е. Шилова [347]. Данный подход, приводящий к постановке краевой задачи в обобщенных функциях, назван автором методом дельта-преобразований. Автор не указывает преимуществ этого подхода при численной реализации, однако можно отметить, что использование тождественного преобразования позволяет перенести вопросы аппроксимации исходной задачи на аппроксимацию дельта-функции в определенном локальном базисе. Тогда последующая аппроксимация задачи состоит в действии оператора исходной задачи на функцию-результат аппроксимации дельта-функции.

Последующее развитие теории краевых задач приводит к понятию псевдодифференциальных уравнений, которое включает в себя и дифференциальные, и интегральные уравнения. В связи с этим можно отметить, что с позиции регуляризации граничных уравнений правильно их формулировать как интегро-дифференциальные, поскольку соответствующие сингулярные ядра являются производными от обычных функций.

Одним из вариантов развития теории граничных уравнений являются граничные уравнения с проекторами, основанные на понятиях четкого следа и разработанные А.П. Кальдероном [382], Р.Г. Сили [521], В.С. Рябеньким [268], М.И. Лазаревым [187] и др.

Методы расширенной области при постановке и решении задач строительной механики и математической физики в континуальном виде ставились Б.Г. Кореневым [162-164], О.В. Лужиным и другими применительно к методу компенсирующих нагрузок. В дальнейшем понятие расширенной области получило развитие в теории граничных уравнений и обобщенных функций.

Применение расширенной (стандартной) области и характеристической функции $\theta(x)$ исходной области в качестве средства описания и постановки исходной задачи было осуществлено А.Б. Золотовым сначала для трехмерной задачи теории упругости, а впоследствии и для других краевых задач.

Введение характеристической функции в описание трехмерной краевой задачи, помимо более четкой математической постановки, является средством, позволяющим наиболее экономно описать краевую задачу в сложной области, поскольку любая характеристическая функция для строительной конструкции легко описывается неравенствами. Авторам представляется, что более простой способ задания краевой задачи отсутствует.

В работах А.Б. Золотова [120] и В.А. Харитонова [323] в отличие от первоначального (прямого) варианта метода стандартной области, состоящего в непосредственном включении характеристической функции в постановку, появился второй вариант метода стандартной области. Последний заключается в том, что краевая задача рассматривается в расширенной области на множестве функций, имеющих разрыв вместе с производными при переходе через границу исходной области. В свою очередь, в дискретном случае это привело к двухступенчатому решению, близкому к методу граничных уравнений.

В настоящее время весь комплекс постановок краевых задач в математической литературе зачастую рассматривается с позиций применения алгебры типа свертки. Это относится, в частности, ко всем дифференциальным операторам и большей части интегральных. Постановка краевых задач в терминах алгебры типа свертки рассматривается в статьях М.И. Вишика и Г.И. Эскина [63,64]. При постановке задачи по методу стандартной области за счет введения характеристической функции области в качестве коэффициента в дифференциальном операторе краевая задача целиком совпадает с дифференциальным оператором на стандартной области, и его представление операциями типа свертки удобно и эффективно.

При дискретизации на стандартной области исходный оператор переходит в операции с ленточными матрицами, что способствует созданию эффективных алгоритмов формирования и решения краевых задач строительной механики. Инициаторами и разработчиками этого направления явились А.Б. Золотов и В.Н. Сидоров [120,283]. Если раньше для решения краевых задач, как правило, предлагались так называемые матричные методы общего типа, то сейчас с определенных позиций, по-видимому, целесообразно предложить в качестве математического аппарата алгебру матриц блочно-ленточной структуры, операции в которой являются экономичными как по быстродействию, так и по расходу памяти ЭВМ.

§ 1.2. Метод конечных разностей

1.2.1. Краткая характеристика метода конечных разностей.

До появления ЭВМ численные методы расчета конструкций не могли интенсивно развиваться, поскольку их реализация вызывала сложности. В основном это были оценки, упрощенные технические теории, поиск близких аналитических решений.

