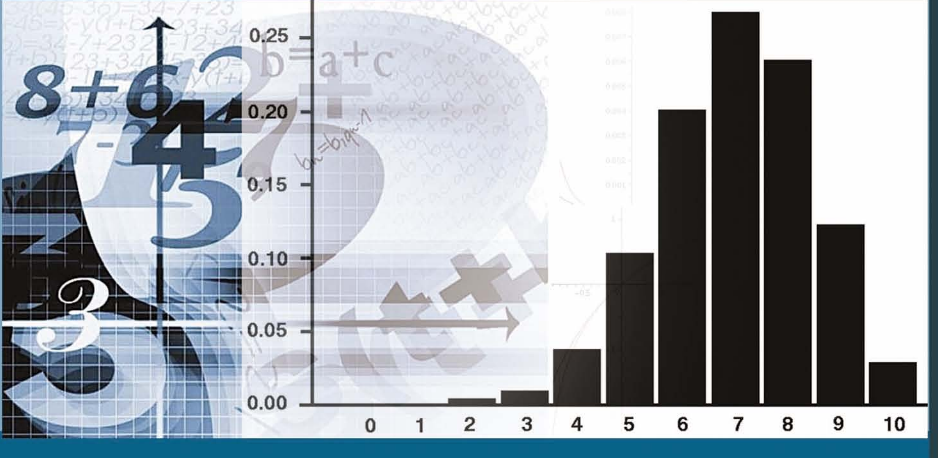
В.М. Земцов
И.В. Земцова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ



В. М. Земцов, И. В. Земцова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Издательство Ассоциации строительных вузов

Москва, 2013

Р е ц е н з е н т ы :

и.о. профессора кафедры экономики, управления и организации машиностроительной промышленности Завода-втуза при ЗИЛе, доктор технических наук *Н.Ф. Жупанов*;
кандидат технических наук, старший научный сотрудник *А.Н. Власов*;
вице-призидент-начальник Казначейства КБ «Газпромбанк» (ЗАО) (выпускник ФУПМ МФТИ) *А.Е. Мареичев*.

Земцов В.М.
Основы теории вероятности и математической статистики: Учебное пособие. – М.: Изд-во АСВ, 2013. – 540 с.

ISBN 978–5–93093–910–1

В учебном пособии дано в доступной форме строго доказательное изложение основ теории вероятностей и математической статистики, находящих широкое практическое применение в различных областях. Книга содержит большое количество примеров, поясняющих основные понятия и иллюстрирующих возможности применения теоретического материала. Приведены примеры численных расчетов, а также необходимые таблицы и графики. Учтены требования государственного образовательного стандарта (ГОС).

Рекомендовано в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений, в том числе для студентов-заочников. Может служить хорошим руководством для инженерно-технических работников широкого профиля, а также для специалистов, чья деятельность связана с применением методов теории вероятностей и математической статистики.

ISBN 978–5–93093–910–1

Часть 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

Предмет теории вероятностей

Окружающий нас мир состоит из материальных объектов, существующих в пространстве и времени независимо от человеческого сознания. С точки зрения естественных наук весь мир включает в себя три основных вида материи: вещество (тела, молекулы, атомы, элементарные частицы), антивещество (зеркальное отражение вещества, отличающееся прежде всего знаком заряда элементарных частиц) и силовые поля (электромагнитное, ядерное, гравитационное). Между этими видами материи существуют тесная связь и постоянное взаимодействие. Они находятся в непрерывном развитии, изменении. Единичный акт изменения каких-либо свойств или состояния или положения в пространстве материального объекта, акт взаимодействия их принято называть ***явлением***.

Любое явление (изменение формы тела, его химического состава, агрегатного состояния, изменение напряженности силового поля и т.п.) имеет определенную материальную *причину* — влияние одного материального объекта на другой. Многие причинные связи материальных объектов изучены наукой и выражены в форме законов физики, химии, биологии и других отраслей человеческого знания. Например, математика установила существование строгих закономерностей в соотношении элементов, характеризующих размеры тел (длин, площадей, объемов, углов между линиями и поверхностями и т.д.).

На основании этих законов, математических формул можно достаточно точно или абсолютно точно определить результат взаимодействия материальных объектов геометрических построений. Но в практической деятельности человек, как правило, не знает все причины, вызвавшие данное явление. Поэтому количественные характеристики того или иного явления, определенные опытным путем, часто отклоняются по величине от тех величин, которые следовало ожидать в соответствии с установленными наукой законами. Например, измеряя многократно силу и напряжение постоянного тока в проводнике в разное время, мы, во-первых, получим несовпадающие результаты, а во-вторых, эти результаты не будут строго соответствовать совершенно точной линейной зависимости между силой тока и напряжением, выраженной законом Ома.

Измеряя соответствующими приборами (линейкой, циркулем, планиметром и т.п.) стороны и площадь заведомо известного квадрата, мы также при многократном измерении получим различные значения сторон и площадей; после каждого измерения обнаружим, что стороны квадрата не равны, а их произведение не равно площади измеряемого квадрата. Такой «эффект» проявится резче, если измерения будут производить различные люди и разными приборами.

Разнообразие в результатах наблюдений одних и тех же естественных процессов или специально поставленных экспериментов при малом числе наблюдений, как правило, не поддается систематизации, установлению какой-либо закономерности в разбросе, рассеянии количественных характеристик этих явлений. Однако при достаточно большом числе наблюдений (испытаний, опытов) между количественными характеристиками изучаемых явлений обнаруживается определенная закономерность. Например, стреляя по некоторой площади из одного орудия при неизменных установках прицела многократно, можно легко обнаружить, что точки падения снарядов расположатся на ограниченной вытянутой площадке по форме, близкой к фигуре эллипса («эллипс рассеивания»), больше всего точек падения будет сосредоточено вокруг центра этой площадки («центр рассеивания») и меньше к ее границам. Знание такой закономерности в рассеивании снарядов и координат цели (они тоже определяются с ошибками) позволило разработать четкие правила стрельбы из артиллерийских орудий. Каждый «неожидаемый», т.е. необъяснимый результат наблюдения, который в общем случае может произойти или не произойти, принято называть ***случайным***.

В свою очередь, ***явление, которое при неоднократном воспроизведении его проявляет себя по-разному, наблюдается или не наблюдается, называют случайным явлением***.

В природе не происходит ни одного естественного явления, не обладающего элементом случайности, как бы точно ни воспроизводились условия наблюдения или испытания, так как невозможно учесть все многообразие факторов или причин, влияющих на течение физических и других естественных процессов.

Но представляет большое практическое значение тот факт, что в многочисленных массовых явлениях обнаруживаются вполне определенные закономерности, знание которых позволяет достаточно уверенно осуществить прогноз в аналогичных случаях.

Изучение закономерностей массовых случайных явлений без учета их физической природы, а также разработка методов количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления и составляет предмет ***теории вероятностей***. Слово «вероятный» и понимается в смысле — возможный, случайный.

Математические законы теории вероятностей отражают объективные статистические законы, проявляющиеся в массовых случайных, «вероятных» явлениях. Теория вероятностей является основой математической статистики — прикладной науки, разрабатывающей способы, методы сбора и обработки статистических сведений в результатах наблюдений случайных явлений и методы анализа этих сведений с определенной практической целью.

Историческая справка

Теория вероятностей в современном ее понимании возникла в середине XVII в. в результате исследований Паскаля (1623–1662), Ферма (1601–1665) и Гюйгенса (1629–1695) в области азартных игр. Кстати, французское слово «le hasard» (азарт) означает «случай». Эти исследования нашли практическое применение в задачах страхования.

Новым этапом в развитии теории вероятностей стал закон больших чисел, обоснованный Якобом Бернулли (1654–1705). Моавр (1667–1754) ввел в рассмотрение и доказал для простейшего случая часто наблюдаемый среди случайных явлений нормальный закон распределения случайной величины, который позже был доказан для общего Гауссом (1777–1855). Гаусс также ввел метод наименьших квадратов в практику обработки статистических материалов. Выдающийся математик Лаплас (1749–1827) впервые выполнил систематическое изложение основ теории вероятности, он же дал доказательство одной из форм центральной предельной теоремы и существенно развил методы применения теории вероятности к решению практических задач.

Заметный вклад в теорию вероятности внес Пуассон (1781–1840), в частности, открытием тоже распространенного, но специфического закона распределения случайной величины, названного законом Пуассона. С половины XIX в. до 20-х г. XX в. развитие теории вероятностей связано с именами русских ученых, открывших новый, наиболее плодотворный период ее формирования как самостоятельного направления математики.

В.Я. Буняковский (1804–1889) был автором первого печатного систематического курса теории вероятности на русском языке, а также автором оригинальных исследований в области статистики и демографии.

Великий русский математик П.Л. Чебышев (1821–1894), ученик В.Я. Буняковского, сам стал главой русской математической школы, оказавшей большое влияние на развитие мировой математики, в частности на развитие теории вероятностей. П.Л. Чебышев осуществил обобщение закона больших чисел, разработал метод моментов для количественной характеристики распределения случайных величин и т.д. Его ученик А.А. Марков (1856–1922) обогатил теорию вероятностей важными открытиями и методами. Он распространил закон больших чисел и центральную предельную теорему на зависимые случайные величины, заложил основы новой ветви теории вероятностей — теории стохастических процессов.

Другой ученик П.Л. Чебышева — А.М. Ляпунов (1857–1918) дал самое общее доказательство центральной предельной теоремы, разработав для этого метод характеристических функций, широко используемый в практических приложениях теории вероятностей.

Дальнейшее развитие теории вероятностей до середины XX в. осуществлялось главным образом советскими математиками. Назовем наиболее плодотворных. С.Н. Бернштейн создал систему аксиом теории вероятностей, расширил область применения предельных теорем. А.Я. Хинчин (1894–1959) выполнил исследования с целью дальнейшего обобщения и усиления закона больших чисел, а также важные исследования в области стационарных случайных процессов.

А.Н. Колмогоров дал совершенное аксиоматическое построение теории вероятностей, связав ее с метрической теорией функций; ему принадлежат важные работы в области теории случайных функций и в области оценки эффективности стрельбы и вообще боевых действий.

В.И. Романовский и Н.В. Смирнов плодотворно работали в сфере математической статистики; Е.Е. Слуцкий (1880–1948) — в теории случайных процессов; Б.В. Гнеденко — в теории массового обслуживания; Е.Б. Дынкин — в области марковских случайных процессов; В.С. Пугачев — в теории случайных процессов применительно к задачам автоматического регулирования. Этот список советских ученых, внесших заметный вклад в развитие теории вероятностей, далеко не исчерпывающий.

В последние десятилетия усиленными темпами ведутся работы по теории вероятностей, преимущественно в области случайных процессов, и математической статистики. В теории случайных процессов существенные результаты получили Н. Винер, В. Филлер, Д. Дуб. Важные результаты в теории вероятностей и математической статистики получили Р. Фишер, Д. Нейман, Г. Крамер.

Работы последних лет по теории вероятностей и математической статистики явились основой новых методов прикладной теории вероятностей, появления таких научных направлений, как теории информации и массового обслуживания.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1.1. Испытания и события

Случайные явления выявляются и регистрируются на основе наблюдений за течением естественных стихийных процессов или в ходе специально поставленных опытов. Изучение случайных явлений в порядке наблюдений требует выполнения некоторого комплекса условий. Так, для того чтобы наблюдать попадание пули в мишень или ее полет мимо мишени (промах) при стрельбе из винтовки, надо иметь винтовку, патрон, мишень и произвести выстрел. Чтобы измерить силу и напряжение постоянного тока в проводнике с неизвестным сопротивлением, надо иметь проводник, источник тока, амперметр, вольтметр и произвести соответствующие соединения этих предметов. Иначе говоря, осуществить наблюдение случайного явления можно только при наличии необходимых предметов и в результате выполнения определенных действий, которые в совокупности и составляют комплекс условий наблюдения. В этот комплекс часто включают внешние условия, сопровождающие наблюдения: атмосферные условия, вынужденные колебания почвы и т.п.

Осуществление реального комплекса условий для наблюдения определенного явления называется ***испытанием*** или ***опытом***.

Всякий результат или исход испытания называют ***событием***. В предыдущих примерах событиями являются: попадание или промах при выстреле, определенные значения величины силы и напряжения тока. Пусть в урне имеются разноцветные шары, одинаковые по массе и чистоте поверхности. Извлечение шара из урны будет испытанием, а появление при этом шара определенного цвета — событием. В теории вероятности принято события обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, E, … События, происходящие при большом числе одноразовых или повторных (группами серий) испытаний, называются ***массовыми*** (например, число попаданий и промахов при стрельбе из 5 серий по 10 выстрелов в каждой серии).

Единственно возможный результат испытания называют ***достоверным событием***. Например, достоверными событиями являются: падение на землю подброшенного в воздух камня; смена дня и ночи при существующих условиях движения Земли, извлечение белого шара из урны, в которой находятся только белые шары, и т.п. Если некоторое событие при данном испытании заведомо не может произойти, то такое событие является ***невозможным***. Например, к невозможным событиям относятся: извлечение черного шара из урны с белыми шарами, запуск автодвигателя при отсутствии топлива, падение подброшенной монеты одновременно гербом и надписью (решкой) и т.п.

По логике определения невозможное событие противоположно достоверному событию, и наоборот. Но в реальных условиях это не всегда абсолютно верно. Так, невозможному событию — запуск двигателя без топлива — не противостоит как достоверное событие — запуск двигателя при наличии в нем топлива. Двигатель и с топливом может не завестись, но по другим причинам.

Заметим также, что практическая невозможность и достоверность события неравносильны его абсолютной невозможности и достоверности. Так, выпадение снега в Москве в августе практически невозможно. Но мы не можем быть абсолютно в этом уверены. Что Волга впадает в Каспийское море — факт как будто достоверный. Но мы не имеем абсолютных гарантий того, что так это и будет всегда. Вместе с тем сам факт появления результата наблюдения является событием достоверным. Если по мишени произведен выстрел, то результат обязательно будет: либо попадание, либо промах.

Событие, которое при данном испытании может появиться либо не появиться, как было отмечено выше, называется ***возможным*** или ***случайным***. Например, случайными являются события: выпадение дождя в пасмурный день, выигрыш по билету с определенным номером в лотерее, изготовление бракованного изделия и т.п.

Случайность события определяется тем, что при проведении испытания (наблюдения) исследователь не может учесть весь комплекс многочисленных и разнообразных факторов (причин), влияющих на ход изучаемого явления. Весь комплекс факторов, определяющих появление того или иного события, можно разделить на две группы: основные факторы, т.е. известные и учтенные исследователем, и поэтому неслучайные, и факторы случайные, под которыми понимают все неучтенные причины, неизвестные источники отклонений результата от ожидаемого согласно устанавливаемым основными факторами закономерностям изучаемого процесса.

Но случайность события не связывают с личными качествами исследователя — его способностями наблюдать или предсказывать явления. Его ошибки не могут, как правило, иметь систематического характера и поэтому относятся к общему фактору случайности. Систематические ошибки можно обнаружить и исключить их влияние на результат испытания.

Если условия появления нескольких случайных событий заведомо одинаковы, то такие события называются ***равновозможными***. Равновозможными событиями являются, например, попадание или промах при выстреле по мишени, падение подброшенной монеты гербом или решкой, извлечение шара любого цвета из урны с разноцветными шарами и т.п.

События называются ***совместимыми***, если они могут появиться одновременно при данном испытании. Совместимыми событиями являются, например, два попадания или два промаха или одно попадание и один промах при стрельбе по мишени из двух винтовок одновременно; извлечение из урны (с разноцветными и нумерованными шарами) шара с определенными цветом и номером (цвет и номер появляются одновременно).

Два события называются ***несовместимыми***, если появление одного из них исключает появление другого: при одном выстреле по мишени возможно либо попадание, либо промах, из урны с черными и белыми шарами при однократном извлечении шара можно извлечь либо белый, либо черный шар и т.п.

Несколько событий составляют ***группу несовместимых событий***, если их любая пара несовместима. Например, оценки успеваемости 2, 3, 4, 5; количество очков оценок при стрельбе одиночными выстрелами по мишени с нумерованными концентрическими кольцами и т.п. составляют группы несовместимых событий. Если в группе событий хотя бы два события совместимы, то всю группу называют ***группой совместимых событий***. Например, попадания и промахи при нескольких выстрелах по мишени составляют группу совместимых событий, так как хотя бы при двух выстрелах может быть парный результат: два попадания или два промаха, или одно попадание и один промах.

Полной группой событий называют совокупность возможных в данном испытании событий, из которых хотя бы одно событие обязательно произойдет. Например, при стрельбе из винтовки двумя патронами обязательно произойдет хотя бы одно из событий, составляющих следующую полную группу:

A_1 — попадание при первом выстреле;
A_1 — промах при первом выстреле;
A_2 — попадание при втором выстреле;
A_2 — промах при втором выстреле;
A_3 — попадание при обоих выстрелах;
A_3 — промах при обоих выстрелах.

Полные группы событий широко распространены в природе и в деятельности людей и поэтому имеют важное практическое значение. В частности, особую важность представляют полные группы двух несовместимых событий. При одном испытании такой группы может осуществиться только одно из двух несовместимых событий, например, падение подброшенной монеты гербом или решкой; попадание или промах при одном выстреле по мишени; выпадение или отсутствие дождя в ясный день и т.п. По своему проявлению такие события противоположны: «герб» и «не герб»; «попадание» и «непопадание»; «дождь» и «не дождь».

Поэтому два несовместимых события, образующих полную группу событий, называются ***противоположными***.

События, противоположные попарно некоторым событиям A, B, C, …, обозначают теми же буквами, но с чертой над ними: $\overline{A}$ (не A), $\overline{B}$ (не B) и т.д. Наконец, существуют группы событий, обладающих несколькими свойствами. Они составляют полную группу, несовместимы и равновозможны; например, появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости. События, составляющие подобные группы, называют ***случаями*** (или шансами).

События также могут быть независимыми и зависимыми. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.1.1. Пусть известно, что в урнах находятся шары правильной формы и одинаковой массы: 7 белого цвета и 3 черного. Очевидно, относительные их доли будут равны: белых шаров — 0,7 и черных шаров — 0,3. Если шары, извлеченные из урны, мы будем возвращать в урну, то указанные относительные доли не изменятся. Не изменится, следовательно, и степень возможности извлечения скорее белого, чем черного шара, при очередном испытании (относительные их доли нам известны).

Допустим теперь, что мы вынули из урны подряд 4 белых шара и, не возвращая их в урну, решили вынуть пятый шар. Перед этим испытанием в урне будет 6 шаров: три белого и три черного цвета. Степень возможности вынуть белый шар стала меньше ($3/6 = 0,5$ вместо 0,7), а черный — больше (0,5 вместо 0,3).

В первом случае (при возвращении извлеченных шаров в урну) результат любого испытания не зависел от предыдущего, во втором — он явно зависит от предыдущего испытания. Поэтому принято события, появление которых не зависит от появления предшествующих событий, называть ***независимыми событиями***. События, не удовлетворяющие этому условию, называют ***зависимыми событиями***.

1.1.2. Сумма и произведение событий

В результате испытания может произойти по случайным причинам то или иное событие из множества возможных при данных условиях. Такое множество возможных событий называется ***полем событий***.

Представим, что в картотеке имеется n разноцветных карточек, пронумерованных независимо от цвета по порядку от 1 до n. Вынимая из ящика карточки по одной, мы после каждого извлечения будем наблюдать случайное событие: появление карточки определенных цвета и номера. Очевидно, число таких событий (если карточки не возвращаются в ящик) не может быть больше n. Следовательно, число n определяет поле равновозможных событий: $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_n$.

Событие A_k (появление карточки с порядковым номером k) называют ***элементарным событием*** или ***элементарным исходом*** (результатом) испытания. Множество элементарных событий A_k составляет содержание ***основного множества данного поля событий***. Но в общем случае поле событий включает в себя и элементарные, и сложные события. Сложные события представляют собой совокупности элементарных событий в различных сочетаниях, комбинациях. Так, сложное событие «появление карточки с номером меньше 4», т.е. событие $B\{1, 2, 3\}$ включает в себя события A_1 или A_2, или A_3, состоящих соответственно в появлении карточек с одним из трех номеров: 1, 2, 3. Событие $C\{8, 10, 14\}$, т.е. «или 8, или 10, или 14», означает, что испытание должно закончиться появлением первого из трех ожидаемых событий: A_8, или A_{10}, или A_{14}. Сложным событием будет также набор карточек с определенным цветом и определенными номерами. Одно сложное событие может включать в себя другие сложные события, которые осуществляются одновременно с первым. Например, событие $A\{1, 2, 3, 4\}$ влечет за собой появление события $B\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $C\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и т.п. Напомним, что числа внутри скобок надо читать так: «или один, или два, или…» и т.д.

Выражение «событие A ***влечет*** за собой событие B» означает, что при наступлении события A обязательно наступает событие B. Для краткости записи слово «влечет» обозначают знаком «$\subset$»: $A \subset B$ или $B \supset A$.

Как видно из предыдущего, если $A \subset B$, то элементарные события, составляющие событие A, представляют некоторую часть элементарных событий, входящих в состав события B. В том случае, когда одновременно выполняется: $A \subset B$ и $B \subset A$, события A и B называют ***эквивалентными***, что обозначают знаком равенства: $A = B$. Из сказанного можно заключить, что каждое сложное событие поля выражает собой своеобразную логическую (но не арифметическую) сумму некоторых событий из множества (A_1; A_2; …; A_n). Так, событие $B\{6, 8, 11\}$ можно записать так:

$$B = A_6 + A_8 + A_{11},$$

где знак «+» заменяет союз «или».

Событие $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ есть «сумма», например, двух таких событий: $\{1, 2\} + \{3, 4, 5\}$. Это сумма двух таких событий, которые не могут произойти одновременно, т.е. в одном испытании. Иначе говоря, это ***сумма несовместимых событий***.

В общем случае сумма

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k \tag{1.1.1}$$

означает событие, заключающееся в том, что может появиться любое событие суммы или некоторых из них вместе, т.е. хотя бы одного члена из частных сумм, например, $B\{3, 4, 5\} = A_3 + A_4 + A_5$ и $C\{4, 5, 6\} = A_4 + A_5 + A_6$. В этом примере события B и C могут появиться вместе, т.е. они совместимы, так как содержат одинаковые элементарные исходы: 4 и 5. Появление одного из них будет означать осуществление событий B и C одновременно.

Можно рассматривать суммы событий и другого рода. Пусть событие $C\{7, 12, 15\}$ означает появление красных карточек с номерами 7, 12, 15, а событие $D\{9, 14, 16\}$ — появление синих карточек с соответствующими номерами. Тогда событие $E\{7, 9, 12, 14, 15, 16\}$ можно рассматривать как сумму событий C и D:

$$E = C + D,$$

означающих появление красной или синей карточки с соответствующим номером.

Невозможное событие формально тоже включают в поле событий. В примере с картотекой невозможное событие — появление карточки с номером меньше единицы или больше n, или с двумя, тремя и т.д. номерами, или появление карточки с цветом, отличным от цвета карточек в картотеке. Таким образом, невозможному событию U не благоприятствует ни один из элементарных исходов поля событий. Иначе говоря, невозможному событию соответствует «пустое множество».

В свою очередь, в поле событий всегда входит достоверное событие V, заключающееся в том, что любое событие поля может произойти или, иначе говоря, при данном испытании ***какое-нибудь*** событие поля обязательно произойдет. В частности, сумма противоположных событий

$$A + \overline{A} = V \tag{1.1.2}$$

есть событие достоверное. Например, при одном выстреле по цели обязательно будет иметь место или попадание, или промах.

На основании равенства (1.1.2) можно записать:

$$V + U = V, \tag{1.1.2a}$$

так как достоверное и невозможное события противоположны.

И, наконец, очевидно, что любая сумма событий или сумма любых событий поля есть также событие того же поля.

На основании изложенного можно дать такое определение сумме событий:

Суммой нескольких случайных событий называется событие, состоящее в том, что при испытании появится хотя бы одно из возможных рассматриваемых событий.

Символически это записывается так:

$$S = A_1 + A_2 + \ldots + A_k = \sum_{k=1}^{k} A_k, \tag{1.1.3}$$

что означает S (или A_1, или A_2, …, или A_k).

В частности, из последнего равенства следует, что $A + A = A$.

Поле событий можно изобразить графически, например, так, как показано на рис. 1.1.1. На нем изображены события $A\{1, 4, 6, 8\}$, $B\{3, 4, 5, 6\}$, $D\{5\}$, $C\{7\}$ и др. Очевидно, события A, C, D — несовместимые; события A, B и B, D — совместимые: $A + B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ и $B + D\{3, 4, 5, 6\}$, причем $D \subset B$.

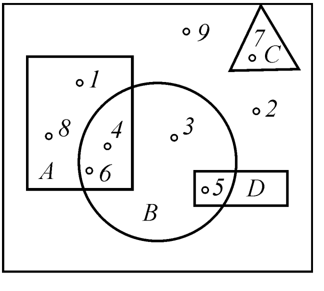


Рис. 1.1.1

Суммы событий, как видно, представляются сложением областей составляющих событий. Например, на рис. 1.1.2 заштрихованные области представляют собой суммы соответствующих событий.

Произведением каких-либо нескольких случайных ***событий*** называется одновременное или совместное появление их всех вместе. Графически произведение событий изображается общей частью соответствующих областей, образующейся их наложением, или ***совмещением***.

На рис. 1.1.3 такая область заштрихована. Так, например, в поле событий на рис. 1.1.1 наряду с суммами событий $A + B$ и $B + D$ можно рассматривать и их произведения: AB и BD.

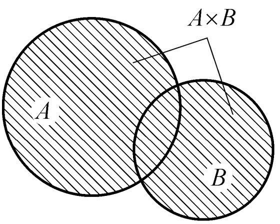


Рис. 1.1.2

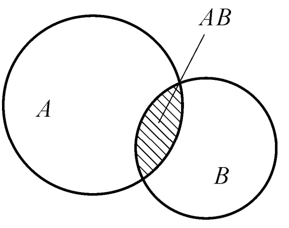


Рис. 1.1.3

Произведение и сумма совместимых событий различают лишь по смыслу их толкования:

если получен общий исход двух событий, то это можно понимать как новое событие, свидетельствующее о проявлении себя целиком тех событий, в состав которых этот исход входит; но тот же результат можно понимать как событие, заключающееся в появлении именно этого исхода, принадлежащего одновременно другим событиям.

Произведение событий записывается как произведение букв, обозначающих перемножаемые события, или новой буквой с указанием общих исходов. Так, по рис. 1.1.1 можно записать:

- произведение событий A и B: $AB = E\{4, 6\}$;
- произведение событий B и D: $BD = F\{5\}$.

Очевидно, что произведение $AA = A$ и т.п., так как оно указывает на повторение одного и того же события. Итак, для совместимых событий имеем:

$$A + A = A \quad \text{и} \quad AA = A. \qquad (1.1.4)$$

Если $A \subset B$, то

$$A + B = A \quad \text{и} \; AB = B. \tag{1.1.5}$$

Наконец, из изложенного следует, что произведение несовместимых событий есть событие невозможное.

Сложное событие может быть, в частности, суммой произведений нескольких событий.

Пример 1.1.2. По мишени производятся три выстрела. Элементарные возможные события при этом таковы:

A_1 — попадание при 1-м выстреле;
$\overline{A}_1$ — промах при 1-м выстреле;
A_2 — попадание при 2-м выстреле;
$\overline{A}_2$ — промах при 2-м выстреле;
A_3 — попадание при 3-м выстреле;
$\overline{A}_3$ — промах при 3-м выстреле.

Сложное событие B, состоящее в том, что при трех выстрелах будет только одно попадание, запишется так:

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$$

(напомним, что «+» означает «или»).

Аналогично событие C — в мишень будет не менее двух попаданий — запишется так:

$$C = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3.$$

Заметим, что попадания и промахи при разных выстрелах есть события не только не противоположные, но и совместимые (в отличие от попадания и промаха при данном одном выстреле).

Ранее было отмечено, что событие $\overline{A}$ противоположно событию A, если оба эти события составляют полную группу несовместимых событий. В этом случае событие $\overline{A}$ является как бы дополнительным к событию A в общей группе. Поэтому противоположные события называют также ***взаимодополнительными событиями***.

На этом основании событие, дополнительное к событию $A_1 + A_2$, будет заключаться в том, что наступят одновременно события $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, т.е. события A_1 и A_2 не произойдут. Следовательно:

$$\overline{A_1 + A_2} = \overline{A}_1\overline{A}_2, \tag{1.1.6}$$

так как события $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ совместимые, хотя события A_1 и A_2 могут быть и несовместимы.

Обращаясь к полю событий на рис. 1.1.1, можно выделить три его свойства:

1. Оно содержит достоверное событие $V\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2. Наряду с событиями A, B, C и D поле содержит и противоположные события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ и т.п.

3. Если поле содержит совместимые события типа A и B, то оно содержит также события $A + B$ и AB.

4. Поле содержит невозможное событие Γ.

Оказывается, можно подсчитать, сколько может содержать всех различных событий поле, состоящее из множества n элементарных событий. Пусть $n = 3$. Подсчитаем число возможных событий в этом поле.

1. Число трехточечных событий (хотя бы одно из трех событий произойдет) будет равно числу сочетаний из $n = 3$ событий по три ($m = 3$):

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!\,1!} = 1 = C_3^3.$$

Это будет достоверное событие.

2. Число одноточечных событий ($m = 1$):

$$C_n^1 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = 3 = C_3^1.$$

3. Число двухточечных событий ($m = 2$):

$$C_n^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 = C_3^2\,.$$

4. Число невозможных событий ($m = 0$):

$$C_n^0 = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{3!}{1!\,3!} = 1 = C_n^0.$$

Общее число событий, которые могут быть в поле из трех элементарных событий, будет равно:

$$N = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3 = 2^n.$$

Можно показать, что при любом n общее число событий, которое может содержать поле из n элементарных событий, определяется по той же схеме, т.е.

$$N = \sum_n^m C_n^m = 2^n. \qquad (1.1.7)$$

В теории вероятностей с каждым испытанием связывают поля событий, обладающие отмеченными выше свойствами.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Виктор Митрофанович Земцов
Ирина Викторовна Земцова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Редактор: *В. Ш. Мерзлякова*
Компьютерная верстка: *В. Ю. Алексеев*
Дизайн обложки: *Н. С. Кузнецова*

Диапозитивы предоставлены издательством

Подписано в печать 07.12.2012. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Усл. 34 печ. л. Тираж 500 экз. Заказ №

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98.

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации: оф. 511
тел., факс: (499) 183-56-83
http://www.iasv.ru, **e-mail:** iasv@mgsu.ru