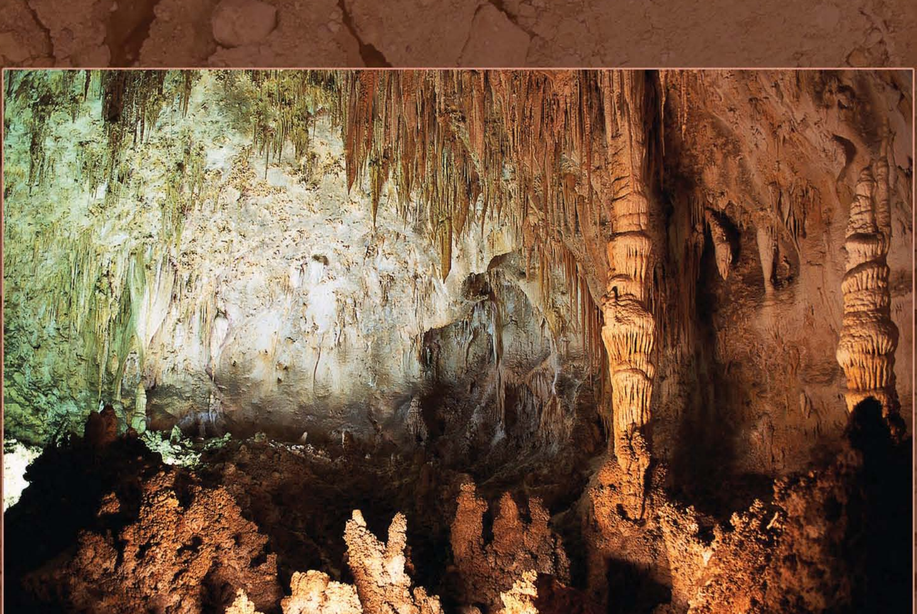
А.Н.ВЛАСОВ В.П.МЕРЗЛЯКОВ

УСРЕДНЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ В МЕХАНИКЕ СКАЛЬНЫХ ПОРОД



А.Н. ВЛАСОВ

В.П. МЕРЗЛЯКОВ

УСРЕДНЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ В МЕХАНИКЕ СКАЛЬНЫХ ПОРОД

Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва
2009

Рецензенты:

заведующий кафедрой «Подземных сооружений и гидротехнических работ»
МГСУ, профессор, доктор технических наук

М.Г. Зерцалов;

ведущий научный сотрудник учреждения Российской академии наук
ИФЗ РАН им. О.Ю. Шмидта, доктор физико-математических наук
М.Д. Коваленко.

Власов А.Н., Мерзляков В.П.

Усреднение деформационных и прочностных свойств в механики скальных пород: Монография. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 208 с.

ISBN 978-5-93093-687-2

В монографии скальная порода рассматривается как дискретное композитное тело природного образования. Основой расчёта напряжённо-деформированного состояния являются методы механики сплошной среды разного уровня сложности.

Излагаются методы определения эффективных характеристик механических свойств – коэффициентов уравнений механики сплошной среды, описывающих деформационное поведение скальной породы. Рассматриваются решения, содержащие эффективные характеристики, полученные при различных условиях, от простейших до математически обоснованных, близких к решению исходных задач.

На основе асимптотического метода усреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами разрабатывается корректный переход от деформационных и прочностных характеристик фрагментов скальной породы к деформационным и прочностным характеристикам массива в целом. Излагается техника асимптотического метода (процедура усреднения). Показываются возможности метода в применении к трещиноватым и слоистым скальным породам. Обобщаются решения классических задач и решаются практические задачи напряжённо-деформированного состояния и устойчивости сооружений.

Книга предназначена для механиков, специалистов, чья деятельность связана с механикой скальных пород, и студентов соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-93093-687-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Скальные породы формируются в природе при разнообразных геолого-климатических условиях. Они всегда рассечены трещинами и часто представлены как слоистые напластования, т. е. являются дискретными, многокомпонентными композитными телами природного образования.

Исторически экспериментальные исследования показали, что для описания механического поведения слоистых и трещиноватых скальных пород, как правило, нельзя пользоваться представлениями механики изотропной среды. Анизотропное упругое тело воспринималось экспериментатором как изотропное с большим разбросом опытных данных при определении свойств в различных направлениях. Ч. Джегер [Джегер Ч., 1975] по этому поводу пишет: «Вначале скальные породы испытывали теми же методами, что и бетон, но скоро стало очевидным, что они представляют собою материалы значительно более сложные… Анизотропия – одно из свойств, отличающих породу от бетона». В конце XIX в. немецкий кристаллограф Франц Нейман [Neumann F.E., 1885] сформулировал принцип: материал в отношении своих физических свойств (в том числе упругих) обнаруживает симметрию того же рода, что и его кристаллографическая форма. С.Г. Лехницкий [Лехницкий С.Г., 1962] распространил этот принцип также и на слоистые и трещиноватые горные породы.

Распределение напряжений и деформаций в упругих анизотропных средах имеет не только количественное, но и принципиально качественное отличие. Так, например, линии равных напряжений в таких средах, моделирующих работу оснований, приобретают характерную «грибообразную» форму, трансформирующуюся в зависимости от угла наклона слоёв. Такое распределение напряжений является причиной уменьшения несущей способности оснований в одних случаях и увеличения – в других.

Таким образом, массивы скальных пород характеризуются неоднородностью, анизотропией, к которой приводят системная трещиноватость и слоистость, а также начальным напряжённым состоянием; обладают большой изменчивостью свойств под воздействием природных и техногенных факторов. Как отмечает А.Ф. Булат: «Горные породы с точки зрения механики представляют для исследователя объект сложный и противоречивый: в любой фиксированный момент времени в зависимости от рассматриваемого физического объёма одна и та же литологическая разность может быть представлена моделью либо сплошной, либо дискретной среды» [Булат А.Ф., 2004].

В настоящее время для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии, прочности и устойчивости скального массива либо выбирается подходящая модель из существующих, либо, если необходимо, строится новая. В рамках предположений и ограничений модели выписываются уравнения с граничными и, если это требуется, начальными условиями. Эти уравнения содержат коэффициенты, которые являются параметрами модели или характеристиками исследуемого тела. Замена реальной породы некоторой однородной средой, характеризуемой эффективными* (усредненными) характеристиками, является основной идеей метода усреднения. Такое усреднение может быть коэффициентным и не приводит к изменению вида уравнений, описывающих физические процессы в среде. С помощью традиционного «коэффициентного усреднения» удаётся, как правило, весьма приближенно, с «инженерной» точностью описать деформации неоднородной среды под действием внешней нагрузки или сделать оценки. Более точным «коэффициентным» методом является метод эквивалентной гомогенности при удачном подборе характеристик составляющих композитной среды. Эти коэффициенты могут быть найдены либо экспериментальным путём, либо численным моделированием, либо аналитически.

Экспериментально механические свойства скальных пород определяются нагружением образцов (лабораторные опыты), целиков (штамповые испытания) или как-либо иначе, например, методом напорных камер – по заданным траекториям с описанием результатов испытаний с помощью выбранной модели механики сплошной среды. То есть, фактически, реальная порода заменяется эквивалентным ей (по поведению под нагрузкой) сплошным однородным телом, в котором особенности проявления строения образца (загруженной области массива) как бы статистически усредняются («размазываются») по всему объёму. В механике композитных материалов определённые таким образом характеристики рассматриваются как эффективные, учитывающие в обобщённом виде все особенности состава, строения и состояния испытываемого образца (участка массива), различные механические свойства его компонент, неоднородность полей напряжений и деформаций, вызванных как неоднородным, так и дискретным строением материала.

Распространение полученных характеристик на весь массив (или часть массива, например, слой) скальной породы производится с помощью статистической обработки результатов необходимого количества испытаний. При этом предполагается, что среднестатистический образец является представительным по отношению к объёму изучаемого массива. Тем самым массив скальных пород рассматривается как периодическая среда, составленная из таких образцов (выделенных объёмов загружения массива). Статистическая обработка результатов нескольких испытаний усредняет неоднородность распределения, полученную в этих испытаниях в пределах массива.

Хотя такой подход и является стандартным, в нём содержится «фундаментальная» неопределённость, связанная с понятием представительного объёма образца (вовлекаемого в работу объёма пород массива) и условиями усреднения полей напряжений и деформаций. Рассматривая скальную породу как гетерогенную композитную среду в соответствии с принципом эквивалентной гомогенности [Кристенсен Р., 1982], в ней можно выделить характерный размер неоднородности *l*. Строго говоря, это уже само по себе

---

* Термин «эффективные» является более корректным синонимом термина «средние». Формулировка понятия «эффективное свойство» включает условия, при которых проводится усреднение (близость к точным значениям деформаций, напряжений или энергии).

является более или менее грубой идеализацией, требующей статистического описания реального грунта. Очевидно, должен иметь место некоторый масштаб длины $\delta >> l$, в пределах которого свойства гетерогенной среды можно усреднить некоторым осмысленным образом. Тогда масштаб длины усреднения δ может рассматриваться как характерный размер представительного образца (представительного объёма грунта). В свою очередь, характерный размер тела L (расчётная область массива грунта), напряжённо-деформированное состояние которого исследуется методами механики сплошной среды, должен быть много больше масштаба длины усреднения ($L >> \delta$). Таким образом, условия применимости методов механики сплошной среды к описанию напряжённо-деформированного состояния массива породы могут быть записаны в виде $l << \delta << L$.

Несмотря на кажущуюся простоту приведённых рассуждений, строгое определение этих величин для реальных грунтов вряд ли возможно. Считается, что для песчаных и особенно мелкодисперсных пылевато-глинистых грунтов с характерными размерами частиц 0,5 – 0,005 мм стандартные образцы размерами 5 – 10 см, используемые в лабораторных опытах, являются представительными, а для решения инженерных задач с расчётной областью грунта, измеряемой десятками сантиметров и метрами, использование механики сплошной среды справедливым. Однако имеется большое количество видов масштабно-неоднородных пород (крупнообломочные, валунно-глыбовые отложения, каменная наброска, слоистые и трещиноватые скальные породы, армированные грунты и т.п.), для которых размеры представительного объёма образца превышают десятки и сотни сантиметров. Создание лабораторных установок для корректного испытания образцов таких пород технически трудноосуществимо, а отбор образцов ненарушенной структуры практически невозможен. В полевых крупномасштабных опытах, как правило, не удаётся обеспечить однородность напряжённого или деформированного состояния испытываемого объёма массива, да и сами эти опыты очень дорогие.

В то же время, неоднородность напряжённого или деформированного состояния и условия усреднения напряжений и деформаций в пределах испытываемого образца (выделенного объёма) грунта оказывают существенное влияние на результаты испытаний. Не касаясь здесь технических сложностей, связанных с созданием однородных полей деформаций или напряжений при нагружении, отметим лишь, что представительному размеру должен соответствовать не только образец (испытываемый объём), но и база, на которой измеряются напряжения или перемещения. Кроме того, часто встречающаяся природная анизотропия строения и свойств реальных пород в пределах представительного объёма может приводить к заметным расхождениям измеряемых величин. Это, в частности, является одной из причин значительного разброса характеристик, определяемых для серии образцов-близнецов.

Особенно большие погрешности возникают в тех случаях, когда база измерения оказывается меньше представительного объёма. Причём чем меньше этот размер, тем большей является погрешность, а полученные таким образом характеристики могут отличаться в обе стороны от действительных.

Поэтому на практике обычно прибегают к заведомому преуменьшению характеристик механических свойств масштабно неоднородных грунтов, относя это «в запас прочности». Так, например, в СНиП 2.02.01-83 [Основания зданий и сооружений] указано: «Если содержание заполнителя превышает 40%, значение расчётного сопротивления для крупномасштабного грунта допускается определять по характеристикам заполнителя». Рекомендации по назначению деформационных характеристик не приводятся, однако и они, как правило, назначаются по заполнителю. Такой подход может привести к значительному занижению характеристик грунтов по сравнению с действительными, что, в свою очередь, оказывает существенное влияние на экономичность принимаемых инженерных решений.

Численное моделирование экспериментов по определению механических параметров обладает почти всеми недостатками натурных и лабораторных экспериментальных исследований. Однако отметим очень важную положительную сторону численных экспериментов: они много дешевле натурных и в них, в принципе, можно испытать представительный объём породы.

Итак, все рассмотренные способы определения механических характеристик требуют привлечения дополнительных предположений и гипотез, а также ограничений, которые часто в действительности не выполняются. Всё это приводит к сужению области применимости модели либо вступает с ней в противоречие. Сужение области применимости модели также может привести к противоречию с решаемой задачей.

Обобщая сказанное, можно утверждать, что вышеуказанные методы основываются на «принципе образца» [Вакуленко А.А., 1991], или по А.А.Ильюшину [Ильюшин А.А., 1978] – «принципе макроопределимости». Этот принцип состоит в том, что связи между основными переменными, обнаруживаемые в опытах (или математических экспериментах) с макрооднородной деформацией образцов (типовых структур), трактуются затем как локальные свойства сплошной модели тела при произвольной (необязательно однородной) деформации. Иначе говоря, сглаживая подходящим образом модель исследуемого тела с микроструктурой, получают модель тела в виде сплошной среды. При этом предполагается, что в каждом состоянии тела занимаемой им области можно сопоставить поле деформации, которое после сглаживания можно считать достаточно близким к однородному, за исключением, быть может, точек, близких к границе. Это условие и позволяет рассматривать характеристики образца, испытывающего однородную деформацию, в качестве характеристик в точках сглаженной модели.

Тем не менее условие близости к однородному деформированному (или напряжённому) состоянию не выполняется уже при рассмотрении композитов с периодической структурой и возникает сильное несоответствие эффективных свойств, определённых с учётом и без учёта неравномерности деформаций. Это принципиальный недостаток «принципа образца», так как даже при прецизионных измерениях полученные на образцах характеристики, используемые затем как локальные, обеспечивают только близость перемещений у образца и натуры, но не обеспечивают близость их производных, а следовательно, деформаций и напряжений.

Заметим, что для упругопластических сред это должно проявляться ещё сильнее, так как всякая упругопластическая среда является сглаженной моделью тела со сплошной и резко неоднородной структурой. Вместе с тем в пластических зонах, например у концов трещин, условия достаточной близости к однородному полю деформаций нарушаются. Это сильно снижает ценность сложных моделей упругопластической среды, построенных с использованием «принципа образца». К тому же ни один из рассмотренных подходов не даёт ответ на вопрос о точности получаемых результатов, что на самом деле играет важную роль.

Многих из указанных недостатков лишён подход, основанный на методе асимптотического усреднения дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами. Он позволяет провести гомогенизацию композита в более сложных условиях, когда в эквивалентной среде деформация неоднородна. Данный метод позволяет определить эффективные характеристики механических свойств неоднородного материала по значениям механических характеристик его составляющих.

Существо такого подхода заключается в следующем. В изучаемом массиве методами инженерной геологии выделяются некоторые «типовые структуры» (ячейки периодичности). Типовые структуры могут быть составлены на основе анализа фотографий и гранулометрического состава – для крупнообломочных грунтов, съёмки и описания сетей трещин – для трещиноватых скальных пород. Считается, что массив «составлен» из таких типовых структур. Свойства отдельных элементов композиции типовых структур изучаются стандартными методами.

Таким образом, исследуемая область скальной породы представляется в идеализированном виде периодической системы с известными характеристиками свойств отдельных компонентов. Однако достоинством асимптотического метода усреднения является то, что в отличие от, например, методов усреднения, основанных на гипотезе эквивалентной гомогенности, усреднение может проводиться для любого объёма, никак не связанного с его представительным элементом. Такая ситуация часто имеет место в трещиноватых скальных породах, когда в пределах ячейки периодичности число характерных элементов неоднородности недостаточно велико, т.е. не выполняется одно из условий гипотезы эквивалентной гомогенности $l \ll \delta$, где в качестве масштаба длины усреднения δ рассматривается размер типового элемента структуры. Эффективные характеристики механических свойств полностью определяются методом асимптотического усреднения на типовой структуре и автоматически учитывают их анизотропию.

В настоящее время численный метод расчёта дискретных сред (метод дискретных элементов), предложенный П.А. Кюндаллом и разрабатываемый П.А. Кюндаллом, Р.Д. Хартом и др. [Харт Р.Д., Кюндалл П.А., 1992], очень перспективен, но допускает использование только в очень хорошо описанной области. Иначе даже малое отклонение от истинных значений может привести к совершенно иным результатам, нежели в действительности [Буч Г., 1992]. Это находит своё подтверждение в работах А.Н. Гузя [Guz A.N., 2003; 2004] и Э.Г. Газиева [Газиев Э.Г., 1977].

Итак, неоднородность состава скальных пород приводит к тому, что эффективные характеристики, как правило, существенно отличаются от характеристик отдельных компонентов. Помимо состава и свойств отдельных компонентов, механические характеристики пород определяются пространственной структурой, которую они образуют.

Массивам скальных пород в большой мере присущ масштабный эффект: характеристики породы, определенные при различных масштабах испытания (в образце и массиве), могут существенно различаться. Так как в настоящее время не существует надёжных методов перенесения результатов лабораторных испытаний на большие объёмы, то для проектирования крупных сооружений (плотин, горных выработок большого сечения, высоких откосов и т.п.) характеристики механических свойств определяют в массиве, исследуя для этого большие объёмы породы. Однако определение этих характеристик в натурных условиях весьма дорогостоящее, трудоёмкое, требует специальных технических средств и специальной организации работ. Причём существующие способы получения данных о деформационных и прочностных свойствах редко позволяют охватить всю область скального основания и все возможные условия его работы. Кроме того, в экспериментальных установках практически невозможно получить однородное напряжённое состояние. Таким образом, результаты экспериментов не всегда удовлетворяют инженеров-изыскателей и проектировщиков как с принципиальной, так и с экономической точки зрения. Это – трудности механики скальных пород, которые имеют много общего с механикой грунтов и о которых очень точно сказано Ю.К. Зарецким: «Инженеры, проектирующие бетонные, железобетонные и металлические конструкции, как правило, уверены в своих решениях, и только тогда, когда необходимо учесть взаимодействие этих конструкций с грунтом, они сталкиваются с большой неопределённостью, эмпирикой и принимаемые ими решения почти всегда оставляют чувство неопределенности, а иногда и тревоги» [Зарецкий Ю.К., 1982].

Решения теоретических задач о напряжённо-деформированном состоянии скальных пород в точной постановке как граничных задач механики сплошной среды сопряжены с непреодолимыми трудностями. Например, необходимо учитывать «односторонние», неидеальные связи трещин. В зоне трещин, помимо действия сил трения и сцепления, возможны склеивание, «сваривание», диффузия материала, заполняющего трещины, и другие, мало изученные процессы.

Использование «ранних» (традиционных) принципов усреднения позволяет получать относительно простые оценки механических характеристик массивов скальных пород. В рамках этих принципов редко удаётся получить значения эффективных характеристик с точностью, достаточной для практического применения. Поэтому наряду с проведением экспериментов всегда существовала и существует необходимость совершенствовать теоретические модели деформируемости и прочности, а вместе с тем – аналитические и численно-аналитические методы определения механических свойств.

В главе 1 монографии используется «коэффициентное усреднение». Представлена математическая модель массива скальной породы с уравнениями состояния анизотропного упругого тела. Рассмотрен один частный подход к определению деформационных свойств трещиноватых скальных пород, следующий из принципа эквивалентной гомогенности и основанный на понятии тензора плотности трещин.

Стремление использовать аппарат механики сплошной среды в механике скальных пород привело авторов к разработке моделей, которые в отсутствие структуры отражают особенности реальной породы: локальные концентрации напряжений и деформаций. Разработаны аналитические методы определения эффективных характеристик деформируемости скальных пород на основе метода асимтотического усреднения. Получены эффективные характеристики деформируемости слоистых скальных пород; пород, рассечённых системой плоскопараллельных трещин, и пород, рассечённых несколькими системами плоскопараллельных трещин (гл. 2 и 3).

В механике разрушения важную роль играют коэффициенты интенсивности напряжений, соответствующие трещинам продольного и поперечного сдвига и трещинам отрыва. Эти коэффициенты, характеризующие напряжённое состояние в окрестности вершин трещин, однако, не описывают неоднородность напряжений в случаях систем трещин и слоистости. Введены понятия тензоров концентрации напряжений и деформаций (гл. 4), которые, в частности, позволяют учитывать неоднородность напряжённо-деформированного состояния, вызванного системами трещин и/или слоистостью. Разработаны модели нелинейно-упругого и упругопластического поведения массивов скальных пород, аналитические и численно-аналитические методы определения эффективных характеристик прочности. Проведено теоретическое исследование характеристик деформируемости и прочностных свойств. Сделано обобщение закона Кулона для анизотропных и неоднородных сред (гл. 5). Даны примеры использования полученных теоретических результатов в решениях прикладных задач о напряжённо-деформированном состоянии и прочности оснований зданий и сооружений, а также устойчивости откосов (гл. 6).

Глава 1. СКАЛЬНЫЙ МАССИВ КАК АНИЗОТРОПНОЕ УПРУГОЕ ТЕЛО

1.1. АНИЗОТРОПНОЕ ТЕЛО С МОНОКЛИННОЙ СИММЕТРИЕЙ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ

Магматические, осадочные и метаморфические породы имеют, как правило, ориентированную текстуру. Основными причинами образования ориентированной текстуры являются движение горных пород (тектоническое истечние), неравномерность осаждения, системное трещинообразование [Пэк А.В., 1939]. Сформированные таким образом складчатые системы по простиранию имеют значительно меньшие изменения, чем в поперечном разрезе («вкрест простирания»), и имеют явно выраженный моноклинный тип симметрии текстуры. Плоскость поперечного разреза является плоскостью симметрии. Таким образом, природная среда во многих случаях представляет собой среду анизотропную.

Распространение закона Гука на тела, локальные свойства которых зависят от направления, приводит к различным формам зависимости деформаций от напряжений (уравнениям связи), соответствующим различным типам симметрии свойств (анизотропии) [Лехницкий С.Г., 1977]. Уравнения связи отличаются количеством упругих постоянных. Число упругих постоянных в уравнениях связи мы называем полной, если учитывается влияние всех компонент тензора напряжений, ни одна из которых не равна нулю. Ниже указано минимальное полное число упругих постоянных для каждого типа симметрии в естественных системах координат, связанных с плоскостями или осями упругой симметрии.

В механике скальных пород известны и используются модели анизотропных тел гексагональной симметрии (трансверсально-изотропное тело, имеющее плоскость изотропии или ось упругой симметрии вращения, – характеризуется пятью упругими постоянными) и ромбической симметрии (ортотропное тело, имеющее три плоскости упругой симметрии, – характеризуется девятью упругими постоянными).

Тело моноклинной симметрии имеет одну плоскость упругой симметрии, соответствующие уравнения связи содержат 13 упругих постоянных. Тело триклинной симметрии вовсе не имеет элементов симметрии и занимает самый низкий уровень в иерархии. Соответствующие уравнения связи содержат 21 упругую постоянную (в физической системе координат – 18 [Новожилов В.В., 1958]). В дальнейшем используются прямоугольные декартовы координаты.

В произвольных системах координат число упругих постоянных может быть больше. Например, ортотропное тело характеризуется в системе координат общего расположения 13 упругими постоянными. Оси координат, в которых уравнения связи для каждого типа симметрии содержат минимальное полное число упругих постоянных, определяют главные направления упругости.

Закон Гука для анизотропного тела записывается в виде системы уравнений

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,,\ \ i, j, k, l = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

где ε_{ij} и σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций и напряжений соответственно, которые являются симметрическими тензорами второго ранга; a_{ijkl} – компоненты тензора податливости (тензора четвёртого ранга, симметричного по индексам первой и второй пар), называемые также упругими постоянными или коэффициентами влияния (по терминологии [Лехницкий С.Г., 1977]). Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Перепишем систему (1.1) для тела моноклинной симметрии в развернутом виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22} + a_{1133}\sigma_{33} + 2a_{1112}\sigma_{12};\\
\varepsilon_{22} &= a_{2211}\sigma_{11} + a_{2222}\sigma_{22} + a_{2233}\sigma_{33} + 2a_{2212}\sigma_{12};\\
\varepsilon_{33} &= a_{3311}\sigma_{11} + a_{3322}\sigma_{22} + a_{3333}\sigma_{33} + 2a_{3312}\sigma_{12};\\
\varepsilon_{23} &= 2a_{2323}\sigma_{23} + 2a_{2313}\sigma_{13};\\
\varepsilon_{13} &= 2a_{1323}\sigma_{23} + 2a_{1313}\sigma_{13};\\
\varepsilon_{12} &= a_{1211}\sigma_{11} + a_{1222}\sigma_{22} + a_{1233}\sigma_{33} + 2a_{1212}\sigma_{12}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

В практических целях для удобства вычислений при преобразовании координат, тензор четвёртого ранга с компонентами a_{ijkl}, симметрический по индексам первой и второй пар в трёхмерном пространстве, можно представить в форме симметрического тензора второго ранга в шестимерном пространстве. В таком пространстве тензоры напряжений и деформаций (тензоры второго ранга в трёхмерном пространстве) представляются в форме шестимерных векторов. Воспользуемся следующим правилом замены индексов, где тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями: 11→1, 22→2, 33→3, 23 и 32→4, 13 и 31→5, 12 и 21→6. Тогда система уравнений (1.2) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2 + a_{13}\sigma_3 + a_{16}\sigma_6;\\
\varepsilon_2 &= a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2 + a_{23}\sigma_3 + a_{26}\sigma_6;\\
\varepsilon_3 &= a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{33}\sigma_3 + a_{36}\sigma_6;\\
\varepsilon_4 &= a_{44}\sigma_4 + a_{45}\sigma_5;\\
\varepsilon_5 &= a_{45}\sigma_4 + a_{55}\sigma_5;\\
\varepsilon_6 &= a_{16}\sigma_1 + a_{26}\sigma_2 + a_{36}\sigma_3 + a_{66}\sigma_6.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Используя технические обозначения напряжений и деформаций, приведём систему (1.3) к виду

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy};\\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy};\\
\varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy};\\
\gamma_{yz} &= 2(a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz});\\
\gamma_{xz} &= 2(a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz});\\
\gamma_{xy} &= 2(a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy}).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь предполагается, что ось «x» направлена горизонтально, ось «y» – вертикально, ось «z» – вдоль простирания.

Используя технические обозначения компонентов тензоров деформаций и напряжений, а также коэффициентов влияния напряжений на деформации, представим уравнения закона Гука для анизотропного тела с моноклинной симметрией в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x}\left(\sigma_x - \nu_{yx}\sigma_y - \nu_{zx}\sigma_z + \eta_{xy,x}\tau_{xy}\right);\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E_y}\left(-\nu_{xy}\sigma_x + \sigma_y - \nu_{zy}\sigma_z + \eta_{xy,y}\tau_{xy}\right);\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E_z}\left(-\nu_{xz}\sigma_x - \nu_{yz}\sigma_y + \sigma_z + \eta_{xy,z}\tau_{xy}\right);\\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}}\left(\tau_{yz} + \mu_{xz,yz}\tau_{xz}\right);\\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{xz}}\left(\mu_{yz,xz}\tau_{yz} + \tau_{xz}\right);\\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}}\left(\eta_{x,xy}\sigma_x + \eta_{y,xy}\sigma_y + \eta_{z,xy}\sigma_z + \tau_{xy}\right).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Вследствие симметрии тензора упругости имеют место семь равенств

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu_{yx}}{E_x} = \frac{\nu_{xy}}{E_y}, \frac{\nu_{zx}}{E_x} = \frac{\nu_{xz}}{E_z}, \frac{\nu_{zy}}{E_y} = \frac{\nu_{yz}}{E_z};\\
&\frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}}, \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}}, \frac{\eta_{xy,z}}{E_z} = \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}};\\
&\frac{\mu_{xz,yz}}{G_{yz}} = \frac{\mu_{yz,xz}}{G_{xz}}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Отметим три важных свойства среды, отражаемых моделью анизотропного тела (1.5).

1. Пусть x' и y' – главные оси деформаций в плоскости упругой симметрии. Обозначим ω_ε – угол между осями x' и x (и соответственно – между осями y' и y). Пользуясь правилом преобразования компонентов тензора

второго ранга при повороте осей координат на угол ω_ε вокруг оси z, получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_x &= \varepsilon_x \cos^2\omega_\varepsilon + \gamma_{xy}\cos\omega_\varepsilon \sin\omega_\varepsilon + \varepsilon_y \sin^2\omega_\varepsilon;\\
\varepsilon'_y &= \varepsilon_x \sin^2\omega_\varepsilon - \gamma_{xy}\cos\omega_\varepsilon \sin\omega_\varepsilon + \varepsilon_y \sin^2\omega_\varepsilon;\\
\gamma'_{xy} &= \left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right)\sin 2\omega_\varepsilon + \gamma_{xy}\cos 2\omega_\varepsilon = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Из последнего равенства (1.7) следует:

$$tg 2\omega_\varepsilon = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \tag{1.8}$$