Метод конечных разностей (МКР), получивший наиболее сильное развитие именно с появлением ЭВМ, является, по-видимому, первым численным методом, успешно примененным для решения задач строительной механики. Суть метода очень проста. Все функции, входящие в заданные дифференциальные уравнения и в выражения граничных условий, заменяются сеточными (в исследуемой области задается сетка). Производные в этих уравнениях и в краевых условиях заменяются соответствующими разностными соотношениями. Таким образом, задача дискретизируется на выбранную сетку. Иными словами, МКР обычно связан с непосредственной реализацией разностного оператора, соответствующего исходным дифференциальным уравнениям задачи. В результате указанной процедуры, осуществляемой на множестве точек (узлов) внутри области тела, формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных, при этом значения неизвестной функции в узловых точках связаны с граничными условиями в выбранных точках на границе. Эта система, характерной особенностью которой является разреженная структура матрицы коэффициентов, может быть решена прямыми или итерационными методами. Возможность легко распространить метод на решение геометрически и физически нелинейных задач, является естественным развитием заложенной в нем относительно простой идеи и частично объясняет то большое внимание, которое было уделено данному подходу.

Конечноразностные схемы многообразны из-за того, что функции и операции дифференцирования могут аппроксимироваться по разным формулам и любому количеству узлов сетки, однако все же следует придерживаться ряда правил. Во-первых, аппроксимации левой и правой, а также отдельных частей уравнений должны быть согласованы. Во-вторых, результирующая матрица разностного оператора должна быть хорошо обусловлена.

МКР обладает рядом недостатков, которые сразу обнаруживаются, когда решаются задачи с усложненным очертанием области (возникают проблемы, связанные с адекватным заданием граничных условий в терминах МКР) и к тому же, когда желательны достаточно точные решения. Следует отметить, что выражения граничных условий являются особенно чувствительными для решения, и их некорректное задание может привести к неудовлетворительному результату в целом. Тем не менее, использование специальных приемов, в частности введение законтурных точек, позволяет добиваться описания граничных условий с порядком точности, адекватным порядку точности внутри области. В целом, высокие требования к точности результатов, как правило, влекут за собой необходимость введения большого числа узловых точек.

Отчасти по этим причинам МКР стали вытеснять более сложные методы, такие, как, например, метод конечных элементов (МКЭ). Широкое применение последнего в расчетной практике привело к снижению использования МКР и других численных методов и замедлению их развития. В этой связи довольно много задач, ранее решавшихся с помощью МКР, нашли свою реализацию в рамках МКЭ. По мнению ряда исследователей [219] данная ситуация в развитии и использовании МКР является отчасти неоправданной – МКР может по-прежнему широко и эффективно применяться, а при решении некоторых задач и вовсе составить хорошую альтернативу МКЭ. Исследования [321,322], посвященные сравнительному анализу МКР и МКЭ, подтверждают подобную оценку.

К достоинствам МКР можно отнести возможность построения аппроксимаций разностными уравнениями повышенного порядка точности; возможность использования сеток с переменными шагами; наличие эффективных алгоритмов решения СЛАУ высокого порядка с разреженными матрицами.

С точки зрения качества аппроксимации и качества получаемых дискретных уравнений наиболее удачными являются разностные схемы, разрабатываемые в рамках вариационно-разностного метода, т.е. в случае вывода разностных уравнений из соответствующего функционала энергии. Этот же принцип соблюден и в основах МКЭ. Такие разностные схемы можно составить и при аппроксимации дифференциальных уравнений. При выборе способа аппроксимации большое значение имеют простота и алгоритмичность составления разностной схемы по исходной задаче. В этом отношении весьма эффективным является уже упомянутый ранее метод стандартной (расширенной) области, предложенный А.Б. Золотовым [120].

1.2.2. Библиография по методу конечных разностей.

