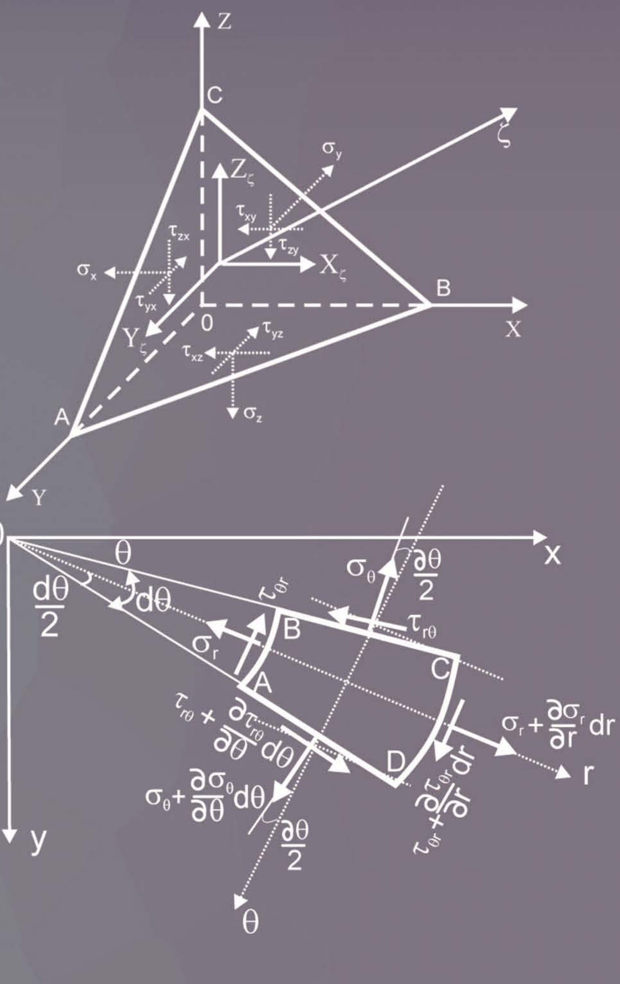
Л.В. Кожаринова

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ



Л.В. Кожаринова

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов РФ
по образованию в области строительства
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению
270100 «Строительство»

Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва, 2010

УДК 624.04 (075.8)

Рецензенты: *В.И. Колчунов*, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительные конструкции и материалы» Орловского государственного технического университета; *В.И. Коробко*, доктор технических наук, профессор Орловского государственного технического университета; *С.Н. Швачко*, кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика» Брянской государственной инженерно-технологической академии.

Кожаринова Л.В.
ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ. Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2010. – 136 с.

ISBN 978-5-93093-712-1

Пособие состоит из четырех разделов: основные уравнения теории упругости и методы их решения; плоская задача в декартовой и полярной системах координат; изгиб тонких плит (пластинок); основы теории пластичности. Каждый раздел содержит теоретический материал, необходимый для решения круга задач, поставленных в соответствующем разделе, а также примеры решения отдельных задач.

Для студентов строительных специальностей, изучающих курс «Основы теории упругости и пластичности».

ISBN 978-5-93093-712-1

Учебное пособие

Лилия Владимировна **Кожаринова**

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Редактор: *В.Ш. Мерзлякова*
Дизайн обложки: *Н.С. Романова*
Компьютерная верстка: *О.В. Лютова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98.
Подписано к печати 18.02.10. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Усл. 8,5 п.л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – оф. 511
тел., факс: (499)183-56-83, e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru/

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости обычно считается разделом математической физики, но она может рассматриваться и как ветвь механики твердого деформируемого тела, в основу которого заложено свойство идеальной упругости материала, т. е. способность тела, получившего деформацию, после устранения причин, ее вызвавших, полностью восстановить свою первоначальную форму.

Различают линейную (классическую) и нелинейную теории упругости. В основе классической теории упругости лежит представление об идеально упругом материале, для которого характерна линейная зависимость между напряжениями и деформациями $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Если материал не подчиняется закону Гука[1] даже при малых деформациях $\sigma = f(x)$, но при медленной разгрузке процесс протекает по этой же кривой, то материал называется нелинейно-упругим. Законы деформирования тела, выполненного из такого материала, изучаются нелинейной теорией упругости.

Теория пластичности устанавливает законы образования пластических деформаций и возникающих на всех стадиях пластического деформирования напряжений.

Теория пластичности имеет тесную связь с нелинейной теорией упругости, а именно: законы деформаций упругопластического тела при «простом» нагружении могут быть описаны с помощью уравнений нелинейно-упругого тела.

Нагружение тела считается простым, когда внешние силы от начала их приложения возрастают, сохраняя между собой постоянное соотношение.

Таким образом, теория упругости и пластичности представляет собой раздел механики, изучающий деформации в твердом теле, вызванные физическими воздействиями, и возникающие при этом внутренние силы.

Такие же задачи решаются и в сопротивлении материалов. Различие этих дисциплин, прежде всего в исходных предпосылках и методах решения задач. Теория упругости отличается от сопротивления материалов большей строгостью в решении задач, но тем не

[1] Гук (Hooke) Роберт (1635–1703), английский естествоиспытатель, разносторонний ученый и экспериментатор, архитектор. Открыл закон, названный его именем.

менее вынуждена также прибегать к некоторой схематизации, обращаться к гипотезам, хотя число их сводится к минимуму.

Основные принципы классической теории упругости

Изучаемое тело предполагается:

– ***сплошным***, т. е. непрерывное до деформации оно остается таким же и после деформации, другими словами, перемещения и деформации точек тела являются непрерывными функциями координат;

– ***однородным***, это значит, что во всех точках тела при одних и тех же напряжениях возникают одинаковые деформации;

– ***изотропным***, т. е. упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям;

– ***полностью упругим***, т. е. обладающим свойством полностью восстанавливать первоначальную форму и объем после устранения внешних физических воздействий. Первоначальное состояние предполагается таковым, что при отсутствии нагрузок в теле не возникает никаких напряжений.

Допущения, используемые в теории упругости:

1. Перемещения малы по сравнению с его линейными размерами, а относительные удлинения и углы сдвига малы по сравнению с единицей.

2. Применим принцип независимости действия сил.

Силы и напряжения

Все внешние силы можно разделить на две группы.

Поверхностные силы – возникают в результате контакта тел. Они характеризуются интенсивностью, т.е. значением силы на единицу площади поверхности. Если размеры площади контакта малы по сравнению с размерами тела, то можно считать, что сила приложена в точке (сосредоточенная сила).

Объемные силы – действуют в каждой точке тела. К ним относятся масса тела, силы инерции.

Рассечем тело произвольной плоскостью, положение которой определяется нормалью ς, внешней по отношению к оставшейся части. Выделим на плоскости бесконечно малый элемент площадью ΔF. Если обозначим через ΔP_ς усилие, приходящееся на рассматриваемую площадку, то отношение $p_\varsigma = \Delta P_\varsigma / \Delta F_\varsigma$ принято называть напряжением в данной точке. Составляющие напряжения p_ς на координатные оси в прямоугольной системе координат обозначим соответственно X_ς, Y_ς, Z_ς.

Для сечений, параллельных координатным осям, индекс ς можно заменить индексом координатной оси, нормальной к сечению. В этом случае составляющие напряжения в точке удобнее обозначать следующим образом:

– составляющую напряжения, перпендикулярную сечению, в дальнейшем называемую нормальным напряжением, как $\sigma_x(\sigma_y, \sigma_z)$;

– составляющие напряжения, лежащие в плоскости сечения и называемые касательными напряжениями, соответственно $\tau_{yx}, \tau_{zx}(\tau_{xy}, \tau_{zy};\ \tau_{xz}, \tau_{yz})$. Первый индекс в обозначениях касательных напряжений называет ось, параллельно которой направлено это касательное напряжение, а второй – площадку, где лежит это напряжение, точнее – нормаль к площадке. Например: τ_{yx} – касательное напряжение, направленное по оси *Y* и лежащее в плоскости, перпендикулярной оси *X*.

Правило знаков для составляющих напряжений

Для сечений, параллельных координатным осям, принято следующее правило знаков для составляющих напряжений: если внешняя нормаль к сечению, в котором определяем напряжения, совпадает с направлением соответствующей координатной оси, то положительное направление напряжения также совпадает с направлением одноименной координатной оси. Если же внешняя нормаль к сечению имеет направление, противоположное соответствующей координатной оси, то и положительные составляющие напряжений направлены в стороны, противоположные соответствующим координатным осям.

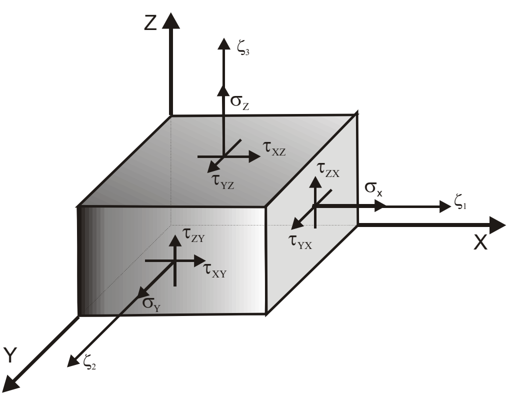


Рис. 1

На *рис. 1* показаны положительные направления составляющих напряжений на гранях.

Раздел I.
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды

Выделим из рассматриваемого сплошного тела целиком расположенный внутри него элементарный параллелепипед с размерами граней, равными dx, dy, dz, и рассмотрим его равновесие (*рис. 2*).

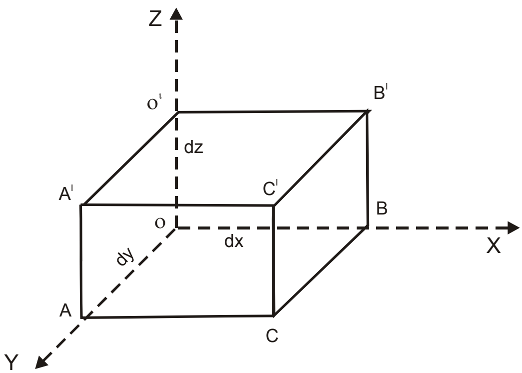


Рис. 2

Напряжения на гранях, отстоящих от начала координат, покажем с учетом их приращения.

Составляющие объемных сил внутри параллелепипеда обозначим за X_ρ, Y_ρ, Z_ρ.

Спроектируем все усилия, действующие по граням, на координатные оси:

$$\sum X = 0,$$

$$-\sigma_x dydz + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx)dydz + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}dz)dydx -$$

$$-\tau_{xz}dxdy - \tau_{xy}dxdz + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dy)dxdz + X_\rho dxdydz = 0.$$

Раскрыв скобки, сократив некоторые члены и разделив оставшиеся на общий сомножитель, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X_\rho = 0\,.$$

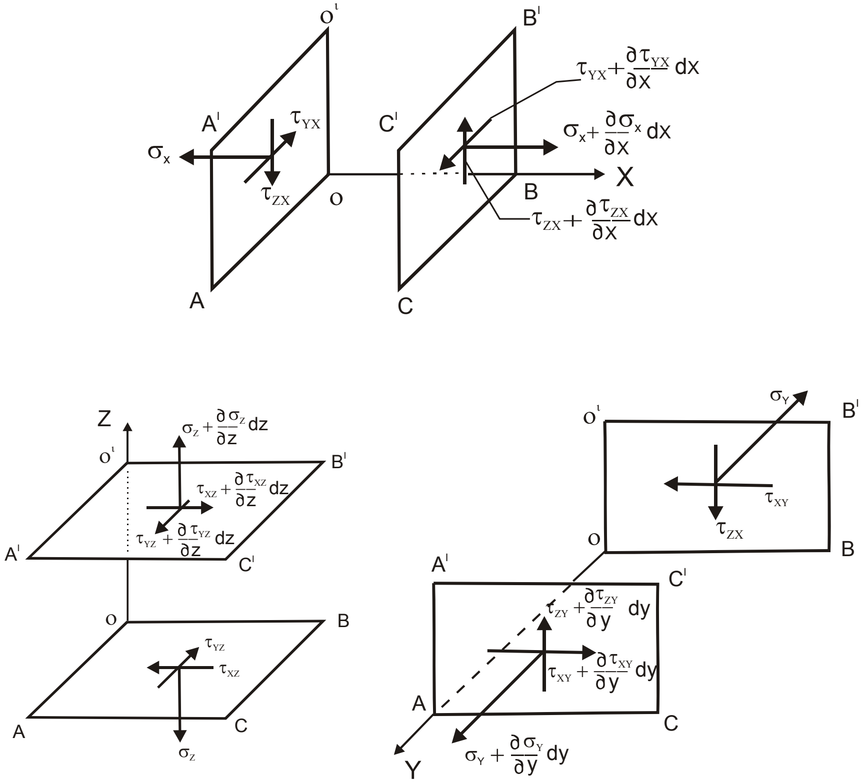


Рис. 3

Проделав аналогичные действия с уравнениями, полученными при составлении проекций всех сил на оси *Y* и *Z*, придем к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y_\rho = 0\,; \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_\rho = 0 \, .$$

Воспользуемся следующими тремя уравнениями статики: $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$, $\sum M_z = 0$. Первое из трех записанных выше уравнений статики имеет вид:

$$\tau_{yx} dydz \frac{dz}{2} - \tau_{zx} dydz \frac{dy}{2} + (\tau_{zx} + \underline{\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx) dydz \frac{dy}{2}} - (\tau_{yx} + \underline{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx) dydz \frac{dz}{2}} +$$

$$+ (\sigma_z + \underline{\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz) dydx \frac{dy}{2}} - (\tau_{yz} + \underline{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz) dxdydz} - \sigma_z dxdy \frac{dy}{2} + \sigma_y dzdx \frac{dz}{2} +$$

$$+ (\tau_{zy} + \underline{\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy) dydxdz} - (\sigma_y + \underline{\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) dxdz \frac{dz}{2}} + \underline{Zdxdydz \frac{dy}{2}} - \underline{Ydxdydz \frac{dz}{2}} = 0 \, .$$

Подчеркнутые слагаемые в уравнении имеют четвертый порядок малости и ими можно пренебречь. После сокращения некоторых слагаемых и делением оставшихся на $dxdydz$ получаем следующее равенство: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Второе и третье уравнения приведут к следующим соотношениям:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \, ; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \, .$$

Таким образом, напряженное состояние в точке можно выразить с помощью шести компонентов напряжения:

$$\sigma_x, \; \sigma_y, \; \sigma_z, \; \tau_{xy} = \tau_{yx}, \; \tau_{yz} = \tau_{zy}, \; \tau_{zx} = \tau_{xz} .$$

2. Условия на поверхности. Напряжения на наклонных площадках

Рассечем наклонной плоскостью выделенный ранее элементарный параллелепипед и рассмотрим одну из частей (*рис. 4*).

Обозначим площадь наклонного сечения *ABC* символом dA; нормаль к этому сечению – ς; составляющие напряжения, разложенного по координатным осям – X_ς, Y_ς, Z_ς; значения $\cos(\varsigma, X) = l$, $\cos(\varsigma, Y) = m$, $\cos(\varsigma, Z) = n$.

Тогда площадь грани $A0C$ будет равна величине $dA \cdot l$, грани $C0B$ – $dA \cdot m$, а грани $A0B$ – $dA \cdot n$.

Спроектируем все силы на ось X:

$$X_\varsigma dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{xy} dA \cdot m - \tau_{xz} dA \cdot n = 0 .$$

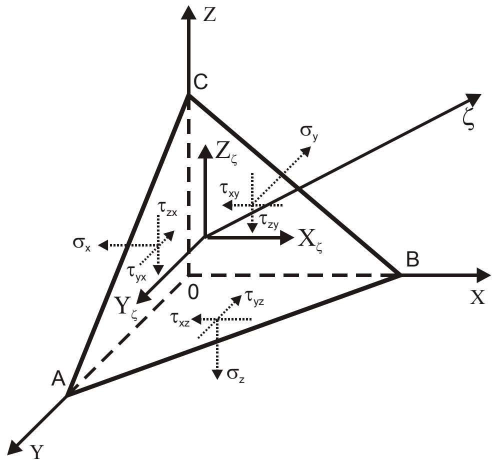


Рис. 4

После сокращения на общий сомножитель dA , получаем:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 \quad &\to \quad X_\varsigma = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n ; \\ \sum Y = 0 \quad &\to \quad Y_\varsigma = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n ; \\ \sum Z = 0 \quad &\to \quad Z_\varsigma = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n . \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Полученные соотношения принято называть условиями на поверхности.

Определим величину нормального напряжения, действующего на площадку ABC, которое равно сумме проекций составляющих $X_\varsigma, Y_\varsigma, Z_\varsigma$ на вектор ς, т.е.

$$\sigma_\varsigma = X_\varsigma \cdot l + Y_\varsigma \cdot m + Z_\varsigma \cdot n = (\sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n) \cdot l +$$
$$+ (\tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n) \cdot m + (\tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n) \cdot n.$$

Окончательная запись значения нормального напряжения приобретает вид:

$$\sigma_\varsigma = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{xy} \cdot l \cdot m + 2\tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l . \quad (2.2)$$

Выберем любое направление прямой η, лежащей в плоскости ABC и определяемой направляющими косинусами l_1, m_1, n_1, и спроектируем все силы на нее. Получим значение касательного напряжения $\tau_{\eta\varsigma}$ для наклонной плоскости по направлению η. Так как вектор ς и эта прямая взаимно перпендикулярны, то выполняется соотношение

$$l \cdot l_1 + m \cdot m_1 + n \cdot n_1 = 0.$$

$$\begin{gathered}\tau_{\eta\varsigma} = X_{\nu\varsigma} \cdot l_1 + Y_\varsigma \cdot m_1 + Z_\varsigma \cdot n_1 = \sigma_x \cdot l \cdot l_1 + \sigma_y \cdot m \cdot m_1 + \sigma_z \cdot n \cdot n_1 + \\ + \tau_{xy} \cdot (l \cdot m_1 + l_1 \cdot m) + \tau_{yz} \cdot (m \cdot n_1 + m_1 \cdot n) + \tau_{zx} \cdot (n \cdot l_1 + n_1 \cdot l).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Полное напряжение на наклонной площадке можно вычислить следующим образом:

$$p_\varsigma = \sqrt{X_\varsigma^{\ 2} + Y_\varsigma^{\ 2} + Z_\varsigma^{\ 2}}\ .$$

3. Исследование напряженного состояния в точке

3.1. Главные напряжения и главные площадки

Расположим все напряжения, определяющие собой напряженное состояние в рассматриваемой точке, в виде квадратной матрицы, называемой тензором напряжений:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Для удобства запоминания уравнений равновесия и условий на поверхности их можно представить в виде следующих таблиц:

Уравнения равновесия	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$
$0 = X_\rho +$	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
$0 = Y_\rho +$	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
$0 = Z_\rho +$	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

Компоненты нагрузки	l	m	n
X_ζ	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
Y_ζ	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
Z_ζ	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

Дадим определение таким понятиям, как главная площадка и главные напряжения.

Главной площадкой называется такая площадка, касательные напряжения в которой равны нулю, а полное напряжение по направлению и величине совпадает с нормальным напряжением. В этом случае нормальное напряжение называется главным.

Пусть наклонная плоскость *ABC* (см. *рис. 4*) совпадет с главной площадкой. В этом случае проекции главного напряжения на координатные оси будут соответственно равны величинам:

$$
\begin{aligned}
&X_\varsigma = \sigma \cdot l = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n \quad \text{или} \\
&(\sigma - \sigma_x) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n = 0; \\
&Y_\varsigma = \sigma \cdot m = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n \quad \text{или} \\
&\tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = 0; \\
&Z_\varsigma = \sigma \cdot n = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n \quad \text{или} \\
&\tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n = 0.
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

Кроме того, имеем известное из аналитической геометрии условие $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Первые три уравнения однородны и, кроме того, l, m, n не могут быть одновременно равны нулю, исходя из четвертого уравнения, следовательно, определитель системы уравнений должен быть равен нулю, т. е.

$$
\begin{vmatrix}
\sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\
\tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma
\end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.2}
$$

Раскрывая этот определитель, получаем кубическое уравнение

$$
\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{yz}{}^2 - \tau_{zx}{}^2) -
$$
$$
-(\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}{}^2 - \sigma_y\tau_{zx}{}^2 - \sigma_z\tau_{xy}{}^2) = 0.
$$

Решение этого уравнения даст три значения $\sigma: \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$, и все они будут действительными. Расположим их в следующем порядке, а именно: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Корни кубического уравнения не должны зависеть от системы координат, следовательно, коэффициенты этого уравнения также не