Аналогично, для главных напряжений будем иметь

$$tg 2\omega_\sigma = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{1.9}$$

Если $\omega_\varepsilon = \omega_\sigma$, то тензоры деформаций и напряжений называют соосными. Если $\omega_\varepsilon \neq \omega_\sigma$, то угол между главными трёхгранниками напряжений и деформаций равен $\omega = \omega_\varepsilon - \omega_\sigma$. Можно дать другое определение соосности: два симметричных тензора второго ранга a_{ij} и b_{ij} называются соосными, если их матрицы имеют диагональный вид в некоторой одной и той же системе координат. Пусть A и B – матрицы тензоров a_{ij} и b_{ij} в произвольной системе координат. Можно доказать [Беллман Р., 1969], что симметричные тензоры a_{ij} и b_{ij} соосны тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутативны: $AB = BA$.

Пусть в частном случае напряжённого состояния отлична от нуля только одна компонента тензора напряжений σ_y. Переписывая для этого случая систему (1.5), получим:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu_{yx}}{E_x}\sigma_y;\;\; \varepsilon_y = \frac{1}{E_y}\sigma_y;\;\; \varepsilon_z = -\frac{\nu_{yz}}{E_z}\sigma_y;\;\; \gamma_{xy} = \frac{\eta_{xy,y}}{E_y}\sigma_y. \tag{1.10}$$

Очевидно, что матрица тензора деформаций

$$A = \sigma_y \begin{pmatrix} -\nu_{yx}/E_x & \eta_{xy,y}/2E_y & 0 \\ \eta_{xy,y}/2E_y & 1/E_y & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{zy}/E_y \end{pmatrix}$$

и матрица тензора напряжений

$$B = \sigma_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

некоммутативны и, следовательно, тензоры деформаций и напряжений несоосны. Таким образом, сформулированное предложение является удобным практическим правилом проверки соосности-несоосности тензоров деформаций и напряжений.

В этом примере угол между главными трёхгранниками деформаций и напряжений не зависит от величины напряжения σ_y и его нетрудно вычислить непосредственно. Подставляя (1.10) в (1.8) и (1.9), найдём

$$\omega_\varepsilon = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{\eta_{xy,y} E_x}{E_x + \nu_{yx} E_y} \right); \qquad (1.11)$$
$$\omega_\sigma = 0.$$

Несоосность тензоров напряжений и деформаций является *первой особенностью* упругих тел с моноклинной симметрией свойств по отношению к телам более высокого уровня симметрии. В общем случае выражение для углов ω зависит от величины напряжений и от ориентации главных напряжений по отношению к главным направлениям упругости. Однако с помощью формул (1.8), (1.9) и (1.5) угол между главными трёхгранниками деформаций и напряжений всегда можно вычислить.

2. Пусть отлична от нуля только одна компонента напряжений τ_{xy}. Переписывая для этого случая систему (1.5), получим:

$$\varepsilon_x = \frac{\eta_{xy,x}}{E_x}\tau_{xy};\ \varepsilon_y = \frac{\eta_{xy,y}}{E_y}\tau_{xy};\ \varepsilon_z = \frac{\eta_{xy,z}}{E_z}\tau_{xy};\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}. \qquad (1.12)$$

Очевидно, что матрица тензора деформаций

$$A = \tau_{xy} \begin{pmatrix} \eta_{xy,x}/E_x & 1/2G_{xy} & 0 \\ 1/2G_{xy} & \eta_{xy,y}/E_y & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{xy,z}/E_z \end{pmatrix}$$

и матрица тензора напряжений

$$B = \tau_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Научное издание

Александр Николаевич **ВЛАСОВ**

Владимир Павлович **МЕРЗЛЯКОВ**

УСРЕДНЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ В МЕХАНИКЕ СКАЛЬНЫХ ПОРОД

Компьютерная верстка: *А.Н. Власов, В.П. Мерзляков*

Редактор: *Г.М.Мубаракшина*

Дизайн обложки: *Н.С. Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98.
Подписано к печати 20.06.09. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. 13 п.л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – КМК, оф. 348
тел., факс: (499)183-56-83, e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru/