БС

БИБЛИОТЕКА СТРОИТЕЛЯ

3

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Том 3

ДИНАМИКА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

И.В. Богомаз

«БИБЛИОТЕКА СТРОИТЕЛЯ»

И.В. Богомаз

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Том 3

ДИНАМИКА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Допущено
Министерством образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по направлению подготовки
дипломированных специалистов «Строительство»

2-е издание, исправленное и дополненное

Издательство Ассоциации строительных вузов
МОСКВА
2011

УДК 531.3
ББК 22.21.3
Б 74

Рецензенты:

заведующий кафедрой «Общей физики» Красноярского государственного университета, ведущий научный сотрудник ИФ СО РАН, д.ф.-м.н., профессор *Г.С. Патрин*;
заместитель директора по научной работе ИФ СО РАН, зав. лаб. ФМЯ, д.ф.-м.н., профессор *С.Г. Овчинников.*

Богомаз И.В.
Теоретическая механика. Том 3. Динамика. Аналитическая механика. Тексты лекций. Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство АСВ, 2011. – 160 с.

ISBN 978-5-93093-833-3

В учебном пособии изложены две части единого курса по теоретической механике: динамика и аналитическая механика. В первой части подробно рассматривается первая и вторая задачи динамики, также рассмотрены основные законы классической механики. Вторая часть посвящена изложению основных принципов аналитической механики Лагранжа. Подробно рассмотрен принцип возможных перемещений для вычисления реакций опор различных конструкций.

Учебное пособие предназначено для студентов младших курсов строительных специальностей.

ISBN 978-5-93093-833-3

Раздел I
ДИНАМИКА

Лекция 1
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Основные понятия

Основы классической механики заложены Галилео Галилеем (1564–1642), Рене Декартом (1596–1656), Христианом Гюйгенсом (1629–1695) и другими учеными 16–18 вв. В конечной форме классическая механика сформулирована Исааком Ньютоном (1642–1727). Ньютон изложил основы классической механики в более строгой, систематической и законченной форме, чем его предшественники, Поэтому классическую механику называют «механикой Ньютона».

В динамике изучаются механические движения (т.е. перемещения) материальных объектов под действием сил.

Сила считается в механике основным понятием. Силы не являются в механике какими-либо самостоятельными сущностями, независимыми от материальных тел. Они создаются материальными телами и полями. Поэтому можно сказать, что посредством сил материальные тела действуют друг на друга, т.е. взаимодействуют. Сила при этом выступает как векторная количественная мера интенсивности взаимодействий. Силы не только изменяют скорость движения материальных тел, но и вызывают их деформации. Наиболее простым и наглядным примером деформируемого тела является сжатая или растянутая пружина.

Системы единиц. Для измерения всех механических величин достаточно ввести три основные единицы измерения. В международной системе единиц (СИ), основными единицами являются: метр (м), килограмм (кг), секунда (с). Важнейшие производные величины в системе единиц (СИ): площадь – А ($м^2$), объем ($м^3$), скорость –

V ($\frac{м}{с}$), угловая скорость – ω ($\frac{рад}{с}с^{-1}$), ускорение – a ($\frac{м}{с^2}$) ,угловое ускорение – ε ($\frac{рад}{с^2}с^{-2}$), сила – F (ньютон (1Н = 1 $\frac{кг \times м}{с^2}$)), механическое напряжение – *Па* (*паскаль*).

Движение материальных объектов всегда следует рассматривать относительно определенной системы отсчета. Оно совершается в пространстве с течением времени. В классической механике, в основу которой положены аксиомы Ньютона, пространство считается однородным, изотропным трехмерным евклидовым пространством. Если тело не меняет своей формы и размеров при параллельном переносе, – значит пространство однородно, в нем нет выделенных точек. Если тело не меняет формы и размеров при вращении, значит пространство изотропно, в нем нет выделенных направлений. Движение в однородном изотропном пространстве не меняет формы и размеров тела – оно меняет лишь его положение относительно системы отсчета.

В евклидовом пространстве координаты подчиняются евклидовой геометрии, т.е. геометрии, основанной на системе аксиом, постулатов и теорем, сформулированных Эвклидом в III веке до н.э. Основой эвклидовой геометрии является постулат о параллельных прямых. Согласно этому постулату, через точку, взятую вне прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающуюся с данной. Из этого постулата вытекает, что сумма углов треугольника равна сумме двух прямых углов и ряд других утверждений.

Николай Лобачевский (1793–1856) в 1826 г. предположил, что может существовать другая геометрия, в которой допускается существование бесчисленного множества прямых, не пересекающих данную и проходящих через взятую вне ее точку. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше суммы двух прямых углов.