Вынужденно неполный перечень отечественных ученых-механиков и математиков, внесших существенный вклад в развитие МКР, включает имена Н.П. Абовского [2,3], В.Б. Андреева [275], П.М. Варвака [51,52], Р.Ф. Габбасова [74,75], С.К. Годунова [84], А.В. Гулина [276], М.И. Длугача [103], А.Б. Золотова [120], М.Л. Мозгалевой [215], К. Мортона [265], Е.С. Николаева [277], Ю.П. Попова [278], В.А. Постнова [252], Р. Рихтмайера [265], В.С. Рябенького [268], А.А. Самарского [273-278], В.Н. Сидорова [283], Н.Н. Столярова [301], С.П. Тимошенко [305,306], Р.П. Федоренко [315,316] и др.

1.2.3. Понятие об экономичных разностных схемах.

В свое время в качестве самых эффективных методов решения многомерных задач предлагались так называемые экономичные разностные схемы. Суть их состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса решаются либо одномерные задачи, либо задачи с треугольной матрицей. В связи с этим различаются следующие разностные схемы:

– схема с факторизованным оператором, где в качестве эквивалентного оператора принимается произведение одномерных по каждому направлению;

– попеременно-треугольный метод, где в качестве эквивалентного оператора принимается произведение треугольных операторов;

– метод дробных шагов, где каждый шаг итераций состоит, в свою очередь, из нескольких шагов, при которых решаются одномерные задачи.

В разработке указанных методов принимали участие такие отечественные ученые как Е.Г. Дьяконов, Г.И. Марчук [201], А.А. Самарский, В.К. Саульев, Н.Н. Яненко, В.Б. Андреев. Так, наиболее существенный вклад в факторизованные схемы внес Е.Г. Дьяконов [110,111], в попеременно-треугольные – А.А. Самарский [273-278], а в метод дробных шагов – Н.Н. Яненко. Метод с факторизованным оператором для трехмерной задачи теории упругости был реализован А.Б. Золотовым в 1970 году.

Вычислительная практика показала, что, несмотря на весьма удовлетворительные оценки скорости сходимости экономичных схем, их область применения ограничена расчетом конструкций с простыми геометрическими очертаниями и граничными условиями. Попытки решения этими методами более сложных задач, как правило, не приводят к успеху из-за плохой

Оглавление

		стр.
Предисловие.	**………………………………………………………...................**	**3**
Глава 1.	**Общая характеристика и краткий обзор постановок краевых задач расчета конструкций и некоторых методов их численного и численно-аналитического решения. …………..**	**11**
§ 1.1.	Постановки краевых задач. ……………………………………………...	11
§ 1.2.	Метод конечных разностей. ………………………………………..	14
§ 1.3.	Вариационно-разностный метод. …………………………………	17
§ 1.4.	Многосеточные методы. …………………………………………....	19
§ 1.5.	Метод прямых. ……………………………………………………...	20
§ 1.6.	Дискретно-континуальные методы. ………………………………	21
§ 1.7.	Методы локального решения краевых задач. ………………………	24
Глава 2.	**Континуальные постановки краевых задач расчета конструкций в расширенной (стандартной) области. …………..**	**25**
Часть 1.	***Введение в метод расширенной (стандартной) области.***	
§ 2.1.	Оператор краевой задачи. …………………………………………….	25
§ 2.2.	Связь операторных постановок с граничными уравнениями. ……...	28
§ 2.3.	Общий подход для операторных формулировок. Характеристическая функция области и дельта-функция границы.	29
§ 2.4.	Связь характеристической функции области с интегральными формулами. ………………………………………………………………	32
Часть 2.	***Метод расширенной (стандартной) области в общей постановке.***	
§ 2.5.	Прямой вариант метода расширенной (стандартной) области. ……	33
§ 2.6.	Непрямой вариант метода расширенной (стандартной) области. …	47
§ 2.7.	Прямая постановка граничных уравнений. ……………………….	48
§ 2.8.	Непрямая постановка граничных уравнений. ………………………	53
§ 2.9.	Интегро-дифференциальное представление операторов в граничных уравнениях. …………………………………………..	54
Часть 3.	***Прямые и обратные операторы в расширенной области.***	
§ 2.10.	Обратный оператор на расширенной области. ……………………...	57
§ 2.11.	Алгебра операторов теории упругости. ……………………………...	63
§ 2.12.	Обратный оператор теории упругости в прямоугольной области. Связь с разложением в ряд Фурье. …………………………………....	66
Часть 4.	***Примеры постановок краевых задач в расширенной области.***	
§ 2.13.	Задачи для уравнения Пуассона. ……………………………………..	72
§ 2.14.	Задачи теплопроводности. ……………………………………………	73
§ 2.15.	Задачи теории упругости. …………………………………………….	74
§ 2.16.	Задачи осесимметричной теории упругости. ………………………..	77
§ 2.17.	Задачи теории упругости с учетом несжимаемости материала. …...	77
§ 2.18.	Общая задача термоупругости. ………………………………………	78
§ 2.19.	Задачи об изгибе изотропной пластины на упругом основании. …..	79
§ 2.20.	Задачи об изгибе изотропной пластины с учетом сдвига. …………	81
§ 2.21.	Задачи об изгибе ортотропной пластины на упругом основании. …	82
§ 2.22.	Задачи расчета оболочек. ……………………………………………..	82
§ 2.23.	Задачи расчета цилиндрических оболочек. …………………………	83

Часть 5. Примеры безусловных постановок краевых задач в расширенной области.
§ 2.24. Задачи о поперечном изгибе балки Бернулли. ……………………… 84
§ 2.25. Задачи об изгибе изотропной пластины. …………………………… 90
§ 2.26. Задачи теории упругости. ……………………………………………. 101

Глава 3. Дискретные постановки краевых задач расчета конструкций в расширенной (стандартной) области. …………………………... 106
§ 3.1. Аппроксимация области и функций. ……………………………... 106
§ 3.2. Аппроксимация операторов. ………………………………………… 112
§ 3.3. Особенности аппроксимации некоторых типов краевых задач. …... 116
§ 3.4. Угловой вариант аппроксимации. …………………………………… 118
§ 3.5. Аппроксимация функций и дифференциальных операторов с использованием операций осреднения. …………………………… 121
§ 3.6. Ленточное представление операторов. ……………………………… 127

Глава 4. Некоторые основополагающие методы и алгоритмы дискретных и дискретно-континуальных реализаций вариационно-разностного метода. ………………………………… 132
Часть 1. Метод базисных (локальных) вариаций.
§ 4.1. Введение. ……………………………………………………………… 132
§ 4.2. Теоретические основы метода базисных (локальных) вариаций. …. 133
§ 4.3. Суть метода базисных (локальных) вариаций. ……………………... 139
Часть 2. Стыковка и сочетание задач.
§ 4.4. Сочетание задач. ……………………………………………………… 141
§ 4.5. Стыковка краевых задач. ……………………………………………... 142
Часть 3. Выделение неизвестных.
§ 4.6. Постановка задачи выделения неизвестных. ……………………….. 144
§ 4.7. Сужение (редукция) функционала. ………………………………….. 146
§ 4.8. Приближенный метод вычисления базисных функций, элементов матрицы коэффициентов и вектора правых частей разрешающей системы линейных алгебраических уравнений с применением штрафных функций. ……………………………... 147
§ 4.9. Выделение неизвестных с помощью множителей Лагранжа. ……... 148
§ 4.10. Физическая интерпретация метода штрафа и множителей Лагранжа. ……………………………………………... 149
§ 4.11. Стыковка краевых задач. ……………………………………………... 149
Часть 4. Применение алгебры типа свертки для решения краевых задач методом расширенной (стандартной) области.
§ 4.12. Введение. ……………………………………………………………… 150
§ 4.13. Формулировка краевых задач в свертках. …………………………... 153
§ 4.14. Алгебра матриц блочно-ленточной структуры. …………………….. 154
Часть 5. Корректные универсальные методы точного аналитического решения краевых задач расчета строительных конструкций для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами и их систем.
§ 4.15. Корректный универсальный метод точного аналитического решения краевых задач расчета строительных конструкций для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. ………………………… 156

