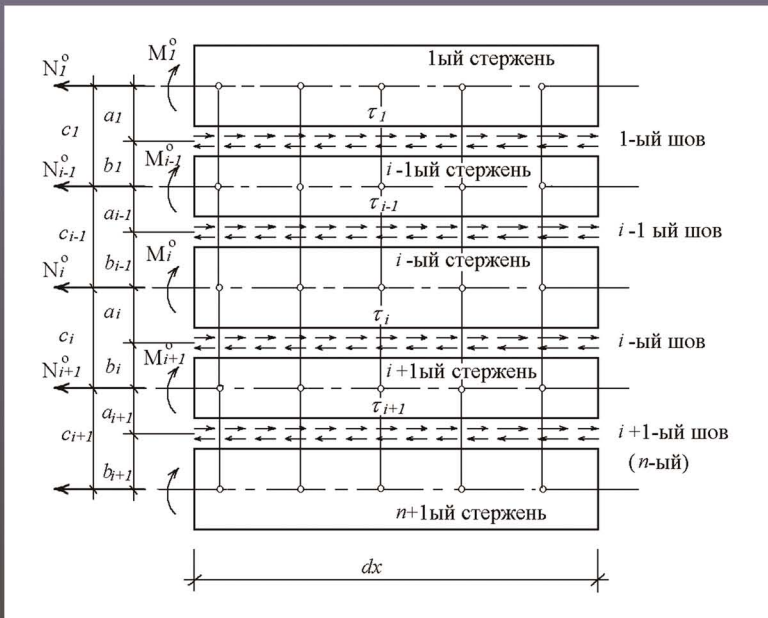


# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СВЯЗЯМИ



**Р.Ф. Габбасов, В.В. Филатов**

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА  
СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН С  
АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ  
ПОПЕРЕЧНЫМИ СВЯЗЯМИ**



Издательство АСВ  
Москва  
2014

*Рецензенты:*

Академик Международной академии информатизации, члену-корр.  
РААСН, д.т.н., профессор *Шапошников Н.Н.*;

Академик РААСН, д.т.н., профессор *Травуш В.И.*

**Габбасов Р.Ф., Филатов В.В.**

Численный метод расчета составных стержней и пластин с абсолютно жесткими поперечными связями: Монография. – М.: Издательство АСВ, 2014. – 200 с.

ISBN 978-5-4323-0020-1

Разработан эффективный численный метод расчета составных пластин и стержней по теории А.Р.Ржаницына. Даются алгоритмы и примеры решения новых задач по расчету пластин и балок с абсолютно жесткими поперечными связями: на вынужденные колебания, устойчивость, на упругом основании, с разрывными значениями коэффициентов жесткости швов и с учетом трещинообразования.

Книга рекомендуется для студентов-дипломников, аспирантов строительных ВУЗов и инженеров проектных организаций.

ISBN 978-5-4323-0020-1

© Издательский дом АСВ, 2014

© Габбасов Р.Ф., Филатов В.В., 2014

# О Г Л А В Л Е Н И Е

|  |    |
|--|----|
| Предисловие .....  | 7  |
| Введение .....   | 8  |
| <b>Глава 1.</b>  |    |
| <b>Расчет составных стержней на статические нагрузки</b> ..... 11  |    |
| § 1.1. Разрешающие дифференциальные уравнения задачи и краевые условия .....   | 11 |
| § 1.2. Определение напряжений в сечениях составляющих стержней и поперечных связях.....                                | 12 |
| § 1.3. Численный алгоритм расчета составных балок  | 14 |
| § 1.4. Решение тестовых задач по расчету составных балок.....  | 18 |
| <b>Глава 2.</b>  |    |
| <b>Решение новых задач по расчету составных стержней на статические нагрузки</b> ..... 24                              |    |
| § 2.1. Расчет неразрезных составных балок .....  | 24 |
| § 2.2. Расчет составных балок на упругом основании   | 25 |
| § 2.3. Расчет составных стержней с переменными значениями коэффициента жесткости шва .....                             | 34 |
| § 2.4. Расчет многослойных составных балок .....   | 41 |
| § 2.5. Приближенная теория расчета многослойных составных балок.....   | 44 |
| <b>Глава 3.</b>  |    |
| <b>Расчет составных балок на устойчивость, продольно-поперечный изгиб и на динамические воздействия</b> ..... 50       |    |
| § 3.1. Численный алгоритм расчета многослойных составных балок на продольно-поперечный изгиб и устойчивость.....       | 50 |
| § 3.2. Решение тестовых задач по расчету составных балок на устойчивость. Сравнение с экспериментальными данными ..... | 51 |
| § 3.3. Расчет составных балок на продольно-поперечный изгиб.....   | 58 |

|        |  |    |
|--------|--|----|
| § 3.4. | Определение собственных частот и форм колебаний составной балки .....                  | 62 |
| § 3.5. | Численный алгоритм расчета многослойных составных балок на вынужденные колебания ..... | 65 |

#### **Глава 4.**

##### **Расчет составных пластин на действие статических нагрузок.....**

|        |   |    |
|--------|---|----|
| § 4.1. | Основные дифференциальные уравнения многослойных составных пластин по теории А.Р. Ржаницына ..... | 71 |
| § 4.2. | Численный алгоритм расчета многослойных составных пластин на статические нагрузки .....           | 71 |
| § 4.3. | Уравнения для составной пластины из двух одинаковых слоев .....                                   | 79 |
| § 4.4. | Уравнения для составной пластины из четырех одинаковых слоев .....                                | 83 |

#### **Глава 5.**

##### **Примеры расчета составных пластин на статические нагрузки.....**

|        |  |    |
|--------|--|----|
| § 5.1. | Шарнирно опертая по контуру двухслойная пластина со свободными на сдвиг торцами и с жесткими закреплениями против сдвигов..... | 86 |
| § 5.2. | Двухслойная пластина с жестко заделанными сторонами и с одной свободной от закреплений стороной.....                           | 90 |
| § 5.3. | Шарнирно опертая четырехслойная пластина.....  | 94 |
| § 5.4. | Определение напряжений в сечениях составляющих пластин.....  | 97 |

#### **Глава 6.**

##### **Расчет составных пластин: неразрезных, на упругом основании, с переменными значениями коэффициента жесткости швов, многослойных и с учетом трещинообразования ..**

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| § 6.1. | Расчет неразрезных составных пластин ..... | 100 |
|--------|--|-----|

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| § 6.2. | Расчет составных пластин на упругом основании. Учет податливости поперечных связей ..... | 102 |
| § 6.3. | Расчет составных пластин с переменными значениями коэффициента жесткости швов .....      | 109 |
| § 6.4. | Упрощенная теория расчета многослойных составных пластин .....                           | 114 |
| § 6.5. | Расчет трехслойных пластин. Учет трещинообразования .....                                | 117 |

## **Глава 7.**

### **Расчет составных пластин на продольно-поперечный изгиб и устойчивость .....**

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| § 7.1. | Дифференциальные уравнения составных пластин при учете влияния продольных сил на изгибные деформации .....          | 125 |
| § 7.2. | Частные случаи расчета составных пластин на устойчивость ( $\beta=0, \alpha=\gamma$ ) .....                         | 127 |
| § 7.3. | Частные случаи расчета составных пластин на устойчивость ( $\beta=0, \alpha\neq\gamma$ ) .....                      | 133 |
| § 7.4. | Расчет на устойчивость трехслойных панелей с легким наполнителем. Сравнение с экспериментальными результатами ..... | 135 |
| § 7.5. | Пример расчета составной пластины на продольно-поперечный изгиб.....  | 140 |

## **Глава 8.**

### **Расчет составных пластин на динамические нагрузки .....**

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| § 8.1. | Дифференциальные уравнения составных пластин по теории А.Р. Ржаницына при расчете на динамические нагрузки .....      | 144 |
| § 8.2. | Определение частоты основного тона собственных колебаний двухслойной составной пластинки с нулевой толщиной шва ..... | 145 |
| § 8.3. | Частота основного тона собственных колебаний двухслойной составной пластинки при ненулевой толщине шва .....          | 148 |

|   |     |
|---|-----|
| § 8.4. Расчет составных пластин на вынужденные колебания..... | 150 |
|---|-----|

## **Глава 9.**

### **Расчет составных стержней и пластин переменного сечения .....**

154

|  |     |
|--|-----|
| § 9.1. Расчет плоских двухветвевых стержней<br>переменного сечения ..... | 154 |
|--|-----|

|  |     |
|--|-----|
| § 9.2. Приближенная методика расчета составных<br>стержней переменного сечения ..... | 161 |
|--|-----|

|  |     |
|--|-----|
| § 9.3. Приближенный способ расчета составных пластин<br>переменной жесткости ..... | 173 |
|--|-----|

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| Список литературы ..... | 187 |
|-------------------------|-----|

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге дается развитие теории А.Р.Ржаницына применительно к расчету составных стержней и пластин: на упругом основании, с переменными (в том числе разрывными) значениями коэффициента жесткости швов, на вынужденные колебания, устойчивость и с учетом трещинообразования. Разработана эффективная численная методика расчета составных пластин и балок с привлечением обладающих высокой точностью разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА). Эти уравнения позволяют достаточно просто строить разрывные решения.

Главы 1 – 3, 9 написаны Габбасовым Р.Ф., 4 – 8 Филатовым В.В., им же составлены программы для ЭВМ, по которым решены многочисленные задачи.



## ВВЕДЕНИЕ

Составные стержни, пластинки и системы из таких элементов широко применяются в строительстве. Расчету таких конструкций посвящена книга А.Р. Ржаницына [64], опубликованная в 1986 году под названием «Составные стержни и пластинки».

В настоящей работе предусматривается решение задач, которые в [64] не рассматривались. Отметим, что в [64] разработана общая теория расчета именно тех составных стержней и пластин, которые применяются в строительстве; детализированно представлен широкий диапазон таких конструкций. Они подчиняются единой, разработанной в [64] теории. Общим для таких конструкций является наличие поперечных связей, которые в подавляющем большинстве случаев могут считаться абсолютно жесткими. Составные стержни и пластины с упруго-податливыми поперечными связями в [64] рассматриваются отдельно. Для учета работы податливых связей сдвига А.Р. Ржаницыным вводится оригинальное понятие о коэффициенте жесткости шва, которое и позволяет строить общую теорию. Участки между слоями в многослойных составных стержнях и пластинах рассматриваются в качестве швов, в которых располагаются связи сдвига. Швы могут быть нулевой толщины, например, в клееных конструкциях, и конечной толщины в балках и плитах со слоями из разных материалов.

Многослойные балки и пластины без поперечных связей или с весьма податливыми поперечными связями, которые используются в машиностроении, самолетостроении и судостроении, в [64] не рассматриваются. Автор [64] лишь упоминает об этом в кратком обзоре литературы, называя имена крупных исследователей в области расчета многослойных систем. Однако расчеты показывают, что теория, разработанная в [64], может быть использована для оценки напряженно-деформированного состояния многослойных пластин и без специальных поперечных связей.