Бернхард Риман (1826–1186) в 1854 г. сформулировал другую неэвклидову геометрию, в которой через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, не пересекающей данную; иными словами, любые две параллельные линии обязательно пересекутся. Геометрия Римана отказывает параллельным линиям в существовании. В этой геометрии сумма углов треугольника больше суммы двух прямых углов; различные перпендикуляры к прямой не параллельны (как в эвклидовой геометрии), и не расходятся (как в геометрии Лобачевского), а пересекаются.

1.2. Основные законы движения

Инерциальная система отсчета

Начиная с Аристотеля (384–322 г. до н. э.) считалось, что движение тела всегда поддерживается некоторой действующей причиной и, как правило, только эта причина иссякает, тело немедленно останавливается. Только в XVII в. появилась и победила концепция движения, согласно которой движение по инерции, т.е. прямолинейное и равномерное движение тела, представляет собой неизменное состояние и не требует какой-либо поддерживающей силы. Тело, предоставленное самому себе, сохраняет неизменное состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, иными словами, сохраняет постоянную скорость – нулевую или конечную. Сформулировал принцип инерции итальянский ученый Галилео Галилей.

В различных системах отсчета математическая форма законов природы различна, однако существуют так называемые инерциальные системы отсчета, в которых эти законы имеют наиболее простой вид. *Такими инерциальными системами называются системы отсчета, в которых материальная точка при отсутствии действующих на нее сил взаимодействия, движется прямолинейно и равномерно, т.е. системы, для которых справедлив принцип инерции Галилея.*

Принцип инерции Галилея устанавливает, что всякое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока внешние силы не выведут его из этого состояния, т.е. *состояния покоя и состояния прямолинейного и равномерного движения неразличимы.* С достаточной точностью такой инерциальной системой можно считать гелиоцентрическую систему координат. В большинстве технических задач инерциальная система отсчета может быть связана с Землей.

Механика Ньютона пользуется некоторыми приближенными представлениями. К ним принадлежат представления о материальной точке, механической системе, абсолютно твердом теле.

Чтобы определить положение тела в пространстве одним числом на линии, двумя – на поверхности, тремя – в трехмерном пространстве, нужно рассматривать это тело как точку, т.е. игнорировать его размеры. Считая тела материальными точками, можно говорить о расстоянии между телами как об одной величине.

Объектом изучения в динамике являются:

• **материальная точка** – тело конечной массы, положение и движение которого в пространстве можно определять как для объекта, не имеющего размеров, т.е. геометрической точкой. Это условие выполнено, если при изучении движения можно пренебречь размерами тела и его вращением. Можно или нельзя принять материальное тело за материальную точку, зависит от конкретной задачи;

- **механическая система** (или просто система) – выделенная каким-либо образом совокупность материальных точек;
- **абсолютно твердое тело** (или просто тело) – механическая система, расстояние между точками которой не меняется. Абсолютно твердое тело является моделью материального тела.

Механика рассматривает сначала движение отдельной материальной точки, а затем переходит к системам материальных точек – абсолютно твердым телам, и к механическим системам, состоящим из конечного числа отдельных материальных точек, связанных между собой определенными взаимодействиями.

Чтобы ответить на вопрос, как изменяется скорость тела, если на него действует сила, Исаак Ньютон сформулировал три закона.

1.2.1. Первый закон Ньютона

Всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменить это состояние.

Под телом здесь подразумевается материальная точка. Сила определяется как причина, изменяющая равномерное и прямолинейное движение материальной точки. За меру силы Ньютон принял то ускорение, которое эта сила вызывает.

Механическое действие материального объекта на данную материальную точку состоит в том, что она изменяет свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Значит, если точка движется с ускорением относительно инерциальной системы отчета, то на нее действует сила. Сила есть причина возникновения ускорения точки.

Наблюдения показывают, что материальные объекты с трудом выводятся из состояния покоя или изменяют свое движение. Способность материальной точки сопротивляться изменению скорости называется *инертностью*.

Количественная мера инертности материальной точки пропорциональная количеству вещества, заключенного в этой точке, называется массой. Масса является основной динамической характеристикой материальной точки. Это скалярная положительная величина, обладающая свойствами аддитивности: массы материальных точек складываются арифметически. Это свойство массы хорошо подтверждается опытом, если скорость материальной точки много меньше скорости света в пустоте ($V << C$, C – скорость света) и размеры тела L много больше межатомного расстояния в твердом теле, т.е. $L >> \overset{o}{\mathrm{A}}$, здесь $\overset{o}{\mathrm{A}} = 10^{-8}$ см – единица измерения длины – ангстрем. Название "ангстрем" дано по имени шведского физика А.Й. Ангстрема, который первый ввёл ангстрем в употребление в 1868 году.

