МАТЕМАТИКА

2016 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

профильный уровень

ЗАДАЧА 10

Д. Д. Гущин,
А. В. Малышев

ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОГО СОДЕРЖАНИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ФГОС

ЕГЭ 2016 МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧА 10 профильный уровень

ББК 22.1я72
Г98

Гущин Д. Д., Малышев А. В.
ЕГЭ 2016. Математика. Задачи прикладного содержания. Задача 10 (профильный уровень).
Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2016.
78 с.
ISBN 978-5-4439-2419-9

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2016. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике в 2016 году по базовому и профильному уровням. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2016.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по основным темам, связанным с решением текстовых задач с прикладным содержанием. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Подготовлено на основе книги:
Гущин Д. Д., Малышев А. В. ЕГЭ 2016. Математика. Задачи прикладного содержания. Задача 10 (профильный уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0879-3

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2419-9

Содержание

Введение

Не будет преувеличением сказать, что главная цель изучения наук в школе — понять, как устроен мир вокруг нас. Мир — в широком смысле этого слова: окружающая нас живая и неживая природа, общество, социально-экономические отношения, даже внутренний мир человека. Мы хотим понять окружающую нас действительность, а также научиться её моделировать, осознавать её поведение в прошлом, уметь прогнозировать в будущем.

Явления неживой природы обладают рядом особенностей, позволяющих достаточно точно описывать и предсказывать их поведение. Главные из этих особенностей — неизменность физических и химических законов во времени, а также найденные учёными относительно простые функциональные законы, описывающие приближённые модели таких систем. Поэтому одними из самых простых и в то же время наиболее важными естественнонаучными задачами являются задачи на анализ функциональных зависимостей.

Язык функций — удобное средство мироописания, особенно распространённое в физике и химии. Аппарат математической статистики, а также комбинаторики и теории вероятностей кроме этих наук используется в биологии, психологии, социологии, экономике и других областях знаний, в которых предполагаются анализ наблюдений, опытных данных, результатов измерений, тестов, опросов и пр.

Задания с прикладным содержанием, включённые в 2016 году в экзаменационные варианты ЕГЭ по математике под номером 10 (профильный уровень), представляют собой задачи на анализ явления, описываемого формулой функциональной зависимости. При этом явления, положенные в основу задачной фабулы, отобраны так, что соответствующие функции являются привычными для школьников: это линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая или тригонометрические функции.

Каждая из фабул представляет собой описание того или иного явления с указанием формулы, которой оно описывается, параметров и констант в этой формуле и необходимых единиц измерения. Все единицы измерения приведены в единой используемой в задаче системе единиц (СИ или СГС), и от учащихся не требуется перевода единиц измерения из одной системы в другую.

Решение предложенных задач условно можно разделить на несколько шагов:

а) анализ условия и вычленение формулы, описывающей заданную ситуацию, а также значений параметров, констант или начальных условий, которые необходимо подставить в эту формулу;

б) математическая интерпретация задачи — сведение её к уравнению или неравенству и его решение;

в) анализ полученного решения.

Проиллюстрируем этот подход на нескольких примерах.

Задача 1. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Решение. Формулой, описывающей изменение высоты мяча с течением времени, является

$$h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2,$$

в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант.

Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к решению неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к неравенству предпочтительнее сведения к уравнению.

Способ 1. Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте ровно три метра. Для этого решим уравнение $h(t) = 3$:

$$h(t) = 3 \iff 1{,}6 + 8t - 5t^2 = 3 \iff 5t^2 - 8t + 1{,}4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 0{,}2; \\ t = 1{,}4. \end{array}\right.$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи мяч брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0{,}2$ (с) мяч находился на высоте 3 метра, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 1{,}4$ (с) мяч находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее трёх метров 1,2 секунды.

Способ 2. Условие «мяч находится на высоте не менее трёх метров» эквивалентно неравенству $h(t) \geqslant 3$. Решим его:

$$h(t) \geqslant 3 \iff 1{,}6 + 8t - 5t^2 \geqslant 3 \iff 5t^2 - 8t + 1{,}4 \leqslant 0 \iff 0{,}2 \leqslant t \leqslant 1{,}4.$$

Проанализируем полученный результат: мяч будет находиться на указанной высоте в период времени от 0,2 до 1,4 секунды, т. е. в течение 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

Примечание 1. Точных равенств в физике не бывает: все измерения осуществляются с какой-то погрешностью, а законы выполняются лишь с некоторой точностью. Однако, решая уравнение и представляя себе ход того или иного процесса, мы обычно можем получить и решение соответствующего неравенства. (Вспомните метод интервалов для решения неравенств — он основан именно на этой идее.) В заданиях, включённых в контрольно-измерительные материалы, рассматриваются только функции, обладающие свойствами, необходимыми для применения метода интервалов. Соответственно, любая из задач с прикладным содержанием может быть сведена либо к уравнению, либо к неравенству.

Выбор того или иного пути решения чаще всего будет обусловлен личными предпочтениями решающего. Из общих соображений можно сказать лишь, что решать уравнение, как правило, проще, чем неравенство, но интерпретация полученного решения иногда может быть затруднительна. В учебных целях мы предлагаем решать задачи двумя способами, вне зависимости от того, какой именно предпочтительнее в данной конкретной задаче.

Отметим также, что задания на решение иррациональных и тригонометрических неравенств не входят в действующий стандарт полного общего образования по математике базового уровня и не включаются в экзаменационные задания базового уровня. Мы рекомендуем рассмотрение соответствующих неравенств с учащимися, изучающими математику на профильном уровне.

Задача 2. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4,$$

где t — время (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является $H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4$, в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант. Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к решению неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к уравнению предпочтительнее сведения к неравенству.

Способ 1. Вода будет вытекать из бака, пока её уровень не понизится до нуля. Определим требуемое на это время, решая уравнение $H(t) = 0$:

$$H(t) = 0 \iff 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4 = 0 \iff t^2 - 40t + 400 = 0 \iff t = 20.$$

Это означает, что по прошествии 20 минут вся вода вытечет из бака.

Способ 2. Условие «вода будет вытекать из бака» эквивалентно неравенству $H(t) \geqslant 0$: пока высота столба воды больше нуля, вода будет вытекать из бака. Решим неравенство $H(t) \geqslant 0$:

$$H(t) \geqslant 0 \iff 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4 \geqslant 0 \iff t^2 - 40t + 400 \geqslant 0 \iff (t-20)^2 \geqslant 0.$$

Проанализируем полученный результат: неравенству удовлетворяют все значения переменной t. Это означает, что высота столба не может стать отрицательной ни в какой момент времени. Нулевого значения высота столба воды достигает при $t = 20$. Таким образом, столб воды опустится до нуля за 20 минут.

Ответ: 20.

Задача 3. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = at^2 + bt + H_0,$$

где $H_0 = 4$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин^2 и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин — постоянные, t — время (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является $H(t) = at^2 + bt + H_0$. В формулу требуется подставить заданные в условии значения параметров a и b и начальный уровень воды H_0; получим

$$H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4.$$

Этим задача свелась к предыдущей.

Примечание 2. Мы находим чрезвычайно важным подчеркнуть, что приведённые формулы функциональных зависимостей не являются произвольными математическими выражениями! Числовые коэффициенты в них имеют вполне определённую физическую природу и связаны между собой. В действительности высота (в метрах) столба жидкости, вытекающей из бака через кран небольшого диаметра, меняется с течением времени по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, H_0 — начальная высота столба воды в метрах, g — ускорение свободного падения в м/с^2, k — отношение площадей поперечных сечений крана и бака.

Тем самым задачи 2 и 3 — соответственно более или менее упрощённые формулировки (заметьте, что время там измеряется в минутах) следующей задачи, которую можно предложить хорошо успевающим школьникам при подготовке к экзамену.

Задача 4. В боковой стенке высокого высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды? (*Ответ*: 50.)

В дальнейшем большинство задач приводится в неупрощённом виде. В начале книги дана вводная диагностическая работа, позволяющая определить степень готовности учащихся к решению задач с прикладным содержанием. Далее разобраны все задачи вводной диагностической работы; на каждый тип заданий приведены упражнения

Диагностическая работа

Ответами на задания диагностической работы должны быть целые числа или конечные десятичные дроби. Единицы измерений в ответы писать не нужно.

Ответы:

1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

1

2. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\dfrac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

2

3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ $\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \dfrac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

3

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

4

4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

5

5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

6

6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?

7

7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_п = 20°$C, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в = 60°$C. Через радиатор проходит $m = 0{,}3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры T(°C), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п},$$

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

где $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\ \frac{\text{Вт}}{{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

8

9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v\cos\alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,25 м/с?

9

10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,