М.В. Самохин

МИНИМАЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ

Библиотека научных разработок и проектов МГСУ

М.В. Самохин

МИНИМАЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ

МГСУ
Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва
2009

УДК 517.984.5
ББК 22.162

Самохин М.В.

Минимальные границы и граничные свойства аналитических функций в областях произвольной связности / Монография: – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 176 с.

ISBN 978-5-93093-674-2

Основной целью настоящей работы является описание и изучение классов областей произвольной связности, на которые обобщается ряд классических результатов теории граничных свойств аналитических функций в единичном круге и конечно–связных областях. В различных типах областей произвольной связности изучаются такие вопросы граничных свойств, как описание модуля граничных значений для классов аналитических функций, свойства предельных множеств, обобщенный принцип максимума, граничное поведение экстремальных функций, двойственность классов Харди, а также некоторые другие вопросы, связанные с граничными свойствами аналитических функций.

Рекомендовано Научно-техническим советом МГСУ

УДК 517.984.5
ББК 22.162

ISBN 978-5-93093-674-2

Памяти моего учителя

Семена Яковлевича Хавинсона

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию граничных свойств различных классов аналитических функций, таких как классы Неванлинны, Харди, класс В.И. Смирнова (который в зарубежной литературе часто называют алгеброй Харди или универсальным классом Харди) и других, в единичном круге и в конечносвязных областях с гладкой или жордановой границей посвящено очень большое число работ (сошлемся на работы [23], [11], [7], [16], [15], [48], [18], [22], где имеется подробная библиография). Что же касается областей бесконечной связности, то здесь результатов существенно меньше; это обусловлено в первую очередь тем, что в большинстве своем классические методы исследования, используемые в единичном круге и в конечносвязных областях, не переносятся на случай произвольной области. В частности, само понятие «граничное значение» требует переосмысления. Действительно, традиционно используемые понятия граничных значений, такие как угловые, некасательные, асимптотические, в произвольных областях не работают. Кроме того, в качестве осложняющего обстоятельства следует учитывать и то, что в составе границы области могут быть множества, устранимые для одних классов функций и не устранимые для других (в частности, и вся граница может обладать таким свойством). Последнее показывает, что без каких-либо ограничений топологического, метрического и аналитического (то есть, связанного со свойствами классов функций) характера рассчитывать на обобщение результатов классической теории граничных свойств на случай областей произвольной связности не приходится. При этом, естественно, возникает вопрос о выделении и изучении класса областей произвольной связности, для которого содержательное обобщение все-таки возможно. Исследование этого вопроса и является одной из основных задач настоящей работы.

Применяемый в работе метод исследования основан на широком привлечении результатов функционального анализа и, в частности, теории банаховых алгебр, использовании различных компактных расширений области, а также универсального накрывающего отображения, которое позволяет «пересаживать» задачи в единичный круг и решать их в возникающих классах автоморфных функций.

К числу фундаментальных задач теории граничных свойств аналитических функций относится задача о возможности построения аналитической функции с заданным модулем ее граничных значений. Классическая постановка этой задачи в единичном круге выглядит следующим образом:

для заданной измеримой на единичной окружности функции u, такой, что $u \ge 0$, $|\ln u| \in L^1(d\theta)$ (ряд общепринятых обозначений (см., например, [6]) будет использоваться в работе без дополнительных пояснений), найти аналитическую в единичном круге функцию ограниченного вида, модуль радиальных граничных значений которой совпадает с функцией u почти всюду на единичной окружности.

В единичном круге задача была впервые рассмотрена Сегё, а затем подробно исследована В.И. Смирновым, результаты которого легли в основу теории факторизации для различных классов аналитических функций. При этом оказалось, что искомая функция может быть выбрана в классе более узком, чем класс функций ограниченного вида, а именно в классе функций В.И. Смирнова (см. [23], где класс В.И. Смирнова обозначается буквой D). В силу теоремы Полубариновой–Кочиной (см. [23]) это, в частности, означает, что при дополнительном условии $u \in L^p(d\theta)$, искомая функция найдется в соответствующем классе Харди $H^p(\Delta)$. При $p = \infty$ из этого утверждения может быть получено классическое описание границы Шилова алгебры $H^\infty(\Delta)$ как пространства максимальных идеалов алгебры $L^\infty(d\theta)$ (см., например, [6]). Важное значение результатов, которые были получены для единичного круга, естественно приводит к необходимости изучения соответствующей задачи в более общих областях. Однако при этом возникают значительные трудности двоякой природы. Во-первых, для областей с произвольной границей немедленно возникает вопрос об адекватном постановке задачи понятии граничных значений. Во-вторых, в случае многосвязной области неизбежно приходится иметь дело с тем, что естественные аналоги функций, используемых в круге, являются многозначными.

Для конечносвязных областей, ограниченных жордановыми кривыми, обобщение конструкции Сегё и Смирнова в наиболее полном виде было получено Г.И. Тумаркиным и С.Я. Хавинсоном в работе [41] (содержащей подробную библиографию), где вместо радиальных граничных значений рассматривались асимптотические значения вдоль жордановых кривых, а совпадение модуля граничных значений с заданной на границе функцией требовалось почти всюду относительно гармонической меры. Однако методы, используемые в этой работе, равно как и понятие асимптотических граничных значений, не могут быть применены к областям с произвольной границей.

Если в первоначальной задаче функцию u взять ограниченной и отделенной от нуля, то в такой урезанной постановке задача обобщалась на случай произвольной области в работе [71], где в качестве граничных значений ограниченной аналитической функции рассматривались значения ее преобразования Гельфанда на границе Шилова алгебры H^∞. Но при этом сама постановка задачи вынуждает ограничиваться только классом H^∞.

В первой главе настоящей работы рассматривается новый естественный подход к обобщению исходной задачи на случай произвольной области D, который является инвариантным (то есть равнопригодным для любых областей) и не требует определения граничных значений в самой области. Задача при этом ставится на универсальной поверхности наложения данной области в терминах функций автоморфных относительно группы накрывающих преобразований. Поскольку для областей, рассматриваемых в работе, универсальная поверхность наложения конформно эквивалентна единичному кругу Δ, то в качестве граничных значений естественно принять радиальные граничные значения в единичном круге. Группа G накрытия $\pi:\Delta \to D$ при этом состоит из всех дробно-линейных отображений γ единичного круга на себя таких, что $\pi \circ \gamma = \pi$.

Основным результатом первого параграфа является описание класса областей произвольной связности, на универсальной накрывающей поверхности которых положительно решается задача о существовании автоморфных относительно группы G аналитических функций класса В.И. Смирнова с заданным модулем граничных значений. Такие области в работе называются гармоничными, что отражает важную роль, которую играют гармоническая мера и пространство ограниченных гармонических функций в описании данного класса областей. В этом параграфе получен ряд необходимых и достаточных условий гармоничности. Так, теорема 1.1.3, установленная ранее в работе [24], утверждает, что гармоничность области D эквивалентна тому, что любая мультипликативная (то есть многозначная аналитическая с однозначным модулем) в области D функция f, для которой

$$\sup_D |fh| = \sup_D |h|, \qquad (*)$$

при всех $h \in H^\infty(D)$ обладает тем свойством, что суперпозиция $f \circ \pi$ является внутренней функцией в единичном круге. Заметим, что при $D = \Delta$ внутренние функции, и только они, обладают свойством (*). В произвольной области D, граница которой имеет положительную аналитическую емкость, достаточный запас мультипликативных функций, обладающих свойством (*), обеспечивает теорема 1.1.2 (см. также главу III, §2). Следует особо отметить, что задача о существовании автоморфных аналитических функций с заданным модулем граничных значений оказывается эквивалентной совершенно иной по характеру задаче об описании границы Шилова алгебры $H^\infty(\Delta, G)$ ограниченных аналитических в единичном круге функций, автоморфных относительно группы G.

Однако для понимания природы гармоничных областей наиболее важной является теорема 1.1.4, в которой, в частности, утверждается, что гармоничность области D эквивалентна тому, что граница Шилова алгебры $H^\infty(D)$ ограниченных аналитических в области D функций совпадает с границей Шоке пространства $h^\infty(D)$ ограниченных гармонических в области D функций. Совпадение этих границ означает, что классы $H^\infty(D)$ и $h^\infty(D)$ имеют «одинаковые» принципы максимума модуля. Смысл этой «одинаковости» раскрывается в теоремах 1.1.7 и 1.1.8, которые формулируются «внутри» области D в терминах обобщенного принципа максимума и не используют понятия границы. В теоремах 1.1.4w и 1.1.4м критерий гармоничности получен в терминах классических компактификаций Винера и Мартина.

Несмотря на то что все полученные в §1 характеристики класса гармоничных областей являются глобальными, оказывается, что гармоничность области является чисто локальным свойством ее границы. Этому вопросу, вопросу локализации критериев гармоничности, посвящен §2 первой главы, центральный результат которого содержится в теоремах 1.2.2 и 1.2.3.

Теорема 1.2.2. Для того чтобы область D была гармоничной, необходимо и достаточно, чтобы у каждой точки $\zeta \in \partial D$ нашлась окрестность U_ζ, такая, что каждая компонента пересечения $U_\zeta \bigcap D$ является гармоничной.

При этом с точки зрения проверки гармоничности и для построения примеров наибольшую ценность представляет «достаточная» часть теоремы, которая может быть существенно усилена.

Теорема 1.2.3. Если у каждой точки $\zeta \in \partial D$, за исключением, быть может, точек из некоторого множества $E \subset \partial D$, гармонической меры нуль, существует окрестность U_ζ, такая, что гармоничной является каждая компонента пересечения $U_\zeta \bigcap D$, то вся область D является гармоничной. (В настоящей работе гармонической мерой какого-либо множества ∂D всегда называется его гармоническая мера относительно области D.)

В третьем параграфе главы I устанавливается гармоничность широких классов областей произвольной связности. Так, гармоничность областей типа Парро–Уидома (подробнее о них см. главу IV) устанавливается в теореме 1.3.1. Гармоничными оказываются и все области D, диаметры компонент дополнения к которым отделены от нуля (теорема 1.3.2). Весьма частным случаем последнего факта является гармоничность всех конечносвязных областей с невырожденными компонентами границы. Еще один большой класс гармоничных областей описывает теорема 1.3.3. В этой теореме утверждается, что если $\partial D = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j}$, где K_j – попарно непересекающиеся компактные множества, K_j лежит на положительном расстоянии от $\partial D \setminus K_j$ и множество $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, к которому накапливаются компакты K_j, имеет (как часть границы области D) гармоническую меру нуль, то область D является гармоничной тогда и только тогда, когда для любого компакта K_j положительной логарифмической емкости гармоничной является та из компонент дополнения к K_j, которая содержит область D. Утверждение остается в силе и в случае, когда

$$\partial D = \partial \Omega \bigcup \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right\},$$

где Ω – односвязная область расширенной плоскости с компактной в конечной плоскости границей. Теорема 1.3.3, таким образом, представляет одновременно и метод построения гармоничных областей.

В этом же параграфе разобран ряд конкретных примеров, как гармоничных, так и негармоничных областей, которые возникают при исследовании других вопросов граничного поведения аналитических функций в бесконечносвязных областях. Конструкции исследуемых областей содержатся в работах [23], [10], [99], [71], [53], [68], [51]. (Приведенная в последней работе конструкция, как подчеркивают авторы работы, принадлежит А.А. Гончару.) Показано, в частности, что ни максимальность области D для пространства $\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$, ни ее регулярность в смысле задачи Дирихле не являются достаточными условиями гармоничности. На основе ряда примеров демонстрируется неулучшаемость условий основных теорем первой главы.

Во второй главе предлагается метод изучения предельных множеств ограниченных аналитических функций в произвольных и гармоничных областях с позиций теории банаховых алгебр.

В отличие от задач, изучавшихся в первой главе, теория предельных множеств интенсивно развивалась как для областей с «хорошей» границей, так и для произвольных (см. [15], [22], [18]). Более того, существенные результаты в этой теории были установлены для классов функций более общих, чем аналитические (см. [13] и добавление Е.П. Долженко в работе [15]).

То, что в качестве объекта исследования во второй главе выбран класс $\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$, связано с наличием у этого класса естественной структуры банаховой алгебры, что позволяет применить соответствующий аппарат при изучении предельных множеств. Кроме того, изучение класса $\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$ позволяет увидеть различие в свойствах предельных множеств в произвольных и гармоничных областях. Это различие, как будет показано, обусловлено весьма важной ролью, которую играют граница Шилова алгебры $\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$ и обобщенный принцип максимума, рассмотренный в первой главе в вопросах, связанных с предельными множествами. Заметим также, что ряд результатов классической теории предельных множеств, формулируемых для мероморфных функций, справедлив в предположении их ограниченности при подходе к особой точке границы. В силу принципа локализации (см. [67]) это эквивалентно справедливости соответствующих утверждений для ограниченных аналитических функций.

Впервые алгебраический подход к изучению предельных множеств класса H^{∞} был предпринят в работе [96], где доказано, что для любой функции f из $\mathrm{H}^{\infty}(\Delta)$ ее полное предельное множество $C\ell(\mathrm{f},\zeta)$ в точке $\zeta\in\partial\Delta$ совпадает с образом слоя M_{ζ} над этой точкой в пространстве максимальных идеалов алгебры $\mathrm{H}^{\infty}(\Delta)$ под действием отображения $\hat{\mathrm{f}}$ (преобразование Гельфанда функции f). Аналогичный результат для случая произвольной области был установлен в работе [67]. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах [102], [73] соответственно для случая единичного круга и произвольной области.

В первом параграфе главы II рассмотрены некоторые отображающие свойства функций из $H^\infty(D)$. Так, в теореме 2.1.1 показано, что для произвольной области D и произвольной функции $f \in H^\infty(D)$ образ границы Шилова Ш алгебры $H^\infty(D)$ при отображении $\hat{f}$ покрывает все существенные для класса H^∞ точки границы области $f(D)$. Для гармоничной же области D этот образ покрывает и все регулярные в смысле задачи Дирихле точки границы области $f(D)$ (теорема 2.1.3). Заметим, что в силу общих результатов теории банаховых алгебр справедливо включение $\partial[\hat{f}(M)] \subset \hat{f}(Ш)$, где M – пространство максимальных идеалов алгебры $H^\infty(D)$. Таким образом, множество $\partial[f(D)] \setminus \hat{f}(Ш)$ имеет в случае произвольной области D аналитическую емкость нуль, а в случае гармоничной – логарифмическую емкость нуль. Локальный вариант последнего утверждения выглядит следующим образом.

Следствие 2.1.6. Если область D гармонична, то для любой функции $f \in H^\infty(D)$ и любой точки $\zeta \in \partial D$ множество

$$\hat{f}(M) \setminus \left\{ \hat{f}(Ш \cap M_\zeta) \cup R(f,\zeta) \right\}$$

имеет логарифмическую емкость нуль.

Во втором параграфе рассматривается множество функций $f \in H^\infty(D)$, для которых имеет место равенство $\partial[\hat{f}(M)] = \hat{f}(Ш)$ и некоторые свойства предельных множеств таких функций. Интерес к этому классу функций вызван, в частности, тем, что указанное равенство выполнено для любой функции $f \in H^\infty(D)$, для которой $|\hat{f}|\Big|_{Ш} = 1$. В единичном круге последнее равенство справедливо только для внутренних функций или, что то же, функций класса U (в обозначениях работ [15], [22]), которые играют очень важную роль в теории граничных свойств аналитических функций в единичном круге. Кроме того, условию $|\hat{f}|\Big|_{Ш} = 1$ удовлетворяют экстремальные функции для весьма широкого класса задач (подробнее см. главу III). Отметим также (см. [25]), что множество U совпадает с множеством строго крайних точек единичного шара алгебры $H^\infty(D)$.

В теореме 2.2.2 показано, что для всякой функции $f \in H^{\infty}(D)$, такой, что $\partial[\hat{f}(M)] = \hat{f}(Ш)$, и для любой точки $\zeta \in \partial D$ предельное множество $C\ell(f,\zeta)$ является либо максимально возможным, то есть совпадает с $\overline{f(D)}$, либо $C\ell(f,\zeta) \subset \partial[f(D)]$. Эта теорема совместно с результатами первого параграфа позволяет получить аналоги известной теоремы Зейделя–Фростмана для случая произвольных (следствие 2.2.3) и гармоничных (следствие 2.2.4) областей. Напомним, что согласно теореме Зейделя–Фростмана любая внутренняя функция в единичном круге, имеющая особенность в точке $\zeta \in \partial\Delta$, бесконечно часто принимает в любой окрестности этой точки все значения из единичного круга, за исключением, быть может, множества значений логарифмической емкости нуль. Применительно к функциям множества U полученные результаты выглядят следующим образом (заметим, что для всех функций $f \in U$, $f \neq const$ справедливо равенство $\partial[\hat{f}(M)] = \hat{f}(Ш) = \partial\Delta$).

Теорема 2.2.10. Пусть D – произвольная область. Если для функции $f \in U$ и точки $\zeta \in \partial D$ множество $C\ell(f,\zeta) \setminus \partial\Delta$ не пусто (в единичном круге это означает, что f имеет особенность в точке ζ), то в любой окрестности точки ζ функция f бесконечно часто принимает все значения из единичного круга, за исключением, быть может, множества значений аналитической емкости нуль.

Теорема 2.2.11. Пусть в условиях теоремы 2.2.10 область D является гармоничной. Тогда в любой окрестности точки ζ функция f принимает бесконечно часто все значения из единичного круга, за исключением, быть может, множества значений логарифмической емкости нуль.

Таким образом, на гармоничные области теорема Зейделя–Фростмана обобщается в «чистом» виде.

Следует отметить, что подобные оценки множества исключительных значений возникали ранее при исследовании предельных множеств мероморфных функций, обладающих «тощим» множеством существенных особенностей (см., например, [8], [77], [12]).

Еще одно важное свойство функций, для которых $\partial[\hat{f}(M)] = \hat{f}(Ш)$ заключается в том, что эти функции могут быть использованы в качестве «пробных» для проверки устранимости той или иной части границы области D (теоремы 2.2.5 и 2.2.6). Так, для класса U справедлив следующий результат.

Теорема 2.2.12. Пусть D – произвольная (гармоничная) область, $f \in U$, $f \neq const$. Тогда любое множество $E \subset \partial D \setminus \partial\overline{D}$, устранимое для f, будет устранимо для $H^{\infty}(D)$ ($h^{\infty}(D)$).

Отметим, что часть этой теоремы, которая относится к случаю произвольной области, и ослабленный вариант теоремы 2.2.10 были первоначально получены для экстремальной функции в задаче о лемме Шварца (доказано в [46], повторено в [62]). Однако при этом существенно использовалась специфика экстремальной функции. Результаты работ [46] и [62] были обобщены затем в [25] на функции множества U.

В третьем параграфе более детально рассматривается роль границы Шилова и обобщенных принципов максимума в вопросах, касающихся предельных множеств.

Вводится общее понятие равномерного предельного оператора K как отображения из $H^\infty(D) \times \partial D$ в подмножества комплексной плоскости, такого, что для всех функций $f \in H^\infty(D)$ и каждой точки $\zeta \in \partial D$ множество $K(f,\zeta)$ порождается некоторым компактным подмножеством K_ζ из слоя M_ζ в том смысле, что $K(f,\zeta) = \hat{f}(K_\zeta)$. Для случая единичного круга это понятие было введено в работе [92]. Следует отметить, что в силу упомянутого выше равенства $C\ell(f,\zeta) = \hat{f}(M_\zeta)$ для любого равномерного оператора K справедливо включение $K(f,\zeta) \subset C\ell(f,\zeta)$.

Важная роль границы Шилова алгебры $H^\infty(D)$ в изучении предельных множеств в произвольных и гармоничных областях выявляется в теоремах 2.3.1 и 2.3.2, где показано, что для равномерного оператора K справедливость, при всех $f \in H^\infty(D)$, следующих утверждений:

а) множество $C\ell(f,\zeta) \setminus K(f,\zeta)$ открыто;

б) множество $C\ell(f,\zeta) \setminus \{K(f,\zeta) \bigcup R(f,\zeta)\}$ имеет аналитическую (а для гармоничных областей – логарифмическую) емкость нуль;

эквивалентна тому, что $Ш \bigcap M_\zeta \subset K_\zeta$.

(Здесь $R(f,\zeta)$ – стандартное обозначение для множества повторяющихся значений.) Иными словами, среди всех равномерных предельных операторов, обладающих свойствами а) и б), оператор $(f,\zeta) \to \hat{f}(Ш \bigcap M_\zeta)$ является «минимальным». Заметим, что на самом деле из доказательства теорем следует, что утверждение б) является следствием утверждения а).

На основе достаточно общей конструкции, охватывающей всевозможные способы «подхода» к граничной точке области, показано, что многие предельные множества, встречающиеся в классической теории, описываются равномерными предельными операторами. Эта конструкция выглядит следующим образом: для каждой точки $\zeta \in \partial D$ фиксируем некоторое множество $E_\zeta \subset D$, Научное издание

Михаил Васильевич **Самохин**

МИНИМАЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ

Компьютерная верстка: *Е.В. Орлов*
Редактор: *Г.М. Мубаракшина*
Дизайн обложки: *Н.С. Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98.
Подписано к печати 25.09.09. Формат 70x100/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. 11 п.л. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – КМК, оф. 348
тел., факс: (499)183-56-83, e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru/