

**В.К. Ахметов    В.Я. Шкадов**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЯЗКИХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ  
ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ  
ПРИЛОЖЕНИЙ**



**Библиотека научных проектов  
и разработок МГСУ**

**В.К. Ахметов, В.Я. Шкадов**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЯЗКИХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ  
ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ**



МГСУ  
Издательство Ассоциации строительных вузов  
Москва  
2009

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова *Н.Н. Смирнов*;

доктор технических наук, начальник отдела численных гидравлических исследований ОАО «НИИ Энергетических сооружений» *В.В. Беликов*.

**Ахметов В.К., Шкадов В.Я.**

Численное моделирование вязких вихревых течений для технических приложений: Монография. - М: Издательство АСВ, 2009, - 176 с.: ил.

ISBN 978-5-93093-667-4

В монографии представлены постановки задач, методы решения и результаты теоретических исследований структуры и гидродинамической устойчивости закрученных потоков. Изучение конкретных течений проводится численно на основе системы уравнений Навье–Стокса.

Предполагается, что читатель знаком с основами гидромеханики и вычислительных методов.

Для научных и инженерно-технических работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Рекомендовано Научно-техническим Советом МГСУ

© Ахметов В.К., Шкадов В.Я., 2009

© МГСУ, 2009

ISBN 978-5-93093-667-4

© Оформление, Издательство АСВ, 2009

---

Научное издание

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКИХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ  
ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ**

Вадим Каюмович **Ахметов**  
Виктор Яковлевич **Шкадов**

Редактор: *Г.М. Мубаракишина*; Дизайн обложки: *Н.С. Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Подписано к печати 15.05.09. Формат 70х100/16.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. 11 п.л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)  
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – КМК, оф. 348  
тел., факс: (499)183-56-83, e-mail: [iasv@mgsu.ru](mailto:iasv@mgsu.ru), <http://www.iasv.ru/>

Вихревые движения характеризуются чрезвычайным разнообразием. В природе – это смерчи, торнадо, воронки. В технических приложениях вихревые течения используются в двигателях, турбинах, промышленных печах, топках и котлах, устройствах для распыления, струйных насосах, теплообменных аппаратах, сепараторах, химических реакторах и т.д. Вихри, сходящие с передней и задней кромок летательных аппаратов, представляют большой интерес с точки зрения аэродинамики.

Широкое применение вихревые течения получили в гидротехническом строительстве (отсасывающие трубы гидротурбин, вихревые водосбросы, контрвихревые гасители энергии, контрвихревые азраторы) и теплоэнергетическом строительстве (ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы, комбинированные высотные сооружения современных ТЭЦ).

В инженерной практике и большинстве теоретических исследований для вращательно-поступательного движения жидкости (или газа) используют термин «закрученный поток», который и будет в основном использоваться в данной работе.

На протяжении последних десятилетий активно ведутся всесторонние исследования закрученных потоков. Среди отечественных и зарубежных исследователей, внесших заметный вклад в становление, применение и развитие современных теоретических и экспериментальных методов изучения закрученных потоков, ни в коей мере не претендуя на полноту списка, следует отметить Г.Н. Абрамовича, С.В. Алексеенко, Р.Б. Ахмедова, Э.П. Волчкова, А.С. Гиневского, М.А. Гольдштика, Ф.Т. Каменьщикова, С.С. Кутателадзе, П.А. Куйбина, А.П. Меркулова, В.Л. Окулова, В.И. Терехова, Б.П. Устименко, А.А. Халатова, Н.В. Ханова, В.К. Щукина, А.К. Гупту, С. Лейбовича, Д.Г. Лилли, Н. Сайреда, М.Р. Эскудые.

В Московском государственном строительном университете (МГСУ) исследования закрученных потоков активно проводятся на факультете гидротехнического и специального строительства на кафедрах использования водной энергии, гидравлики, гидротехнического строительства, а также в научно-исследовательской лаборатории закрученных потоков. Значительный вклад в разработку и внедрение различного рода вихревых устройств в области гидротехники и гидроэнергетики внесли В.В. Волшаник, М.Ф. Губин, Ф.Ф. Губин, Б.А. Животовский, А.Л. Зуйков, В.В. Казеннов, В.Я. Карелин, Г.И. Кривченко, А.П. Мордасов, Г.В. Орехов, С.С. Слиский.

Настоящая монография посвящена математическому моделированию вязких вихревых течений и их устойчивости. Исследования гидродинамики течений проводятся на основе использования полной системы уравнений Навье–Стокса. Поставленные начальные и начальнo-краевые задачи решаются численно.

Первая глава посвящена обзору работ по исследованиям закрученных течений. Проанализированы современные направления применения закрученных потоков для различных технических приложений и задач строи-

тельства, из которых выделены следующие: создание эффективных установок по сжиганию пылевидного топлива для современных ТЭЦ; разработка контрвихревых гасителей энергии в гидротехническом строительстве и контрвихревых аэраторов в задачах инженерной экологии; оптимизация работы газотурбинных двигателей за счет использования закрутки потока в камерах сгорания; разработка и проектирование устройств циклонного типа для очистки газа от пыли, сепарации частиц, разделения жидких смесей, например, для очистки добываемой нефти, а также вихревых форсунок для распыления жидкостей; использование эффекта Ранка–Хилша в вихревых трубах для температурного разделения потоков.

Вторая глава посвящена численному исследованию закрученных течений на основе решения полной системы уравнений Навье–Стокса в осесимметричном канале (в том числе с проницаемыми стенками), неограниченной среде, в модельной вихревой камере при коаксиальной закрутке потоков, в случае взаимодействия струи с кольцевым закрученным потоком. Продемонстрирована возможность использования применяемого метода расчета ламинарных закрученных течений для моделирования турбулентных закрученных течений путем перехода к эффективным значениям определяющих параметров.

Третья глава посвящена исследованию устойчивости закрученных течений. Рассматривается эффективный численный метод решения спектральной задачи устойчивости закрученных течений по отношению к неосесимметричным возмущениям. Численно исследован спектр собственных значений задачи об устойчивости свободного вихря с профилями скорости, полученными из автомодельного решения Бэтчелора. Проведены исследования устойчивости внутренних модельных течений с закруткой в осесимметричном канале.

Исследована задача о нормальных модах колебаний, развивающихся на фоне плоскопараллельного течения, определяемого рассчитанными профилями скорости в локальных поперечных сечениях потока. Показано, что существуют два механизма неустойчивости. Первый связан с влиянием закрутки потока, второй – с образованием зон возвратного течения.

Четвертая глава посвящена численному исследованию двухфазных закрученных потоков с зонами рециркуляции. Рассмотрены задачи распыления порошка и разделения частиц по размерам закрученным потоком, исследованы закрученные течения в прямоточном пылеотделителе.

Пятая глава посвящена исследованию струйных течений неоднородных жидкостей. На основе метода интегральных соотношений решена задача о распространении аэрированной затопленной струи, содержащей равномерно распределенные пузырьки воздуха. Данная задача актуальна в связи с разработкой эффективных систем струйной аэрации для обогащения кислородом малопроточных водоемов, прудов рыбоводных хозяйств, со строительством прудов-охладителей ТЭС, прудов-накопителей при химических производствах. Решение задачи определяется численным интегри-

рованием системы уравнений баланса массы, импульса и сил межфазного взаимодействия.

Исследована задача смешения турбулентных нагретых газов в осесимметричном канале с произвольной формой боковой поверхности и предварительной закруткой потока. Данная проблема актуальна в связи с разработкой экологически чистой технологии сжигания природного топлива в современных ТЭЦ. Рассчитаны поля течений, распределения температур и концентраций в вытяжной трубе комбинированного высотного сооружения.

В шестой главе приведены вычислительные алгоритмы, которые применяются для решения полной системы уравнений Навье–Стокса и исследований устойчивости закрученных течений методом нормальных мод. Рассмотрен прямой метод неполной редукции для решения уравнения Пуассона относительно функции тока, конечно-разностный метод решения уравнений переноса с аппроксимацией конвективных членов с применением модифицированной схемы Леонарда. Для задачи нахождения собственных значений рассмотрен метод Фробениуса, позволяющий получить асимптотические решения в окрестности особых точек в виде степенных рядов.

Авторы благодарны рецензентам книги, профессору д.ф.-м.н. Н.Н. Смирнову (механико-математический факультет МГУ им М.В. Ломоносова) и д.т.н. В.В. Беликову (научно-исследовательский институт энергетических сооружений (ОАО НИИЭС) за проявленный интерес и доброе отношение к работе.

Авторы выражают благодарность коллективам кафедр использования водной энергии, гидравлики, информатики и прикладной математики (МГСУ), аэромеханики и газовой динамики (механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова) за активное обсуждение и полезные замечания.

Авторы также благодарят сотрудников издательства Международной ассоциации строительных высших учебных заведений (Издательство АСВ) и лично генерального директора издательства Н.С. Никитину за помощь к подготовке книги к изданию.

В книгу вошли результаты, полученные при поддержке грантов РФФИ № 94-01-01637, 97-01-00153, 00-01-00645, 03-01-00042, 06-01-00778, 09-01-00595.

## РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ

### § 1.1. Закрученные потоки в инженерной практике

Применение закрученных потоков в задачах строительства и инженерной практике чрезвычайно разнообразно. Из всего спектра проблем выделим следующие направления.

В связи с возрастающими потребностями в электроэнергии в нашей стране возникает необходимость в строительстве мощных тепловых электростанций (ТЭЦ). В качестве топлива планируется использовать бурый уголь. Этот уголь низкосортный, и при его сжигании возникает множество проблем, в частности интенсивное шлакование поверхностей нагрева, большой выброс вредных и токсичных веществ в атмосферу, огромное количество отходов. Поэтому актуальной задачей является создание промышленных камерных топков, где уголь сжигается в пылевидном состоянии (размер частиц  $\sim 100$  мкм). Обзор по принципиальным конструкциям таких камер сгорания представлен в [2, 4]. Перспективным направлением в этой области является создание пылеугольных паровых котлов, в которых подача топлива осуществляется закрученными потоками. Процесс сжигания угля в камерах сгорания непосредственно связан с аэродинамикой течения. Поэтому моделирование процессов тепло- и массообмена в таких установках имеет чрезвычайно важное значение.

Широкое применение закрученные течения имеют в гидротехническом строительстве [33, 34, 40]. В отсасывающих трубах гидротурбин формируется турбулентный закрученный поток. В современных гидроэлектростанциях активно эксплуатируются водосбросы с закрученными потоками (вихревые водосбросы). Коаксиальные потоки, закрученные в противоположных направлениях, используются для гашения энергии в высокоскоростном потоке воды (контрвихревые гасители энергии).

Одна из отличительных особенностей закрученных течений в задачах, связанных с гидротехническими приложениями, заключается в разрыве сплошности в приосевой области потока. В результате этого в центральной части течения образуется полость, свободная от жидкости и заполненная парами жидкости и воздуха (паровоздушное ядро). Это свойство используется в контрвихревых аэраторах, разработанных в МГСУ [59]. Принцип действия такого аэратора основан на том, что из-за возникающего разрежения на оси течения внутрь потока засасывается воздух из атмосферы. В результате взаимодействия двух противоположно закрученных потоков жидкости воздух дробится на мелкие пузырьки и на выходе получается аэрированная осевая струя. Такие устройства успешно применяются для аэрации различных водоемов, водохранилищ и в очистных сооружениях.

В камерах сгорания газотурбинных двигателей рабочий процесс организован путем подачи топлива во внешний закрученный поток воздуха. Сильные центробежные эффекты во входной части камеры сгорания приводят к появлению областей с низким давлением и формированию приосевых тороидальных зон возвратных токов [39]. Форсунка распыления топлива располагается в центральной части закручивающего устройства. Поэтому в зоне возвратных токов образуется конический закрученный факел мелких капель топлива, благодаря которому обеспечивается высокая интенсивность горения.

Свойства закрученного потока используются во многих устройствах циклонного типа для очистки газа от пыли, сепарации частиц, разделения жидких смесей, например, для очистки добываемой нефти, в вихревых форсунках для распыления жидкостей, в сушильных камерах для удаления влаги из полидисперсных продуктов в химической, пищевой, строительной промышленности и в сельскохозяйственном производстве [52, 66, 67].

Широкий спектр применения имеют пленочные закрученные течения в нефтехимической, микробиологической и других отраслях промышленности для дистилляции и концентрирования жидкостей, удаления растворителей и летучих продуктов из жидкостей, санитарной очистке воздуха [78, 79]. Использование закрутки газового потока и жидкостной пленки во многих случаях позволяет улучшить характеристики пленочных аппаратов. Благодаря спиральному движению пленка равномерно растекается по всей поверхности, становится более устойчивой к срыву, увеличивается длина пути ее движения и время контакта фаз. В закрученном пленочном течении коэффициенты теплоотдачи увеличиваются в 2–3 раза, а коэффициенты массоотдачи в 3–4 раза по сравнению с осевым потоком.

Вихревые трубы (трубы Ранка–Хилша) служат для температурного разделения потоков [27, 51, 57, 64]. Принцип работы таких устройств заключается в том, что при движении закрученного потока газа вдоль трубы за счет действия центробежных сил происходит перераспределение энергии: приосевые слои течения охлаждаются, а периферийные нагреваются. Горячий газ выходит из трубы через узкий кольцевой канал, примыкающий к стенкам трубы, а холодный поток отбирается из центральной зоны. Основным недостатком вихревых энергоделителей является невысокая эффективность. Однако во многих технологических процессах возникает только периодическая потребность в получении холода. В этих случаях вихревые холодильные установки выигрывают по сравнению с фреоновыми.

Вихревые трубы могут эффективно использоваться в машиностроении для охлаждения резцов и сверл, в кондиционировании, для охлаждения различных растворов и электролитов в химической промышленности, ректификации воздуха на кислород и азот [72]. В некоторых случаях вихревые трубы применяются для нагрева газа, например, с их помощью удается улучшить характеристики паротурбинных установок при запуске из горячего состояния [75].



Закрученные течения часто встречаются и в природных явлениях. Это смерчи, торнадо, водяные воронки. Океанические вихри и атмосферные циклоны служат примерами макромасштабных закрученных течений [45]. В астрофизике механизм формирования спиральной структуры галактик связан с генерацией нелинейных локализованных возмущений типа вихрей Россби.

Исследования закрученных течений применительно к задачам строительства и разнообразным техническим приложениям интенсивно ведутся в последние годы как экспериментальными, так и теоретическими методами [23, 49, 83, 84]. Постановка физического эксперимента для моделирования конкретных задач часто оказывается трудоемкой и дорогостоящей. В связи с этим математическое моделирование закрученных течений является важнейшим инструментом исследований. С его помощью во многих случаях удается воспроизвести детальную картину исследуемых течений, рассчитать основные характеристики потока и на основе этого представить рекомендации по улучшению эффективности работы соответствующего устройства, уменьшению стоимости затрат на его производство или строительство, обеспечению наиболее грамотной технической эксплуатации, в том числе с наименьшим экологическим ущербом для окружающей среды.

## **§ 1.2. Экспериментальные исследования закрученных потоков**

Основная часть экспериментальных исследований закрученных течений проводилась в различного рода трубах и вихревых камерах. Для создания закрутки использовались завихрители потока. Их классификация представлена в [3, 58, 78], и условно они могут быть разделены на три группы.

К первой относятся завихрители, в которых потоку сообщается только окружная компонента скорости. При этом вектор скорости направлен по касательной к цилиндрической поверхности канала. Это завихрители тангенциального, улиточного и тангенциально-лопаточного типов. Наиболее распространенным завихрителем тангенциального типа является цилиндрический канал с тангенциальным патрубком. В качестве входного патрубка могут быть использованы: щель [104], круглое или прямоугольное сопла, несколько щелей [52] или сопел [87]. Завихрители улиточного типа применяются в вихревых трубах Ранка–Хилша [64].

В тангенциально-лопаточном завихрителе окружное направление потоку сообщается посредством круговой решетки лопаток с изменяемым углом наклона к радиальному направлению из центра камеры. Такие завихрители использовались в экспериментах [106, 111, 165, 166].

Ко второй группе относятся завихрители, в которых потоку одновременно сообщается вращательное и осевое движение. К ним относятся аксиально-лопаточные, шнековые и ленточные завихрители. В третью группу входят завихрители, которые позволяют проводить частичную закрутку потока (например, в пристенной или центральной области канала).

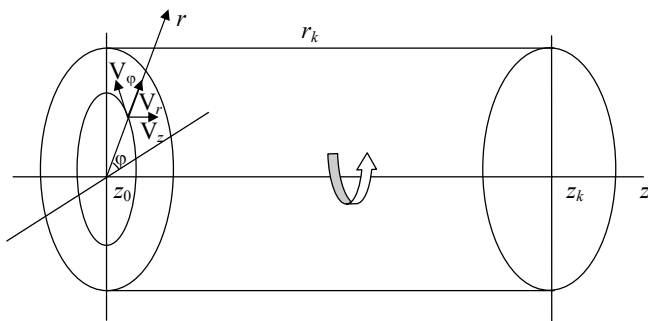


Рис. 1.1. Система координат

Основным безразмерным параметром для любого вязкого течения служит число Рейнольдса  $Re = UR/\nu$ , где  $U$ ,  $R$  – характерные скорость и линейный размер,  $\nu$  – кинематическая вязкость. Для характеристики степени вращения потока вводится дополнительный параметр. Его называют параметром закрутки. В экспериментальных исследованиях обычно пользуются интегральным параметром закрутки  $S$  [39, 78]:

$$S = \frac{F_{mm}}{F_m R}, \quad (1.1)$$

$$F_{mm} = \int_{\Sigma} (\rho V_z V_{\phi} + \rho \overline{V'_z V'_{\phi}}) r d\Sigma, \quad F_m = \int_{\Sigma} (\rho V_z^2 + \rho \overline{V'^2_z} + (p - p_{\infty})) d\Sigma.$$

Здесь  $F_{mm}$  – поток момента количества движения в осевом направлении с учетом вклада  $z$ – $\phi$  компоненты турбулентного сдвигового напряжения;  $F_m$  – поток количества движения в осевом направлении с учетом вклада турбулентного нормального напряжения и давления;  $\rho$  – плотность жидкости;  $p$  – давление;  $V_z$ ,  $V_{\phi}$  – осевая и азимутальная компоненты скорости в цилиндрической системе координат  $z$ ,  $r$ ,  $\phi$ ; штрих и черта означает пульсационные и осредненные характеристики соответственно.

Схема разложения скоростей в цилиндрической системе координат представлена на рис. 1.1.

Обычно давлением и турбулентными пульсациями пренебрегают и рассчитывают параметр закрутки  $S$  с упрощенным определением потоков:

$$F_{mm} = \int_{\Sigma} \rho V_z V_{\phi} r d\Sigma, \quad F_m = \int_{\Sigma} \rho V_z^2 d\Sigma.$$

Для технических приложений, рассмотренных в § 1.1, было проведено большое количество измерений различных характеристик закрученных потоков. Большинство из них носят гидравлический характер. В настоящем кратком обзоре остановимся на экспериментах, которые посвящены детальным исследованиям внутренней структуры закрученного потока.

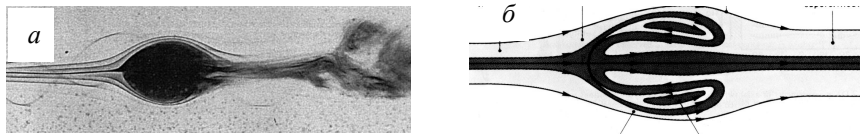


Рис. 1.2. Пузыревидный распад (*a*) и его двухъячеистая структура (*б*) (фото из работ [243], [152])

Закрутка оказывает значительное воздействие на все основные характеристики течения и может приводить к его кардинальной перестройке. При этом на оси течения или вблизи нее возможно возникновение критической точки (*stagnation point* – точки застоя) с нулевой скоростью, за которой формируется зона возвратного течения. Возникающая неустойчивость приводит к формированию вторичных вихревых движений, а также может быть причиной распада вихря.

Явление распада (разрушения) вихря (*vortex breakdown*) впервые было обнаружено в аэродинамических исследованиях при обтекании крыльев большой стреловидности. Возмущения типа распада вихря характеризуются внезапным отклонением оси вихря от первоначального направления или резким увеличением ядра вихря.

Имеющиеся результаты по исследованию распада вихря систематизированы в обзорах [54, 55, 104, 116, 142]. На сегодняшний день зафиксировано восемь типов распада вихря, их подробная классификация представлена в [3]. Наиболее часто встречаются два типа разрушения вихря: пузыревидный (*bubble breakdown*) и спиральный (*spiral breakdown*). Пузыревидный распад характеризуется критической точкой на оси течения, за которой следует почти осесимметричная оболочка рециркуляционной зоны (рис 1.2, *a*). В задачах, связанных с горением, такие области рециркуляции служат своеобразным держателем пламени [39]. В других технических устройствах, например в [22], образование зон противотока нежелательно, так как может приводить к чрезмерному торможению основного течения. После осесимметричного распада, как правило, следует спиральный распад, хотя, конечно, его можно наблюдать и независимо. Спиральный распад характеризуется резким изломом оси вихря, после которого происходит штопорообразное закручивание потока.

Согласно Лейбовичу [54], поле течения при распаде вихря может быть разделено на три пространственные области. Первая относится к набегающему потоку, который является так называемым концентрированным вихрем. Этот поток либо ламинарный, либо имеет относительно низкую степень турбулентности. Вторая является непосредственно областью распада. Далее вниз по течению за ней располагается третья область (след), в которой устанавливается новая вихревая структура с расширившимся ядром. Эта область, как правило, турбулентная с сильными низкочастотными пульсациями.

Практически во всех экспериментах, проводимых в слабодилатированных осесимметричных трубах, профили осевой и азимутальной скоростей в подводящем потоке и области следа хорошо описывались следующими функциями:

$$V_z(r) = W_1 + W_2 \exp(-br^2), \quad V_\varphi(r) = \frac{K}{r} [1 - W_2 \exp(-br^2)], \quad (1.2)$$

где  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $K$  – эмпирические определяемые константы,  $r$  – безразмерное (отнесенное к радиусу трубы) расстояние от оси.

Детальные измерения внутри области пузырьвидного распада с помощью современных методов лазерно-доплеровской анемометрии были проведены Фалером и Лейбовичем [106]. Проведенные эксперименты показали, что движение в зоне рециркуляции нестационарное с регулярными низкочастотными пульсациями. Амплитуды пульсаций различны: от незначительных в головной части распада до весьма существенных в хвостовой части. Значения скорости в области рециркуляции малы по сравнению со скоростями подводящего потока. Данные измерения позволили установить двухъячеистую структуру пузырьвидного распада, схема которой представлена на рис. 1.2, б. Визуальное подтверждение существования внутренней ячейки можно видеть также на фотографиях в [165].

В [3] проведена систематизация имеющихся экспериментальных данных, полученных различными авторами, и построены режимные карты закрученных течений. На них представлены зависимости типов распада и их среднего осевого положения от числа Рейнольдса и параметра закрутки.