§ 4.16. Корректный универсальный метод точного аналитического решения краевых задач расчета строительных конструкций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. ……… 167
§ 4.17. Корректный универсальный метод точного аналитического решения краевых задач расчета строительных конструкций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. ……… 174

Глава 5. Итерационные методы решения многомерных краевых задач строительной механики и математической физики. ……. 182
Часть 1. Итерационный процесс с эквивалентным факторизованным оператором.
§ 5.1. Итерационный процесс. ……………………………………………… 182
§ 5.2. Схема факторизации. ……………………………………………… 182
§ 5.3. Оценка близости оператора Лапласа оператору теории упругости. 184
§ 5.4. Общий итерационный процесс с факторизованным оператором. … 188
§ 5.5. Случай произвольной сеточной аппроксимации. ………………….. 190
§ 5.6. Итерационный процесс для смешанной краевой задачи. ………….. 192
Часть 2. Полуитерационный многосеточный метод.
§ 5.7. Введение. …………………………………………………………… 192
§ 5.8. Двухсеточный вариант итерационного метода. …………………….. 193
§ 5.9. Полуитерационный метод в общем случае. ………………………… 195
§ 5.10. Анализ сходимости метода. ………………………………………….. 199

Глава 6. Дискретно-континуальный вариационно-разностный метод расчета строительных конструкций. ……………………………... 201
§ 6.1. Введение. …………………………………………………………… 201
Часть 1. Континуальные операторные постановки краевых задач с выделением основного направления.
§ 6.2. Задача для уравнения Пуассона. …………………………………….. 201
§ 6.3. Двумерная задача теории упругости. ……………………………….... 202
§ 6.4. Трехмерная задача теории упругости. ……………………………… 203
§ 6.5. Учет упругоподатливых и односторонних связей при решении задач теории упругости. ……………………………… 205
§ 6.6. Задача об изгибе тонкой пластины на упругом основании. ……….. 206
Часть 2. Дискретно-континуальные операторные постановки краевых задач с выделением основного направления.
§ 6.7. Двумерная задача теории упругости. ……………………………….... 210
§ 6.8. Трехмерная задача теории упругости. ……………………………… 216
§ 6.9. Задача об изгибе тонкой пластины на упругом основании. ……….. 224

Глава 7. Дискретные и дискретно-континуальные подходы к локальному расчету строительных конструкций. ……………. 237
§ 7.1. Введение. …………………………………………………………… 237
Часть 1. Методы построения дискретных фундаментальных функций.
§ 7.2. Понятие о дискретной фундаментальной функции. ……………….. 237
§ 7.3. Метод построения дискретной фундаментальной функции с помощью интегральных выражений в комплексной плоскости. ... 239

§ 7.4. Метод вычисления дискретной фундаментальной функции с использованием дискретного преобразования Фурье. …………… 243
§ 7.5. Метод С.Л. Соболева для вычисления фундаментальной функции дискретного оператора Лапласа. …………………………………….. 245
§ 7.6. Метод вычисления дискретной фундаментальной функции с помощью решения вспомогательных краевых задач в расширенной области. ……………………………………………… 246
§ 7.7. Сравнительная характеристика методов вычисления дискретных фундаментальных функций. ……………………………………… 253
Часть 2. Метод фрагментации.
§ 7.8. Описание метода. ………………………………………………... 254
§ 7.9. Обоснование алгоритма фрагментации. …………………………….. 259
§ 7.10. Лагранжев подход к фрагментации. ………………………………… 260
§ 7.11. Фрагментация и многосеточность. ……………………………….. 264
Часть 3. Метод локализации.
§ 7.12. Введение. …………………………………………………………… 265
§ 7.13. Исследование методов получения локальных решений для одномерных задач. ……………………………………………….. 265
§ 7.14. Оценка влияния спрямления функции. ……………………………... 278
§ 7.15. Использование фундаментальной функции для оценки реакции связи. ………………………........................... 284
§ 7.16. Оценка влияния спрямления функции в случае ограниченной области. ………………………………............. 285
§ 7.17. Влияние закрепления значения искомой функции в узлах мелкой сетки. ………………………………………………… 287
§ 7.18. Определение величины изменения шага в локальной сетке и оценка погрешности. ……………………………………………….. 291
§ 7.19. Заключение. ………………………………………………………… 294

Глава 8. Вейвлет-реализации дискретных и дискретно-континуальных подходов к локальному расчету строительных конструкций. ... 295
Часть 1. Понятие о вейвлет-анализе и его приложениях.
§ 8.1. Вейвлет-анализ и его применение для решения задач расчета конструкций: библиографический обзор. ………………….. 295
§ 8.2. Элементы и основные понятия кратномасштабного вейвлет-анализа. ………………………………………………………… 300
Часть 2. Некоторые основополагающие методы и алгоритмы.
§ 8.3. Быстрые алгоритмы одномерных вейвлет-преобразований по дискретному базису Хаара. …………………………………….. 310
§ 8.4. Быстрые алгоритмы двумерных вейвлет-преобразований по дискретному базису Хаара. …………………………………….. 316
§ 8.5. О вычислении свертки функций в базисе Хаара. …………………... 326
§ 8.6. Алгоритм осреднения коэффициентов разложения дискретной функции по одномерному базису Хаара. ……………… 330
§ 8.7. Алгоритм осреднения коэффициентов разложения дискретной функции по двумерному базису Хаара. ……………….. 333
§ 8.8. Об алгоритмической реализации формул осреднения коэффициентов разложения дискретной функции по базису Хаара. 337
§ 8.9. Об алгоритмах многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного одномерного базиса Хаара. …......... 339

§ 8.10. Об алгоритмах многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного двумерного базиса Хаара. …........... 344
§ 8.11. Корректный алгоритм редукции коэффициентов разложения функции по дискретному одномерному базису Хаара. ……………. 346
§ 8.12. Корректный алгоритм редукции коэффициентов разложения функции по дискретному двумерному базису Хаара. ……………… 352
Часть 3. Основы корректных дискретных подходов к локальному расчету строительных конструкций.
§ 8.13. Введение. ………………………………………………………………… 358
§ 8.14. Постановка задачи. ………………………………………………………… 360
§ 8.15. Переход к базису Хаара. ……………………………………………... 361
§ 8.16. Уменьшение числа неизвестных. Осреднение. Редукция. ………… 361
§ 8.17. Апробация корректного дискретного подхода к локальному расчету строительных конструкций на примере решения одномерной краевой задачи. …………………. 361
Часть 4. Основы корректных дискретно-континуальных подходов к локальному расчету строительных конструкций.
§ 8.18. Двумерная задача теории упругости. ………………………………... 367
§ 8.19. Трехмерная задача теории упругости. ………………………………. 376
§ 8.20. Задача об изгибе тонкой пластины на упругом основании. ……….. 383

Библиографический список. …………………………………………………... 389

ЗОЛОТОВ
Александр Борисович
профессор кафедры информатики
и прикладной математики
Московского государственного
строительного университета

АКИМОВ
Павел Алексеевич
профессор кафедры информатики
и прикладной математики
Московского государственного
строительного университета

МОЗГАЛЕВА
Марина Леонидовна
профессор кафедры информатики
и прикладной математики
Московского государственного
строительного университета