Рассмотрим труды, примыкающие к [64], отдельно - имеющие большую ценность экспериментальные работы. Поскольку в [64] имеется обзор предшествующих работ, мы остановимся на публикациях, последовавших позже 1986 г.

Известных трудов, выполненных на базе теории [64] немного. Одной из таких работ является диссертация [110]. Автор этой работы Хасан Мохаммед на основе теории А.Р. Ржаницына выполнил расчет конкретных составных балок с переменной жесткостью связей сдвига, разработал методику расчета составных стержней из

двух брусьев переменного сечения, определил оптимальное распределение связей сдвига для некоторых случаев составных балок.

В 1990 году опубликована статья Ю.Е. Якубовского и его соавторов [128], в которой разработана математическая модель нелинейного изгиба многослойной составной пластины. Работа швов описывается нелинейными соотношениями. Поперечные связи абсолютно жесткие. Работа представляет собой развитие линейной теории составных пластин А.Р. Ржаницына применительно к задачам нелинейного изгиба. Учитываются нелинейные свойства материала отдельного слоя.

В более поздних работах Ю.Е. Якубовского и его учеников [125 - 127] рассматриваются составные пластинки, выполненные из разномодульных материалов, имеющих различные модули упругости на растяжение и сжатие. Гипотеза Кирхгова – Лява выполняется для каждого слоя, но не для пакета в целом. Слои соединены между собой связями, упругоподатливыми в продольном направлении и абсолютно жесткими в поперечном.

В работе О.О. Булановой [7] 1995 г. предлагается вариант развития линейной теории А.Р. Ржаницына применительно к физически нелинейному изгибу составных конструктивно – ортотропных пластин. Результаты расчетов выявляют влияние коэффициента жесткости межслойных связей на напряженно – деформированное состояние (НДС) конструкции.

В статье [65] А.А. Рогачева (1996 г.) на основе теории составных стержней А.Р. Ржаницына исследуется устойчивость многоветвевых упругих элементов со спиралеобразными структурными связями. Использован энергетический метод. Получено выражение для определения  $P_{кр}$ .

В работе [123] Якубовской С.В. и Гуляева Б.А. представлены результаты исследований влияния ортотропии жесткости шва на НДС всей конструкции. Выполнен расчет составных пластин с анкерным соединением слоев при различном шаге анкеровки. Система дифференциальных уравнений решалась методом Бубнова – Галеркина. В качестве примера рассмотрены шарнирно опертые трехслойные пластины.

В статье Якубовской и др. [124] развивается теория составных пластин А.Р. Ржаницына применительно к пологим оболочкам. Математическая модель строится так, чтобы свести расчет к решению дифференциальных уравнений технической теории пологих однослойных оболочек с учетом конечной жесткости межслойных связей.

Представляет интерес книга [4] А.Я. Александрова и его соавторов, изданная в 1960 г. И не вошедшая в список литературы [64]. Рабо-

та [4] содержит обширный справочный материал (без выводов и решений) по расчету трехслойных панелей на устойчивость, поперечный и продольно-поперечный изгиб. Учитывается работа на сдвиг и сжатие мягких и жестких заполнителей (средний слой). Более подробные сведения и результаты, полученные позже, имеются в [78].

Рассмотренные в [4] панели не относятся к составным пластинкам по определению [64]: в них не предусмотрены жесткие поперечные связи. Но высокую ценность имеют экспериментальные результаты, полученные авторами по испытаниям трехслойных панелей на устойчивость и продольно-поперечный изгиб.

Другой работой, содержащей обширный экспериментальный материал, является книга [41] Е.А. Король, изданная в 2001 г. В [41] приводятся экспериментальные данные о прочностных и деформативных характеристиках полистиролбетона. На основе опытных и расчетных исследований установлены особенности и изложены теоретические основы расчета трехслойных железобетонных панелей с использованием в среднем слое бетона низкой прочности.

В указанных выше работах и в [64] не затронуты: расчеты при больших перемещениях; разрывных значениях коэффициентов жесткости швов; расчеты составных стержней и пластин на упругом основании; расчет многослойных балок и плит на вынужденные колебания; расчет составных пластин на устойчивость. Не было сделано попыток применения численных методов, включая МКЭ, к задачам, решаемым в рамках теории [64].

К решению задач по теории А.Р. Ржаницына представляется целесообразным применить численный метод последовательных аппроксимаций (МПА) [27], обладающий высокой точностью и хорошо приспособленный к решению систем дифференциальных уравнений второго порядка, к каковым сводится теория составных стержней и пластин по [64]. В работах [15-20, 27] изложены основы МПА и показано эффективное применение разностной формы этого метода к расчету пластин и оболочек на статические, динамические нагрузки и на устойчивость. Отметим, что МПА позволяет достаточно просто строить разрывные решения задач.

Цель настоящей работы – развитие теории А.Р. Ржаницына применительно к расчету составных стержней и пластин: на упругом основании; с переменными (в том числе разрывными) значениями коэффициента жесткости швов; на вынужденные колебания и устойчивость; с учетом трещинообразования в одном из слоев; разработка эффективной численной методики расчета с привлечением разностных уравнений МПА.

# ГЛАВА 1. РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

## §1.1. Разрешающие дифференциальные уравнения задачи и краевые условия

Задача расчета многослойных составных стержней с абсолютно жесткими поперечными связями по теории А.Р. Ржаницына [64] сводится к решению следующих обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{T_i''}{\xi_i} = \frac{N_{i+1}^0}{E_{i+1}F_{i+1}} - \frac{N_i^0}{E_iF_i} - \frac{M^0 \cdot c_i}{\sum EI} - \frac{T_{i+1}}{E_{i+1}F_{i+1}} + \quad (1.1.1)$$

$$+ T_i \cdot \left( \frac{1}{E_{i+1}F_{i+1}} + \frac{1}{E_iF_i} \right) - \frac{T_{i-1}}{E_iF_i} + \frac{\sum_{j=1}^n T_j c_j}{\sum EI} \cdot c_i;$$

$$\frac{d^2 M^0}{dx^2} = -q; \quad (1.1.2)$$

$$y'' = -\frac{M}{\sum EI}, \quad (1.1.3)$$

где  $M = M^0 - \sum_{j=1}^n T_j c_j$ . (1.1.4)

В этих уравнениях:  $T_i$  - сдвигающее усилие, возникающее в  $i$ -ом шве;  $n$  - число швов;  $\xi_i$  - коэффициент жесткости  $i$ -го шва;  $N_i^0$  - нормальное усилие, вызываемое в  $i$ -ом составляющем стержне действием внешней нагрузки;  $M^0$  - суммарный изгибающий момент в сечении составного стержня от действия внешней нагрузки;  $EI$  - жесткость отдельной ветви составного стержня на изгиб;  $E_iF_i$  - жесткость  $i$  - ветви на продольные деформации;  $y$  - прогибы составного стержня, одинаковые для всех ветвей вследствие недеформативности поперечных связей;  $q$  - интенсивность поперечной нагрузки, распределенной по произвольному закону; смысловое значение  $c_i$  - ясно из рисунка 1.1.1;  $M$  - полное значение изгибающего момента в сечении составного стержня.

При решении упомянутых выше дифференциальных уравнений следует учитывать приведенные в [64] краевые условия. В случае свободного сдвига торца составной балки  $T_i = 0$ ; при несдвигающемся

торце  $T_i' = 0$ . В обоих случаях: при шарнирном опирании составной балки  $M^0 = \bar{M}^0$ ,  $y = \bar{y}$ ; при свободном крае  $M^0 = \bar{M}^0$ ,  $Q^0 = (M^0)' = \bar{Q}_0$ ; при жестко заделанном крае  $y = \bar{y}$ ,  $y' = \varphi$ , где  $\bar{M}^0$ ,  $\bar{Q}_0$ ,  $\bar{y}$ ,  $\varphi$  – заданные, в частности, нулевые значения опорного момента, поперечной силы, осадки и угла поворота опорного сечения балки.

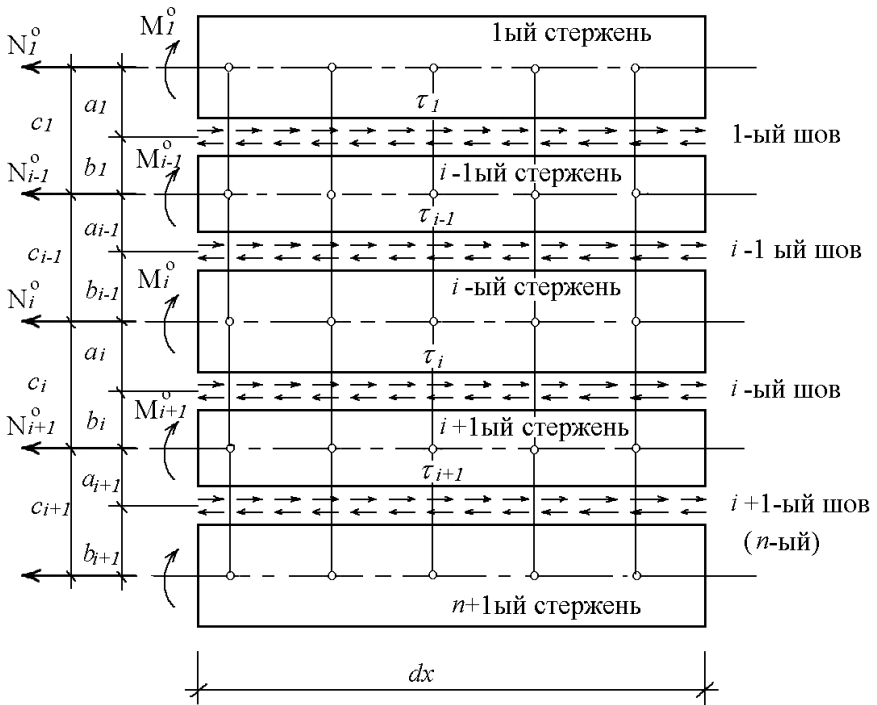


Рис. 1.1.1.

## §1.2. Определение напряжений в сечениях составляющих стержней и поперечных связях

После вычисления  $M^0$  и  $T_i$  нормальные напряжения  $\sigma_x$  в сечении каждого составляющего стержня можно найти по [64]:

$$\sigma_x = \frac{N_i}{F_i} + M_i \cdot \frac{z}{I_i}, \quad (1.2.1)$$

где  $F_i, I_i$  - соответственно площадь поперечного сечения и момент инерции  $i$ -го стержня;  $z$  – расстояние от центра тяжести сечения  $i$ -го

стержня до рассматриваемого волокна. Изгибающий момент в  $i$ -ом стержне:

$$M_i = -E_i I_i \cdot y'' , \quad (1.2.2)$$

где  $E_i I_i$  - жесткость на изгиб  $i$ -го составляющего стержня. При учете (1.1.3) из (1.2.2) следует

$$M_i = M \cdot \frac{E_i I_i}{\sum EI} . \quad (1.2.3)$$

Подставляя (1.1.4) в (1.2.3), получим

$$M_i = \left( M^0 - \sum_{j=1}^n T_j c_j \right) \cdot \frac{E_i I_i}{\sum EI} . \quad (1.2.4)$$

По [64] 
$$N_i = N_i^0 - T_i + T_{i-1} . \quad (1.2.5)$$

Определение касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в сечениях составляющих стержней выполняется по §7 главы 3 [64]:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{B(z)} \left[ \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{F_i} F(z) - \frac{Q^0 E_i I_i}{\sum EI} \cdot \frac{S(z)}{I_i} + \sum_{j=1}^n \tau_j c_j \frac{E_i I_i}{\sum EI} \cdot \frac{S(z)}{I_i} + \tau_{i-1} \right] , \quad (1.2.6)$$

где  $B(z)$  – ширина сечения на уровне  $z$ ;  $F(z)$  – площадь части сечения  $i$  – го стержня, расположенного выше уровня  $z$ ;  $S(z)$  – статический момент этой площади относительно центральной оси сечения  $i$ -го стержня;

$$Q^0 = (M^0)' ; \quad \tau_i = T_i' = \frac{dT_i}{dx} . \quad (1.2.7)$$

Переходим к определению усилий в поперечных связях составного стержня. Величину  $M_i$ , определяемую по (1.2.4), можно по [64] вычислить и так:

$$M_i = M_i^0 - T_{i-1} a_{i-1} - T_i b_i + M_i^s , \quad (1.2.8)$$

где  $M_i^0$  – изгибающий момент от внешней нагрузки  $q_i$ , приложенной непосредственно к  $i$ -му составляющему стержню;  $M_i^s$  – изгибающий момент, возникающий от действия усилий  $S$  в поперечных связях, причем по [64]:

$$(M_i^s)'' = S_{i-1} - S_i . \quad (1.2.9)$$

Здесь  $S_{i-1}, S_i$  - соответственно усилия в поперечных связях  $i-1$ -го и  $i$ -го шва, отнесенные к единице длины составного стержня.

Приравнявая правые части (1.2.8) и (1.2.4), найдем:

$$M_i^s = T_{i-1}a_{i-1} + T_i b_i - M_i^0 + \left( M^0 - \sum_{j=1}^n T_j c_j \right) \cdot \frac{E_i I_i}{\sum EI}. \quad (1.2.10)$$

При учете (1.2.9) и двукратном дифференцировании (1.2.10) получим:

$$S_{i-1} - S_i = \tau'_{i-1} a_{i-1} + \tau'_i b_i + q_i - \left( q + \sum_{j=1}^n \tau'_j c_j \right) \cdot \frac{E_i I_i}{\sum EI}, \quad (1.2.11)$$

где  $\tau = T'$ ;  $q$  – интенсивность поперечной нагрузки, действующей на составной стержень.

В дальнейшем определение  $S_i$  ведется по схеме [64] с использованием выражений типа (1.2.11);  $a_{i-1}$ ,  $b_i$  показаны на рисунке 1.1.1.

Если составной стержень состоит из двух одинаковых симметрично расположенных ветвей, поскольку  $S_0=0$ ,  $T_0=0$ , из (1.2.11) получим как частный случай  $-S_1 = \tau'_1 b_1 + q_1 - \frac{1}{2}(q + \tau'_1 \cdot c_1)$ . Поскольку шов один, опуская индексы при  $q$ ,  $c$  и  $S$ , будем иметь:

$$S = \frac{1}{2}(q + c \cdot T'') - q - b_1 T'', \text{ или}$$

$$S = \left( \frac{c}{2} - b_1 \right) \cdot T'' - \frac{q}{2}. \quad (1.2.12)$$

### §1.3. Численный алгоритм расчета составных балок

При  $N^0 = 0$  из (1.1.1) как частный случай получим дифференциальное уравнение для определения  $T_i$  в составной балке:

$$\frac{T_i''}{\xi_i} = \left( \sum_{j=1}^n T_j c_j - M^0 \right) \frac{c_i}{\sum EI} - \frac{T_{i-1}}{E_i F_i} + T_i \cdot \left( \frac{1}{E_{i+1} F_{i+1}} + \frac{1}{E_i F_i} \right) - \frac{T_{i+1}}{E_{i+1} F_{i+1}}. \quad (1.3.1)$$

$$\text{Внесем обозначение } \Omega = \sum_{j=1}^n T_j c_j \quad (1.3.2)$$

и перейдем к безразмерным величинам:

$$\psi = \frac{x}{l}; \quad t = T \frac{l^2}{E_i I_i}; \quad m^0 = M^0 \frac{l}{E_i I_i}; \quad w = \frac{y}{l}, \quad (1.3.3)$$

где  $l$  – полупролет составной балки;  $E_i I_i$  – изгибная жесткость одного из составляющих стержней.

Как показано в [27], переход к безразмерным величинам позволяет получить численное решение при произвольных значениях параметров рассчитываемой конструкции, в данном случае, как будет показано ниже, - при любых значениях  $l$ ,  $E_i I_i$ ,  $E_i F_i$ ,  $q$  и  $\xi_i$  составной балки.

Запишем (1.3.3) в виде

$$x = \psi \cdot l; \quad T = t \frac{E_i I_i}{l^2}; \quad M^0 = m^0 \frac{E_i I_i}{l}; \quad y = w \cdot l. \quad (1.3.3^a)$$

Подставляя (1.3.3<sup>a</sup>) в (1.3.1) и учитывая  $T_i'' = \frac{d^2 T_i}{dx^2}$ , запишем это уравнение относительно безразмерных неизвестных:

$$\frac{t_i''}{\xi_i} = (\omega - m^0) \cdot \alpha_i \cdot \bar{c}_i - g_i \cdot t_{i-1} + (g_i + g_{i+1}) \cdot t_i + g_{i+1} \cdot t_{i+1}, \quad (1.3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } t_i'' &= \frac{d^2 t_i}{d\psi^2}; \quad \bar{\xi}_i = \xi_i \frac{l^4}{E_i I_i}; \quad \alpha_i = \frac{E_i I_i}{\sum EI}; \quad \bar{c}_i = \frac{c_i}{l}; \\ g_i &= \frac{E_i I_i}{l^2 E_i F_i}; \quad g_{i+1} = \frac{E_i I_i}{l^2 E_{i+1} F_{i+1}}; \end{aligned} \right\} \quad (1.3.5)$$

$$\text{по (1.3.2)} \quad \omega = \sum_{j=1}^n t_j \bar{c}_j. \quad (1.3.6)$$

Аналогично в безразмерном виде можно записать дифференциальные уравнения (1.1.2) и (1.1.3) с учетом (1.1.4):

$$(m^0)'' = -p; \quad (1.3.7)$$

$$w'' = -\alpha_i (m^0 - \omega), \quad (1.3.8)$$

$$\text{где } (m^0)'' = \frac{d^2 m^0}{d\psi^2}; \quad w'' = \frac{d^2 w}{d\psi^2}; \quad p = \frac{ql^3}{E_i I_i}. \quad (1.3.9)$$

Построим численный алгоритм решения дифференциальных уравнений (1.3.7), (1.3.8), (1.3.4), привлекая разработанный в [27] метод последовательных аппроксимаций (МПА). Этот метод обладает высокой точностью, позволяет учитывать конечные разрывы искомой функции, ее первых двух производных, а также разрывы правых частей дифференциальных уравнений, не прибегая к использованию обобщенных функций. МПА успешно применялся к расчету пластин и оболочек на упругом основании и без основания, а также сжато-изогнутых монолитных балок в линейной и нелинейной постановке на действие статических, динамических нагрузок и на устойчивость [27].



Вполне естественна попытка построения численного решения рассматриваемой нами задачи на базе разностных уравнений МПА. Это оправдано и тем обстоятельством, что для расчета составных балок по теории А.Р. Ржаницына численные методы не применялись. Поэтому в [64] автор ограничился аналитическим решением относительно простых задач, которые ниже будут использованы нами в качестве тестовых.

По МПА [27] обыкновенное дифференциальное уравнение типа

$$\frac{d^2 w}{d\psi^2} = -p \quad (1.3.10)$$

аппроксимируется на равномерной сетке с шагом  $\tau$  следующим разностным уравнением:

$$\begin{aligned} & {}^{\Pi}w_{j-1} - 2{}^{\wedge}w_j + {}^{\wedge}w_{j+1} + \Delta w_j + \tau \cdot \Delta w_j' = \\ & = -\frac{\tau^2}{12} \left( {}^{\Pi}p_{j-1} + 10{}^{\wedge}p_j + {}^{\wedge}p_{j+1} \right) + \frac{5}{12} \tau^2 \Delta p_j + \frac{\tau^3}{12} \Delta p_j', \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

где  $\Delta w_j = {}^{\wedge}w_j - {}^{\Pi}w_j$ ;  ${}^{\wedge}w_j = w_{j-0}$ ;  ${}^{\Pi}w_j = w_{j+0}$ ; остальные величины такого типа имеют аналогичный смысл, например,  $\Delta p_j' = {}^{\wedge}p_j' - {}^{\Pi}p_j'$ ;

$${}^{\wedge}p_j' = p_{j-0}' ; {}^{\Pi}p_j' = p_{j+0}' ; p' = \frac{dp}{d\psi} .$$

Из сопоставления (1.3.10) с (1.3.7) следует, что для аппроксимации последнего по МПА достаточно в (1.3.11)  $w$  заменить на  $m^0$ . Запишем это уравнение, опуская для упрощения правый верхний индекс при  $m$ , но по-прежнему понимая под  $m$  суммарный безразмерный изгибающий момент в сечении составной балки:

$$\begin{aligned} & {}^{\Pi}m_{j-1} - 2{}^{\wedge}m_j + {}^{\wedge}m_{j+1} + \Delta m_j + \tau \cdot \Delta m_j' = \\ & = -\frac{\tau^2}{12} \left( {}^{\Pi}p_{j-1} + 10{}^{\wedge}p_j + {}^{\wedge}p_{j+1} \right) + \frac{5}{12} \tau^2 \Delta p_j + \frac{\tau^3}{12} \Delta p_j'. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Для аппроксимации (1.3.8) во внутренней точке равномерной сетки достаточно в (1.3.11)  $-p$  заменить на правую часть (1.3.8). При записи этого уравнения будем полагать, что ползуны и врезанные шарниры в сечении составной балки отсутствуют; тогда  $\Delta w_j = \Delta w_j' = \Delta \omega_j = \Delta \omega_j' = 0$ ;  $m^0$  заменяем на  $m$ :

$$\begin{aligned} w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1} &= \frac{\tau^2}{12} \alpha_i (\omega_{i-1} + 10\omega_i + \omega_{i+1}) - \\ -\frac{\tau^2}{12} \alpha_i \left( {}^{\Pi}m_{j-1} + 10{}^{\wedge}m_j + {}^{\wedge}m_{j+1} \right) &+ \frac{5}{12} \tau^2 \alpha_i \Delta m_j + \frac{\tau^3}{12} \alpha_i \Delta m_j'. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Для аппроксимации (1.3.4) по МПА запишем это уравнение в следующем виде:

$$\left[ t^{(i)} \right]'' = - \left[ \beta_i \cdot (m - \omega) + \delta_i \cdot t^{(i-1)} - (\delta_i + \delta_{i+1}) \cdot t^{(i)} - \delta_{i+1} \cdot t^{(i+1)} \right], \quad (1.3.14)$$

$$\text{где } \beta_i = \bar{\xi}_i \alpha_i \bar{c}_i; \quad \delta_i = \bar{\xi}_i g_i; \quad \delta_{i+1} = \bar{\xi}_i g_{i+1}. \quad (1.3.15)$$

Аппроксимация (1.3.14) сводится к замене в (1.3.11):  $w$  на  $t^{(i)}$  и  $(-p)$  – на правую часть (1.3.14). При записи этого уравнения будем считать разрывы  $t$ ,  $t'$ ,  $\omega$ ,  $\omega'$  равными нулю. Следует также иметь в виду, что индекс  $i$  означает номер шва, а индекс  $j$  – номер расчетной точки на безразмерной оси балки  $\psi$ . В результате получим следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \frac{\tau^2}{12} (\delta_i + \delta_{i+1}) \right] \cdot \left[ t_{j-1}^{(i)} + t_{j+1}^{(i)} \right] - 2 \left[ 1 + \frac{5}{12} \tau^2 (\delta_i + \delta_{i+1}) \right] \cdot t_j^{(i)} = \\ & = - \frac{\tau^2}{12} \beta_i \left[ {}^{\Pi} m_{j-1} + 10 {}^{\Lambda} m_j + {}^{\Lambda} m_{j+1} - 5 \Delta m_j - \tau \cdot \Delta m_j' \right] + \\ & + \frac{\tau^2}{12} \beta_i (\omega_{j-1} + 10 \omega_j + \omega_{j+1}) - \frac{\tau^2}{12} \delta_i (t_{j-1}^{(i-1)} + 10 t_j^{(i-1)} + t_{j+1}^{(i-1)}) + \\ & + \frac{\tau^2}{12} \delta_{i+1} (t_{j-1}^{(i+1)} + 10 t_j^{(i+1)} + t_{j+1}^{(i+1)}). \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

В левой краевой точке  $j$  равномерной сетки дифференциальное уравнение (1.3.10) аппроксимируется следующим разностным уравнением МПА [27]:

$$\tau \cdot w_j' + w_j - w_{j+1} = \frac{\tau^3}{12} p_j' + \frac{5}{12} \tau^2 p_j + \frac{\tau^2}{12} p_{j+1}. \quad (1.3.17)$$

Аппроксимация дифференциальных уравнений (1.3.7), (1.3.8), (1.3.14) по МПА с использованием (1.3.17) производится аналогично выполненному выше; соответственно получим:

$$\tau \cdot m_j' + m_j - m_{j+1} = \frac{\tau^2}{12} \left( \tau \cdot p_j' + 5 p_j + p_{j+1} \right); \quad (1.3.18)$$

$$\begin{aligned} & \tau \cdot w_j' + w_j - w_{j+1} = \\ & = \alpha_i \left[ \frac{\tau^2}{12} \left( \tau \cdot m_j' + 5 m_j + m_{j+1} \right) - \frac{\tau^2}{12} \left( \tau \cdot \omega_j' + 5 \omega_j + \omega_{j+1} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

$$\begin{aligned}
& \tau \left[ 1 + \frac{\tau^2}{12} (\delta_i + \delta_{i+1}) \right] (t^{(i)})'_j + \left[ 1 + \frac{5}{12} \tau^2 (\delta_i + \delta_{i+1}) \right] \cdot t_j^{(i)} - \left[ 1 - \frac{\tau^2}{12} (\delta_i + \delta_{i+1}) \right] \cdot t_{j+1}^{(i)} = \\
& = \frac{\tau^2}{12} \left\{ \beta_i \left[ \tau \cdot m'_j + 5m_j + m_{j+1} \right] - \beta_i \left[ \tau \cdot \omega'_j + 5\omega_j + \omega_{j+1} \right] + \right. \\
& \left. + \delta_i \left[ \tau (t^{(i-1)})'_j + 5t_j^{(i-1)} + t_{j+1}^{(i-1)} \right] - \delta_{i+1} \left[ \tau (t^{(i+1)})'_j + 5t_j^{(i+1)} + t_{j+1}^{(i+1)} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Для расчета составной балки необходимо совместное решение алгебраических уравнений (1.3.12), (1.3.13), (1.3.16), записанных для каждой внутренней точки сетки, с привлечением (1.3.6) для вычисления  $\omega$  и уравнений типа (1.3.18) – (1.3.20), применяемых в крайних точках  $j$  сетки в соответствии с заданными граничными условиями. Для точки  $j$  правого к

рая балки (1.3.18) – (1.3.20) записываются в «зеркальном отображении», при этом входящие в эти уравнения первые производные функций в точке  $j$  меняют знак на обратный.

Заметим, что если составная балка внешне статически определена, то выражения типа (1.3.12) образуют независимую систему алгебраических уравнений. То же самое справедливо для системы уравнений типа (1.3.16), если задачу решать в линейной постановке. После определения  $m$ ,  $t$  и  $\omega$  решается система уравнений типа (1.3.13).

#### 1.4. Решение тестовых задач по расчету составных балок.

Рассмотрим частный случай балки, состоящей из двух симметричных брусьев, причем жесткости каждого из них  $EI$ ,  $EF$ . Мы здесь преследуем цель: показать на конкретных задачах изложенный в §1.3 алгоритм в развернутом виде и сопоставить полученные результаты численного решения с аналитическим решением [64].

В рассматриваемом случае уравнения (1.3.12), (1.3.18) остаются без изменений. По (1.3.6), поскольку шов один и  $n = 1$ ,  $\omega = t_1 \cdot \bar{c}_1$ ; или опуская индекс 1, можно записать:

$$\omega = t \cdot \bar{c}. \tag{1.4.1}$$

По (1.3.5)  $\alpha_1 = \alpha = \frac{EI}{2EI} = \frac{1}{2}$ . При учете (1.4.1) уравнения (1.3.13), (1.3.19) запишутся так:

$$w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1} = \frac{\tau^2}{24} (\tilde{t}_{j-1} + 10\tilde{t}_j + \tilde{t}_{j+1} - {}^{\Pi}m_{j-1} - 10{}^{\Lambda}m_j - {}^{\Lambda}m_{j+1} + 5\Delta m_j + \tau \cdot \Delta m_j'); \quad (1.4.2)$$

$$\tau \cdot w_j' + w_j - w_{j+1} = \frac{\tau^2}{24} (\tau \cdot m_j' + 5m_j + m_{j+1} - \tau \cdot \tilde{t}_j' - 5\tilde{t}_j - \tilde{t}_{j+1}), \quad (1.4.3)$$

где  $\tilde{t} = \bar{c} \cdot t$ .

Уравнения (1.3.16), (1.3.20) запишем, учитывая (1.4.1) и что для балки из двух брусьев  $t^{(i-1)} = t^{(i+1)} = 0$ ;  $t^{(i)} = t$ ; а в случае симметрии по (1.3.15) и (1.3.5):

$$\delta_{i+1} = \delta_i = \delta = \bar{\xi}_i \cdot g_i = \xi_i \cdot \frac{l^4}{E_i I_i} \cdot \frac{E_i I_i}{l^2 E_i F_i} = \frac{\xi \cdot l^2}{EF}; \quad \beta_i = \beta = \frac{\bar{c}}{2} \cdot \frac{\xi \cdot l^4}{EI}. \quad (1.4.4)$$

Для случая, когда составляющие брусья имеют прямоугольное сечение с шириной  $b$ , высотой  $H$  и  $c=H$  (нулевая высота шва), получим по (1.3.16), (1.3.20) соответственно:

$$\left[ 1 - \frac{\tau^2}{12} \eta^2 \right] \cdot \tilde{t}_{j-1} - 2 \left[ 1 + \frac{5}{12} \tau^2 \eta^2 \right] \cdot \tilde{t}_j + \left[ 1 - \frac{\tau^2}{12} \eta^2 \right] \cdot \tilde{t}_{j+1} = -\frac{\tau^2}{16} \eta^2 \left[ {}^{\Pi}m_{j-1} + 10{}^{\Lambda}m_j + {}^{\Lambda}m_{j+1} - 5\Delta m_j - \tau \cdot \Delta m_j' \right]; \quad (1.4.5)$$

$$\tau \cdot \left[ 1 + \frac{\tau^2}{12} \eta^2 \right] \cdot \tilde{t}_j' + \left[ 1 + \frac{5}{12} \tau^2 \eta^2 \right] \cdot \tilde{t}_j - \left[ 1 - \frac{\tau^2}{12} \eta^2 \right] \cdot \tilde{t}_{j+1} = \frac{\tau^2}{16} \eta^2 \left[ \tau \cdot m_j' + 5m_j + m_{j+1} \right], \quad (1.4.6)$$

$$\text{где } \eta^2 = 8 \frac{\xi \cdot l^2}{EF}. \quad (1.4.7)$$

В качестве первого примера решаем задачу [64]: по торцам шарнирно опертой двухслойной составной балки пролетом  $2l$  действуют опорные моменты  $m=1$ . Краевые условия:  $w = \tilde{t} = 0$ . Балка при минимальном числе разбиений изображена на рис.1.4.1 (сосредоточенная сила, показанная пунктиром, относится ко второму примеру).

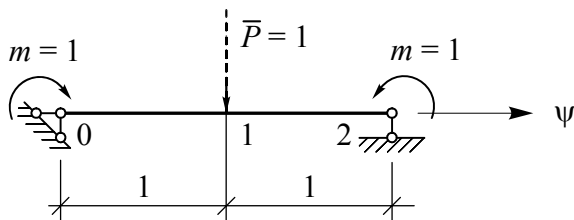


Рис.1.4.1

Научное издание

Радек Фатыхович **Габбасов**

Владимир Владимирович **Филатов**

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА  
СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН  
С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ  
ПОПЕРЕЧНЫМИ СВЯЗЯМИ**

Компьютерная верстка: *Д.А. Матвеев.*

Дизайн обложки: *Т.А. Негрцова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Подписано к печати 16.05.14.  
Формат 60x90/16. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офсетная.  
Усл. 12,5 п. л. Заказ №

ООО «Издательство АСВ», 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26,  
отдел реализации к. 511, тел., факс: (499)183-56-83;  
e-mail: [iasv@iasv.ru](mailto:iasv@iasv.ru), Интернет магазин: <http://www.iasv.ru/>