### § 1.3. Математические модели и численные исследования

Исследования гидродинамики закрученных течений вязкой жидкости базируются на использовании системы уравнений Навье–Стокса. Эти уравнения нелинейные, что существенно затрудняет их решение. Поэтому существуют различные подходы, в которых пренебрегают нелинейными членами. Одной из простейших является модель Стокса. Она применяется для течений с малыми скоростями, поэтому в ней можно полностью пренебречь конвективными членами в исходной системе уравнений Навье–Стокса. На основе данной модели построена теория гидродинамической смазки.

Более сложной моделью является модель Озеена, основанная на отбрасывании в уравнениях Навье–Стокса вторых производных по осевой координате  $z$ , считая, что  $V_r \ll V_z$ ,  $V_z \ll V_\varphi$ ,  $\partial^2 / \partial z^2 \ll \partial^2 / \partial r^2$ . Если при этом заменить  $V_z \partial / \partial z$  на  $V_{cp} \partial / \partial z$ , то уравнения становятся линейными. Вращательно-поступательное движение вязкой несжимаемой жидкости в озееновском приближении рассмотрено в работах [62, 63], а в [162] проведены расчеты закрученных течений в канале с внезапным расширением. Для исследования турбулентных закрученных течений в гидротехнических приложениях модель Озеена использовалась в [44].

Во многих технических устройствах с использованием закрученных течений осевые градиенты в потоке оказываются более слабыми, чем радиальные; поперечная компонента скорости мала по сравнению с осевой и вращательной компонентами; силы давления приблизительно находятся в равновесии с центробежными силами; течение осесимметрично. На использовании перечисленных выше особенностей основана квазицилиндрическая аппроксимация уравнений Навье–Стокса. Эта система является аналогом уравнений мелкой воды и уравнений пограничного слоя. На основе такого подхода в [145] получены аналитические решения для вихря, погруженного в невращающийся поток с заданной циркуляцией и равномерной осевой скоростью, а в [153, 118] проведено исследование применительно к закрученному потоку в осесимметричном канале.

Система уравнений типа пограничного слоя имеет ограниченные возможности в моделировании закрученных течений. В частности, она не позволяет получать решения с зонами возвратных течений. Для этого необходимо использовать полные уравнения Навье–Стокса. В ряде частных случаев удастся найти автомодельные решения этой системы. Остановимся на некоторых из них.

Автомодельное решение для вязкого закрученного следа получено Бэтчелором [90]. После отбрасывания некоторых малых по значению слагаемых его можно представить в виде [136]:

$$V_z = \exp(-r^2), \quad V_\phi = \frac{Q}{r}(1 - \exp(-r^2)), \quad (1.3)$$

который часто называют  $Q$  - вихрем (или вихрем Бэтчелора). Данное распределение скоростей часто используется при анализе устойчивости закрученных потоков. Можно показать [3], что, во-первых, заменой переменных профили (1.14) могут быть сведены к зависимостям (1.2), и, во-вторых, выражения (1.14) являются решением уравнений движения идеальной жидкости с гауссовым распределением завихренности в ядре.

К классу осесимметричных точных решений уравнений Навье–Стокса вида принадлежит вихрь Бюргерса. Распределение азимутальной скорости в вихре Бэтчелора (1.3) соответствует вихрю Бюргерса, но в последнем случае осевая скорость является функцией от координаты  $z$ .

Класс асимптотических решений для закрученной струи, которая возникает в результате действия точечного источника, представлен в [38, 43].

Численное моделирование закрученных потоков на основе полной системы уравнений Навье–Стокса стало возможным с начала 70-х годов прошлого столетия. Применительно к задаче о распаде вихря в цилиндрическом канале первые расчеты, по-видимому, были проведены Копецки и Торрансом [131]. Закрученное течение в неограниченной среде исследовалось в работе Грабовского и Бергера [114], которая во многом стала отправной точкой для последующих численных исследований распада вихревых течений.

Результаты расчетов осесимметричных закрученных течений на основе полной системы уравнений Навье–Стокса для течений в цилиндрическом

канале представлены в [29, 181] (методом конечных элементов в [86]), в канале с внезапным расширением в [95], в цилиндрическом сосуде с вращающейся нижней стенкой в [140], в неограниченной среде в [124], с учетом сжимаемости потока в [41, 119]. Коаксиально закрученные течения в каналах численно исследовались в [69]. Вопросы, связанные с влиянием осевого температурного градиента давления на возникновение распада вихря в цилиндрическом канале, изучались в [120]. Численное исследование закрученных течений в вихревых трубах применительно к описанию эффекта энергоразделения Ранка–Хилша проведено в [48].

С начала 1990-х годов стали проводиться работы по численному моделированию трехмерных нестационарных закрученных течений на основе уравнений Навье–Стокса. Первые расчеты для задачи о разрушении вихря были проведены в [173]. В них впервые удалось полностью численно воспроизвести двухъячеистую структуру пузырьвидного распада вихря, экспериментально полученную в [106]. В дальнейшем численные исследования трехмерных закрученных течений были продолжены в [117, 143, 169, 170, 172].

Большинство закрученных течений в технических приложениях являются турбулентными. Для их простейшего описания используются модели с так называемой эффективной вязкостью  $\nu_{eff}$ , которая определяется в виде суммы обычной вихревой вязкости  $\nu$  и турбулентной вязкости  $\nu_t$ . В турбулентных течениях  $\nu_t \gg \nu$ , поэтому вводят эффективное число Рейнольдса  $Re_{eff}$ , построенное по турбулентной вязкости, и используют его в расчетах, проводимых на основе полной системы уравнений Навье–Стокса. Подробный обзор и анализ применимости таких моделей представлен в [38], а пример численного исследования закрученного течения в вихревой трубе и струе рассмотрен в [65].

В более сложных расчетах применяются алгебраические модели турбулентности, основанные на гипотезе Прандтля о длине пути смешения. Результаты численного моделирования закрученных течений с использованием алгебраических моделей турбулентности представлены в [130, 158, 154].

Широкое применение в численных исследованиях турбулентных течений получили дифференциальные двухпараметрические модели турбулентности. Одной из наиболее часто используемых является  $k-\varepsilon$  модель, основанная на совместном решении уравнений переноса, турбулентной кинетической энергии  $k$  и скорости диссипации  $\varepsilon$  кинетической энергии. Применение обычной  $k-\varepsilon$  модели со стандартным набором констант часто приводит к существенному расхождению получаемых результатов с экспериментом, особенно при интенсивной закрутке потока. Поэтому имеется большое количество работ, в частности [6, 60, 129, 171, 184, 186], в которых предложены разнообразные модификации  $k-\varepsilon$  модели, учитывающие в

той или иной мере специфику закрученного течения, в том числе свойство анизотропности турбулентной вязкости.

Дальнейшее развитие исследований турбулентных течений было связано с использованием моделей второго порядка, включающих в себя уравнения для переноса вторых одноточечных моментов  $\overline{V_i' V_j'}$ , что позволило отказаться от гипотезы изотропности турбулентной вязкости. Однако эти модели обладают существенными недостатками: наличием большого числа эмпирических констант и громоздкостью за счет дополнительных уравнений, что затрудняет их реализацию. Примеры численного моделирования закрученных течений на основе данных моделей приведены в [168, 174, 183, 188]. Обзоры по применению различных моделей турбулентности для течений с закруткой представлены в [74, 112].

В последние годы интенсивно развиваются методы прямого численного моделирования (DNS – direct numerical simulation) трехмерных турбулентных течений. При расчетах с помощью прямых методов решается система уравнений, вид которых формально совпадает с нестационарными уравнениями Навье–Стокса, но они записываются для мгновенных значений параметров течения, а вместо обычной вихревой вязкости в них входит так называемая подсеточная вязкость, пропорциональная размеру ячеек расчетной сетки.

Детальные и систематические исследования распада вихревого течения, выполненные методом прямого численного моделирования, проведены в [163]. Необходимо отметить, что осредненные картины течений при прямом численном моделировании в этом исследовании практически в точности совпадали с результатами работы Грабовского и Бергера [114], полученными для ламинарных течений. Это свидетельствует о том, что общая структура течения с крупномасштабными вихревыми образованиями может быть достаточно точно описана в рамках численного моделирования на основе полной системы уравнений Навье–Стокса.

Прямое численное моделирование методом крупных вихрей (LES – large eddy simulation) для турбулентного закрученного течения в канале с внезапным расширением проведено в [141], для закрученного течения во вращающейся трубе в [208], в осесимметричном канале в [184], для вихрей, сходящих с передней кромки дельтовидных крыльев в [147], для двух взаимодействующих вихрей в неограниченной среде в [157]. Обзор по применению прямых методов расчета турбулентных закрученных течений и сравнение полученных результатов с данными экспериментов и теоретическими исследованиями представлен в [105].

Во многих прикладных задачах строительства используются закрученные течения, в которых содержатся примеси из твердых частиц (или пузырьки воздуха). Для исследования поведения взвешенных частиц в потоке существуют различные подходы. Если частицы рассматриваются как сплошная среда, то обычно поток считается двухфазным и применяется гипотеза двух взаимопроникающих, взаимодействующих континуумов. В

этом случае могут быть записаны две системы уравнений Навье–Стокса для каждой из фаз, которые связаны между собой через обмен импульсов (часто для дисперсной фазы применяются более простые уравнения Эйлера). Примеры расчетов двухфазных закрученных течений представлены в [60].

При другом подходе частицы рассматриваются как дискретная система, которая переносится потоком. В этом случае движение частиц описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, записываемых для каждой частицы в отдельности. Данный подход применялся при численном моделировании закрученных течений в [70, 159]. Численное исследование закрученного течения с частицами для модельной камеры сгорания прямым методом LES проведено в [88].

Обзор по проблемам численного моделирования газодисперсных течений представлен в [30, 42].

### § 1.4. Гидродинамическая неустойчивость течений с закруткой

Существует несколько общих критериев устойчивости для закрученных течений. Впервые такой критерий для невязкого течения с заданным распределением азимутальной скорости  $W(r)$  был получен Рэлеем в начале прошлого века. Из него следует, что осесимметричное вихревое течение устойчиво, если выполняется неравенство

$$\Phi = \frac{1}{r^3} \frac{d(Wr)^2}{dr} > 0. \quad (1.4)$$

Позднее было доказано, что данное условие является еще и достаточным. Хоуэрд и Гупта [122] обобщили критерий Рэля, рассмотрев закрученное течение в кольцевом канале при наличии осевой составляющей скорости  $U(r)$ . В этом случае течение устойчиво к осесимметричным возмущениям при условии

$$J = \frac{\Phi}{(dU/dr)^2} = \left( \frac{1}{r^3} \frac{d(Wr)^2}{dr} \right) / \left( \frac{dU}{dr} \right)^2 > \frac{1}{4}, \quad (1.5)$$

которое также является и достаточным.

Более общий критерий устойчивости был сформулирован Лейбовичем и Стевартсоном. В [133] показано, что достаточное условие устойчивости неограниченного невязкого колоннообразного вихря с распределением осевой компоненты скорости  $U(r)$  и азимутальной компонентой  $W(r)$  имеет вид:

$$W \frac{d}{dr} \left( \frac{W}{r} \right) \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{W}{r} \right) \frac{d}{dr} (Wr) + \left( \frac{dU}{dr} \right)^2 \right] < 0, \quad (1.6)$$

причем рассматривались как осесимметричные, так и спиральные моды. Обобщение условия (1.6) на случай сжимаемых течений получено в [103].



<b>Предисловие.....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Развитие исследований закрученных потоков.....</b>	<b>6</b>
§ 1.1. Закрученные потоки в инженерной практике.....	6
§ 1.2. Экспериментальные исследования закрученных потоков.....	8
§ 1.3. Математические модели и численные исследования.....	11
§ 1.4. Гидродинамическая неустойчивость течений с закруткой.....	15
<b>Глава 2. Вихревая структура закрученных потоков.....</b>	<b>20</b>
§ 2.1. Численный метод решения системы уравнений Навье–Стокса ..	20
§ 2.2. Закрученные течения в осесимметричном канале с непроницаемыми и проницаемыми стенками .....	23
§ 2.3. Закрученные течения в неограниченной среде.....	32
§ 2.4. Взаимодействие осевой струи с кольцевым закрученным по- током.....	39
§ 2.5. Коаксиально закрученные потоки в вихревой камере .....	47
<b>Глава 3. Устойчивость закрученных течений.....</b>	<b>60</b>
§ 3.1. Метод нормальных мод .....	60
§ 3.2. Устойчивость внутренних модельных течений с закруткой .....	65
§ 3.3. Устойчивость расчетных течений в осесимметричном канале ..	73
§ 3.4. Устойчивость вихря Бэтчелора .....	80
§ 3.5. Устойчивость расчетных течений в неограниченной среде .....	95
<b>Глава 4. Двухфазные вихревые течения с зонами рециркуляции.....</b>	<b>99</b>
§ 4.1. Распыление порошка закрученным потоком .....	99
§ 4.2. Разделение частиц по размерам закрученным потоком.....	116
§ 4.3. Закрученные течения в прямооточном пылеотделителе .....	122
§ 4.4. Течение в гидротехническом отстойнике .....	125
<b>Глава 5. Струйные течения неоднородных жидкостей.....</b>	<b>133</b>
§ 5.1. Распространение азрированной затопленной струи .....	133
§ 5.2. Смешение нагретых газов в осесимметричном канале с предварительной закруткой потока .....	141
<b>Глава 6. Вычислительные алгоритмы.....</b>	<b>157</b>
§ 6.1. Метод решения уравнения Пуассона для функции тока .....	157
§ 6.2. Конечно-разностная схема для решения уравнений переноса....	160
§ 6.3. Аппроксимация граничных условий для завихренности.....	162
§ 6.4. Асимптотические решения системы уравнений для возмущений в окрестности особых точек .....	164
<b>Библиографический список.....</b>	<b>169</b>