Единицей массы называется килограммом (*кг*) – эталон вещества, равный массе прототипа килограмма. Прототип килограмма представляет собой цилиндр из сплава 90% платины и 10% иридия диаметром около 39 мм и такой же высоты. Эталон находится в Международном бюро по мерам и весам в Севре под Парижем. Состав этого сплава обеспечивает высокие качества при хранении: химическую стойкость, однородность.

1.2.2. Второй закон Ньютона

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $\overline{q}$, равная произведению массы точки на вектор ее скорости – $\overline{q} = m\overline{V}$.

Изменение количества движения пропорционально приложенной силе, направление вектора изменения количества движения совпадает с линией действия этой силы.

Математически этот закон записывается в виде векторного уравнения

$$\frac{d}{dt}(m\overline{V}) = \overline{F}, \tag{1.1}$$

где m – масса движущейся точки; $\overline{V}$– скорость движущейся точки; $\overline{F}$ – сила. Считая массу материальной точки величиной постоянной, второй закон Ньютона можно представить в виде формулы:

$$m\overline{a} = \overline{F}, \tag{1.2}$$

где *ускорение* $\overline{a} = d\overline{V}/dt$, *которое получает материальная точка, пропорционально действующей на точку силе*. В таком виде в 1736 г. основной закон записан Леонардом Эйлером (1707–1783).

Масса m входит в это уравнение, как коэффициент пропорциональности между силой и ускорением, она проявляется как характеристика инертного свойства материальной точки, т.е. способности ее под действием заданной силы получать определенное ускорение. Если на точку действует одновременно несколько сил, то они, как известно, будут эквивалентны одной силе – главному вектору $\overline{R}$, равной геометрической сумме этих сил. Тогда закон (1.2) примет вид

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{R}. \tag{1.2а}$$

Этот же результат можно получить, используя вместо аксиомы параллелограмма **аксиому независимого действия сил.**

Аксиома. *При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки, относительно инерциальной системы отсчета, от действия каждой отдельной силы, не зависит от наличия других приложенных к точке сил и равно векторной сумме ускорений от действия каждой силы.*

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_N = \frac{1}{m}(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots \overline{F}_N).$$

Совокупность сил, приложенных к материальной точке, будем называть внешними силами.

Второй закон динамики справедлив для системы свободных материальных точек. Он остается справедливым и для несвободных материальных точек, на которые наложены связи. Следует отбросить связи, заменить их действие реакциями связи, главный вектор которых обозначим R^* и в число приложенных внешних сил включить силы реакций связей. Тогда систему несвободных материальных точек можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием внешних сил и реакций связей

$$m\overline{a} = \overline{R} + \overline{R}^*. \tag{1.2б}$$

1.2.3. Третий закон Ньютона

Третий закон постулирует характер взаимодействия материальных точек.

Действию всегда есть равное противодействие, другими словами – действия двух материальных точек друг на друга всегда равны по модулю, направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки (линии действия).

Законы (аксиомы) классической механики хорошо согласуются с результатами опытов для скоростей, много меньших скорости света в пустоте ($V << C$, C – скорость света). Для скоростей порядка скорости света ($V \leq C$), следует применять механику специальной теории относительности.

1.3. Две основные задачи динамики точки

В динамике точки рассматривают две основные задачи.

Первая задача: В инерциальной системе отсчета заданы уравнения движения материальной точки массой m. Требуется вычислить силу или силы, под действием которых происходит это движение.

Вторая задача: На материальную точку массой m действует сила, определенная в каждой точке пространства; требуется определить уравнение движения материальной точки, происходящее под действием этой силы.

1.3.1. Первая задача динамики

Зная массу материальной точки и ее уравнение движения, можно вычислить действующую на точку силу.

А. Уравнения движения точки в декартовых координатах

Действительно, если заданы уравнения движения точки в декартовой системе координат

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

то проекции силы на оси координат определяются из уравнений (1.2)

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}. \qquad (1.3)$$

Зная проекции силы на координатные оси, легко вычислить модуль силы и направляющие косинусы вектора силы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};\ \cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \cos\gamma = \frac{F_z}{F}.$$

Пример 1. Груз массой 10 кг летит вниз с высоты 100 м согласно уравнениям движения (*рис. 1.1*):

$$x(t) = 12t,\ \ y(t) = 100 - 5t^2 .$$

Сопротивление среды отсутствует. Вычислить действующую на груз силу при падении. Ускорение свободного падения принять равным $10\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

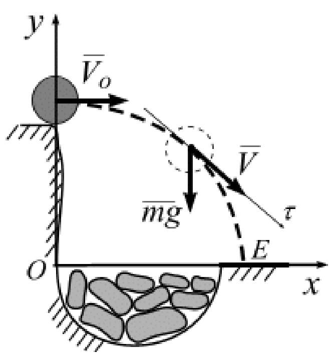

Рис. 1.1

Решение. Введем систему координат Oxy (*рис. 1.1*). Вычислим проекции ускорения на оси Ox, Oy :

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(12t) = 0,\; a_y = \ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}(100 - 5t^2) = -10\,.$$

Проекции вектора силы на оси Oxy будут равны

$$F_x = ma_x = 0;$$
$$F_y = ma_y = -10 \times 10 = -100 \text{ Н},$$

Модуль силы и направляющий косинус:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 100;\;\; \cos\alpha = \frac{F_x}{F} = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 90°.$$

Сила, действующая на груз при его падении направлена вертикально вниз и равна 100 Н. Сопротивление среды отсутствует, следовательно, сила действующая на груз при его падении соответствует его весу $F \equiv mg$.

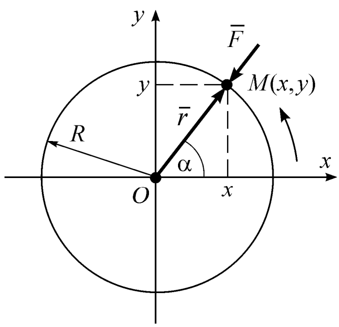

Рис. 1.2

Пример 2. Материальная точка массы m движется согласно уравнениям $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$. Вычислить силу $\overline{F}$, вызывающую это движение, если известно, что сила зависит только от положения точки, т.е. $\overline{F} = \overline{F}(x,y)$.

Решение. Уравнение траектории движения, согласно заданным уравнениям движения: $x^2 + y^2 = R^2$, т.е. точка вращается по окружности против хода часовой стрелки (*рис. 1.2*). Совместим систему координат с центром окружности и составим уравнение (1.3) в проекциях на оси получим:

$$F_x = m\ddot{x} = -Rm\omega^2\cos\omega t = -m\omega^2 x,$$

$$F_y = m\ddot{y} = -Rm\omega^2\sin\omega t = -m\omega^2 y.$$

Модуль силы

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = m\omega^2 r,$$

где r – модуль радиус-вектора материальной точки $\bar{r} = \overline{OM}$ (*рис. 1.2*).

Направление силы $\overline{F}$ вычисляем по направляющим косинусам:

$$\cos(\overline{x},\overline{F})=\frac{F_x}{F}=-\frac{m\omega^2 x}{m\omega^2 r}=-\frac{x}{r}.$$

$$\cos(\overline{y},\overline{F})=\frac{F_y}{F}=-\frac{m\omega^2 y}{m\omega^2 r}=-\frac{y}{r}.$$

Так как значение $\frac{x}{r}$ определяет угол, который образует радиус-вектор $\overline{r}$ с осью Ox $\left(\cos\alpha=\frac{x_A}{r}\right)$, следовательно вектор силы $\overline{F}$ направлен от точки A к центру окружности (*рис. 1.2*). Такая сила называется центральной.

Б. Естественные уравнения движения

Если точка движется по траектории, радиус кривизны которой известен, то следует использовать в качестве системы координат оси естественного трехгранника (трехгранник Френе). Такие оси, как известно из кинематики, называются естественными осями координат $(\overline{\tau},\overline{n},\overline{b})$. Проекции ускорения точки на естественные оси имеют вид

$$a_\tau=\frac{dV}{dt},\quad a_n=\frac{V^2}{\rho},\quad a_b=0.$$

Обозначая проекции сил на естественные оси через F_τ, F_n, F_b, получим закон движения материальной точки в проекциях на эти оси

$$ma_\tau=F_\tau,\quad ma_n=F_n,\quad 0=F_b. \tag{1.4}$$

Из этих уравнений видно, что $F_n>0$ и $F_b=0$. Таким образом, сила, действующая на материальную точку, всегда расположена в соприкасающейся плоскости к траектории движения точки и направлена в сторону вогнутости траектории.

Пример 3. Вездеход массой 2000 кг движется по оврагу с постоянной скоростью $V=60$ км/ч. Вычислить давление вездехода на дно оврага, когда радиус кривизны $R=50$ м. Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Примем вездеход за материальную точку, тогда на нее действуют две силы: вес $\overline{P}$ $(P=mg)$ и реакция грунта $\overline{N}$ (*рис. 1.3*). Направим ось τ по горизонтали в сторону движения, а ось n в сторону вогнутости траектории, т.е. по вертикали вверх.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел I. ДИНАМИКА

Учебное пособие

Богомаз Ирина Владимировна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Том 3

ДИНАМИКА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Редактор: *Л.Ф. Калашник*
Дизайн обложки: *Н.С. Романова*
Компьютерная верстка: *В.Ю. Алексеев*, *О.В. Лютова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Усл. 10 п.л. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство АСВ
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – оф. 511
тел., факс: (499)183-56-83, e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru/