ТЕХНИКУМ
ТК
КОЛЛЕДЖ

М. С. Мовнин, А. Б. Израелит, А. Г. Рубашкин

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Электронный аналог печатного издания: Мовнин М. С. Основы технической механики : учебник для технологических немашиностроительных специальностей техникумов и колледжей / М. С. Мовнин, А. Б. Израелит, А. Г. Рубашкин; Под ред. П. И. Бегуна. — 5-е изд., перераб. и доп. — СПб. : Политехника, 2011. — 286 с. : ил.

УДК 531.001.32(07)
ББК 30.12я7
М74

ПОЛИТЕХНИКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Санкт-Петербург 2011

www.polytechnics.ru

Р е ц е н з е н т **А. И. Аркуша**

Мовнин, М. С. и др.
М74 Основы технической механики: Учебник для технологических немашиностроительных специальностей техникумов и колледжей /М. С. Мовнин, А. Б. Израелит, А. Г. Рубашкин; Под ред. П. И. Бегуна. — 5-е изд., перераб. и доп. — СПб. : Политехника, 2011. — 286 с.: ил.

ISBN 978-5-7325-0967-0

Кратко изложены элементарные основы технической механики. Теоретические построения и выводы формул даны без использования аппарата высшей математики на основе единой методической системы, обеспечивающей наглядность и раскрытие физической сущности рассматриваемых явлений. Приведены примеры по всем вопросам курса, которые помогут учащимся при выполнении домашних заданий.

УДК 531.001.32(07)
ББК 30.12я7

ЭЛЕКТРОННОЕ УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Мовнин Михаил Савельевич,
Израелит Арон Борисович,
Рубашкин Абрам Гилькович

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Главный редактор *Е. В. Шарова*. Редактор *М. И. Козицкая*.
Переплет *Т. М. Каргапольцевой*. Технический редактор *Т. М. Жилич*.
Корректоры *З. С. Романова, Н. В. Соловьева, Т. Н. Гринчук*.
Набор *Т. Н. Бабан-Луценко*. Верстка *Ю. А. Окуневой*

Подписано в печать 28.06.2011.
Электронных текстовых данных 1,8 Мб.
Электронный текст подготовлен ОАО «Издательство “Политехника”».
191023, Санкт-Петербург, Инженерная ул., д. 6.
www.polytechnics.ru

ISBN 978-5-7325-0967-0

Раздел первый

СТАТИКА

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИКИ

§ 1. Механическое движение. Равновесие

В механике изучают законы взаимодействия и движения материальных тел. *Механическим движением называют происходящее с течением времени изменение положения тел или точек в пространстве.*

Частным случаем движения является состояние покоя. Покой всегда имеет относительный характер, так как покоящееся тело рассматривается как неподвижное по отношению к некоторому другому телу, которое, в свою очередь, может перемещаться в пространстве. Абсолютно неподвижных тел в природе нет. Например, мы говорим, что станина машины или фундамент сооружения находится в покое. Они действительно неподвижны относительно Земли, но вместе с ней совершают сложное движение вокруг Солнца.

§ 2. Материальная точка. Абсолютно твердые и деформируемые тела

Понятия статики вошли в науку как результат многовековой практической деятельности человека. Они подтверждены опытами и наблюдениями над явлениями природы.

Тело можно рассматривать как материальную точку, т. е. его можно представить геометрической точкой, в которой сосредоточена вся масса тела, в том случае, когда размеры тела не имеют значения в рассматриваемой задаче. Например, при изучении движения планет и спутников их считают материальными точками, так как размеры планет и спутников пренебрежимо малы по сравнению с размерами их орбит. С другой стороны, изучая движение планеты (например, Земли) вокруг оси, ее уже нельзя считать материальной точкой.

Системой называется совокупность материальных точек, движения и положения которых взаимосвязаны. Из приведенного определения следует, что любое физическое тело можно рассматривать как систему материальных точек.

Рассматривая равновесие тел, их считают *абсолютно твердыми* (или абсолютно жесткими), т. е. предполагают, что никакие внешние воздействия не вызывают изменения их размеров и формы и что расстояние между любыми двумя точками тела всегда остается неизменным.

В действительности все тела под влиянием силовых воздействий со стороны других тел деформируются и изменяют свои размеры или форму. Но материалы, форму и размеры элементов конструкций подбирают с таким расчетом, чтобы их деформации были минимальными, поэтому такими деформациями пренебрегают и рассматривают элементы конструкций как абсолютно твердые тела.

§ 3. Сила — вектор. Система сил. Эквивалентность сил

Абсолютно твердые тела могут вступать во взаимодействие, в результате которого изменяется характер их движения. Сила является мерой этого взаимодействия. Например, взаимодействие планет и Солнца определяется силами тяготения. Действие силы на тело определяется тремя факторами: численным значением, направлением и точкой приложения, т. е. сила является *векторной величиной.*

Вектор силы изображается отрезком, на конце которого ставится стрелка. Стрелка указывает направление вектора, длина отрезка — значение вектора, измеренное в выбранном масштабе. Вектор в тексте обозначают одной буквой со стрелкой наверху: $\vec{F}$, $\vec{a}$, $\vec{v}$, а на схемах (рис. 1, *а*, *б*) стрелки не ставятся, так как само обозначение вектора в виде направленного отрезка достаточно наглядно характеризует его свойства.

Модуль, или *численное значение силы*, измеряется в ньютонах (Н). Применяют также и более крупные единицы измерения: 1 килоньютон $(1\ \text{кН} = 10^3\ \text{Н})$, 1 меганьютон $(1\ \text{МН} = 10^6\ \text{Н})$.

Системой сил называют совокупность нескольких сил, приложенных к телу, точке или к системе тел и точек.

Система сил, линии действия которых лежат в разных плоскостях, называется *пространственной*. Если же линии действия рассматриваемых сил лежат в одной плоскости, система называется *плоской*. Система сил с пересекающимися в одной точке линиями действия называется *сходящейся*. Сходящаяся система сил может быть как пространственной, так и плоской. Наконец, различают еще систему параллельных сил, которая аналогично сходящейся может быть пространственной или плоской.

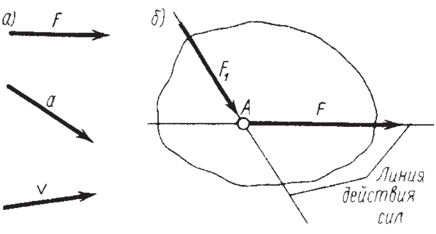

Рис. 1

Две системы сил *эквивалентны*, если взятые порознь они оказывают одинаковое механическое действие на тело. Из этого определения следует, что две системы сил, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой. Любую сложную систему сил всегда можно заменить более простой эквивалентной ей системой сил. Одну силу, эквивалентную данной системе сил, называют *равнодействующей* этой системы. Силу, равную по модулю равнодействующей и направленную по той же линии действия, но в противоположную сторону, называют *уравновешивающей* силой. Если к системе сил добавлена уравновешивающая сила, то полученная новая система находится в равновесии и соответственно эквивалентна нулю.

§ 4. Аксиомы статики

Статика основана на аксиомах, вытекающих из опыта и принимаемых без доказательств. Аксиомы статики устанавливают основные свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Первая аксиома определяет уравновешенную систему сил. *Система сил, приложенная к материальной точке, является уравновешенной, если под ее воздействием точка находится в состоянии относительного покоя или движется равномерно и прямолинейно.*

Рассматривая первую аксиому, нетрудно установить, что уравновешенная система сил как причина механического движения эквивалентна нулю.

Тело (в отличие от точки) под действием уравновешенной системы не всегда находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Возможен случай, когда уравновешенная система сил, а точнее уравновешенная система пар сил (см. § 14) вызывает равномерное вращение тела вокруг некоторой неподвижной оси. Следовательно, если на тело действует уравновешенная система сил, то тело либо находится в состоянии относительного покоя, либо движется равномерно и прямолинейно, либо равномерно вращается вокруг неподвижной оси.

Вторая аксиома устанавливает условие равновесия двух сил. *Две равные по модулю или численному значению силы* ($F_1 = F_2$), *приложенные к абсолютно твердому телу и направленные по одной прямой в противоположные стороны, взаимно уравновешиваются* (рис. 2, *а*).

Третья аксиома служит основой для преобразования сил. *Не нарушая механического состояния абсолютно твердого тела, к нему можно приложить или отбросить от него уравновешенную систему сил.*

Тело (рис. 2, *б*) находится в состоянии равновесия. Если к нему приложить несколько взаимно уравновешенных сил

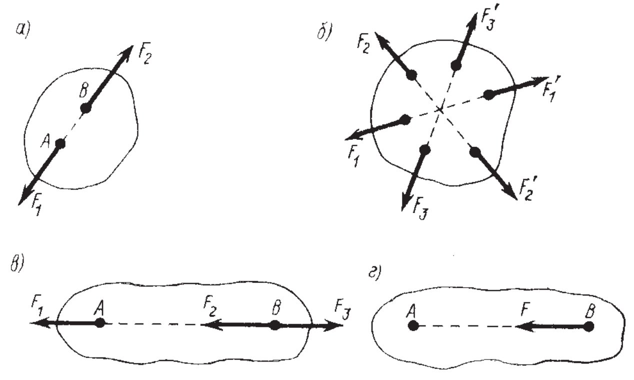

Рис. 2

($F_1 = F_1'$, $F_2 = F_2'$, $F_3 = F_3'$), то равновесие не нарушится. Аналогичный эффект получится при отбрасывании этих уравновешенных сил.

Системы сил, показанные на рис. 2, *а*, *б*, *эквивалентны*, так как они дают одинаковый эффект: под действием каждой из них тело находится в равновесии.

Из аксиомы вытекает следствие, согласно которому *всякую силу, действующую на абсолютно твердое тело, можно перенести вдоль линии ее действия в любую точку, не нарушив при этом его механического состояния.*

Пусть на тело в точке A действует сила $\vec{F}_1$ (рис. 2, *в*). В произвольной точке B на линии действия силы $\vec{F}_1$ приложим две силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, равные по модулю $\vec{F}_1$ и направленные в противоположные стороны. Состояние тела в этом случае не нарушится. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$, равные по модулю и противоположно направленные, можно отбросить. Таким образом, силу $\vec{F}_1$ можно заменить равной силой $\vec{F}_2$, перенесенной по линии действия $\vec{F}_1$ из точки A в точку B (рис. 2, *г*).

Векторы, которые можно переносить по линии их действия, называют *скользящими*. Как показано выше, сила является *скользящим вектором.*

Четвертая аксиома определяет правило сложения двух сил. *Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке, приложена в этой точке и является диагональю параллелограмма, построенного на данных силах.*

Так, равнодействующей двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенных к точке A (рис. 3, *а*), будет сила $\vec{F}_\Sigma$, представляющая собой диагональ параллелограмма $ACDB$, построенного на векторах заданных сил. Определение равнодействующей двух сил по правилу параллелограмма называется *векторным*, или *геометрическим*, сложением и выражается векторным равенством

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \qquad (1)$$

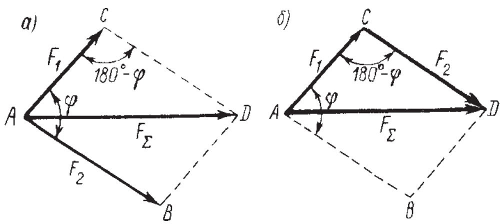

Рис. 3

При графическом определении равнодействующей двух сил вместо правила параллелограмма можно пользоваться правилом треугольника. Из произвольной точки A (рис. 3, *б*) проводим, сохраняя масштаб и заданное направление, вектор первой составляющей силы $\vec{F}_1$, из его конца проводим вектор, параллельный и равный второй составляющей силе $\vec{F}_2$. Замыкающая сторона AD треугольника и будет искомой равнодействующей $\vec{F}_{\Sigma}$. Ее можно также представить как диагональ параллелограмма $ABCD$, построенного на заданных силах.

Модуль равнодействующей двух сил можно определить из треугольника ACD:

$$F_{\Sigma}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180^\circ - \varphi), \text{ где } \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi,$$

поэтому $F_{\Sigma}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi$, или

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}. \qquad (2)$$

На основании четвертой аксиомы одну силу $\vec{F}_{\Sigma}$ можно заменять двумя составляющими силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Такую замену часто производят при решении задач статики.

Пятая аксиома устанавливает, что в природе не может быть одностороннего действия силы. *При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.* Так, если на тело B (рис. 4) действует сила $\vec{F}_1$ со стороны материального тела A, то на тело A действует со стороны тела B такая же по численному значению сила $\vec{F}_2$. Обе силы действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны. Действие и противодействие всегда приложены к различным телам, и именно поэтому они не могут уравновешиваться.

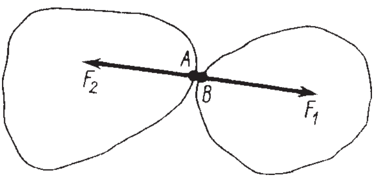

Рис. 4

Упражнение 1

1. Даны две силы — одна равнодействующая данной системы сил, а другая уравновешивающая этой же системы. Как направлены эти силы относительно друг друга? Укажите правильный ответ.

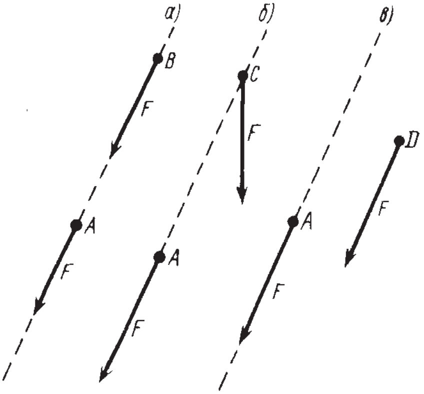

Рис. 5

А. Они направлены в одну сторону. Б. Они направлены по одной прямой в противоположные стороны. В. Их взаимное расположение может быть произвольным.

2. Две системы сил уравновешивают друг друга. Можно ли утверждать, что их равнодействующие равны по модулю и направлены по одной прямой?

А. Да. Б. Нет.

3. Чему станет эквивалентна сила, если к ней добавить уравновешивающую силу?

4. В каком из случаев, указанных на рис. 5, *а*, *б*, *в*, перенос силы из точки A в точки B, C или D не изменит механического состояния твердого тела

А. Рис. 5, *а*. Б. Рис. 5, *б*. В. Рис. 5, *в*.

5. На рис. 5, *б* изображены две силы, линии действия которых лежат в одной плоскости. Можно ли найти их равнодействующую по правилу параллелограмма?

А. Можно. Б. Нельзя.

6. При каком значении угла между линиями действия двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ их равнодействующая определяется по формуле: А. $F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$. Б. $F_\Sigma = F_1 + F_2$. В. $F_\Sigma = F_1 - F_2$.

§ 5. Связи и их реакции

Рассматриваемые в механике тела могут быть свободными и несвободными. *Свободным* называют тело, которое не испытывает никаких препятствий для перемещения в пространстве в любом направлении. Если же тело связано с другими телами, которые ограничивают его движение в одном или нескольких направлениях, то оно является *несвободным*. Тела, которые ограничивают движение рассматриваемого тела, называют *связями*.

При взаимодействии между телом и его связями возникают силы, противодействующие возможным движениям тела. Эти силы действуют на тело со стороны связей и называются *реакциями связей*.

Реакция связи всегда противоположна тому направлению, по которому связь препятствует движению тела. Существование реакций обосновывается аксиомой о действии и противодействии. Для определения реакций связей используют принцип освобождения от связей. *Не изменяя равновесия тела, каждую связь можно отбросить, заменив ее реакцией.* Определение реакций связей является одной из наиболее важных задач статики. Ниже приведены наиболее распространенные виды связей, встречающиеся в задачах.

1. *Связь в виде гладкой* (т. е. без трения) *плоскости или поверхности* (рис. 6, *а*). В этом случае реакция связи всегда направлена по нормали к опорной поверхности.

2. *Связь в виде контакта цилиндрической или шаровой поверхности с плоскостью.* В этом случае реакция связи направлена также по нормали к опорной поверхности (рис. 6, *б*).

3. *Связь в виде шероховатой плоскости* (рис. 6, *в*). Здесь возникают две составляющие реакции: нормальная $\vec{R}_n$, перпендикулярная к плоскости, и касательная $\vec{R}_t$, лежащая в плоскости. Касательная реакция $\vec{R}_t$ называется силой трения и всегда направлена в сторону, противоположную действительному или возможному движению тела.

Полная реакция $\vec{R}$, равная геометрической сумме нормальной и касательной составляющих $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$, отклоняется от нормали к опорной поверхности на некоторый угол ρ.

При взаимодействии тела с реальными связями возникают силы трения. Однако во многих случаях силы трения незначительны и вследствие этого ими часто пренебрегают.

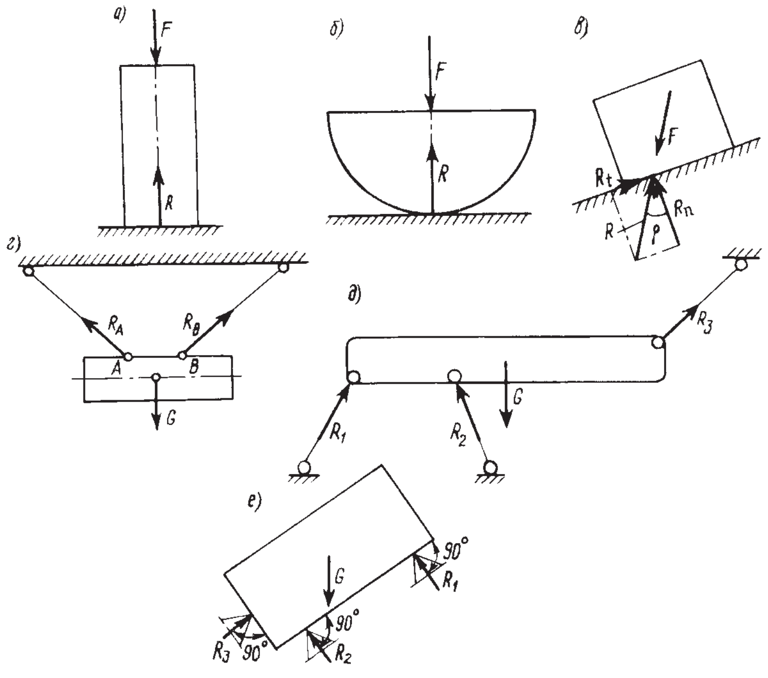

Рис. 6

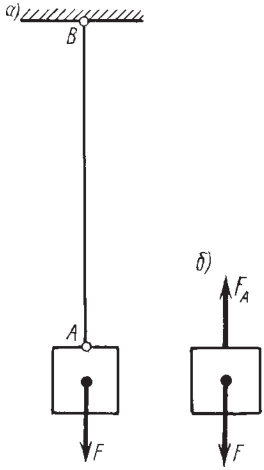

Рис. 7

4. *Гибкая связь*, осуществляемая веревкой, тросом, цепью и т. п. (рис. 6, *г*). Реакции гибких связей $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ направлены вдоль связей, причем гибкая связь может работать только на растяжение.

5. *Связь в виде жесткого прямого стержня с шарнирным закреплением концов* (рис. 6, *д*). Здесь реакции $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ и $\vec{R}_3$ всегда направлены вдоль осей стержней. Стержни при этом могут быть как растянутыми, так и сжатыми.

6. *Связь, осуществляемая ребром двугранного угла или точечной опорой* (рис. 6, *е*). Реакция такой связи $\vec{R}_1$ или $\vec{R}_2$ направлена перпендикулярно к поверхности опирающегося тела.

Пример 1. Груз $F = 20$ кН подвешен на тросе *AB* (рис. 7, *а*). Определить реакцию троса.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие груза. Действие связи (троса) на тело заменяем его реакцией. Так как нить препятствует перемещению груза вниз, то реакция $\vec{F}_A$ направлена в противоположную сторону — вверх (рис. 7, *б*).

Груз находится в равновесии под действием двух сил, направленных по одной прямой в противоположные стороны, следовательно (на основании второй аксиомы статики), эти силы равны по модулю, т. е. $F_A = F = 20$ кН.

Упражнение 2

1. В каких связях, перечисленных ниже, реакции всегда направлены по нормали к поверхности?

А. Гладкая плоскость. Б. Гибкая связь. В. Жесткий стержень. Г. Шероховатая поверхность.

2. К чему приложена реакция опоры?

А. К самой опоре. Б. К опирающемуся телу.

Г л а в а II

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 6. Геометрический метод сложения сил, приложенных в одной точке

Силы называют сходящимися, если их линии действия пересекаются в одной точке. Различают *плоскую систему* сходящихся сил, когда линии действия всех данных сил лежат в одной плоскости, и *пространственную* систему сходящихся сил, когда линии действия сил лежат в разных плоскостях.

На основании следствия из третьей аксиомы силу можно переносить по линии ее действия, поэтому сходящиеся силы всегда можно перенести в одну точку — в точку пересечения их линий действия. Выполнив перенос, на рис. 8, *а* получим четыре силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, приложенные к точке K. Для определения их равнодействующей сложим последовательно все данные силы, используя правило треугольника (рис. 8, *б*).

Находим частичные равнодействующие:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

$$\vec{F}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

и, наконец, сложив все силы, определяем полную равнодействующую

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{3}$$

Промежуточные векторы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{123}$ можно не строить, а последовательно, в указанном выше порядке одну за другой отложить все заданные силы и начало первой соединить с концом последней. Фигура $OABCD$ (см. рис. 8, *б*) называется *силовым многоугольником.* Замыкающая сторона этого многоугольника представляет собой равнодействующую $\vec{F}_{\Sigma}$ заданной системы сил, равную их геометрической сумме. Необходимо обратить внимание на то, что равнодействующая сила $\vec{F}_{\Sigma}$ всегда направлена от начала первого слагаемого к концу последнего слагаемого. Иными словами, стрелка равнодействующей силы всегда направлена навстречу обходу многоугольника, соответствующему последовательному сложению заданных сил (см. рис. 8, *б*).

Когда при построении силового многоугольника конец последней слагаемой силы совместится с началом первой, равнодейству-

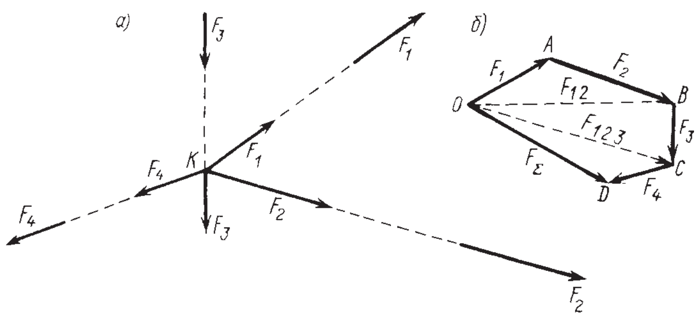

Рис. 8

ющая $\vec{F}_\Sigma$ системы сходящихся сил окажется равной нулю. В этом случае *система сходящихся сил находится в равновесии.*

Самозамыкание силового многоугольника данной системы сходящихся сил является геометрическим условием ее равновесия.

Пример 2. На рис. 9, *а* показана система четырех сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$, приложенных в точке A. Определить, уравновешена ли данная система сил?

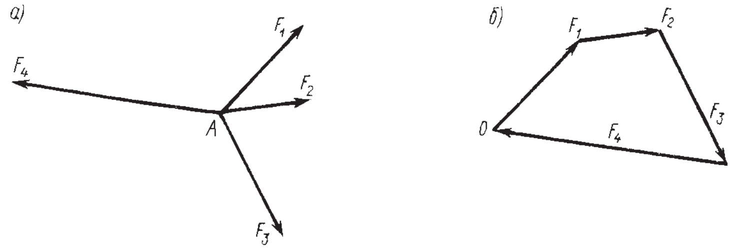

Рис. 9

Р е ш е н и е. Построение силового многоугольника выполним в последовательности, соответствующей рис. 9, *б*.

Сохраняя масштаб и направление, из произвольной точки отложим вектор первой силы $\vec{F}_1$. Из конца первого вектора силы отложим вектор второй силы $\vec{F}_2$. Аналогично отложим остальные векторы сил $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$. Конец вектора $\vec{F}_4$ совпадает с началом вектора $\vec{F}_1$.

Силовой многоугольник замкнут, равнодействующая равна нулю ($\vec{F}_\Sigma = 0$); следовательно, система уравновешена.

Упражнение 3

1. Укажите, какой вектор силового многоугольника (рис. 10) является равнодействующей силой.

А. *OA*. Б. *AB*. В. *BC*. Г. *CD*. Д. *OD*.

2. Какой из многоугольников, представленных на рис. 10 и 11, соответствует уравновешенной системе сходящихся сил?

А. Рис. 11. Б. Рис. 10.

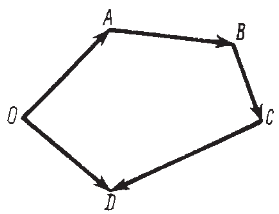

Рис. 10

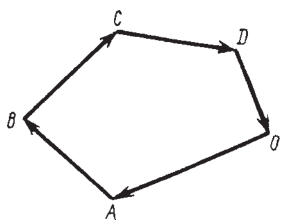

Рис. 11

§ 7. Проекция силы на ось

Решение задач на равновесие сходящихся сил с помощью построения замкнутых силовых многоугольников в большинстве случаев сопряжено с громоздкими построениями. Более общим и универсальным методом решения таких задач является переход к определению проекций заданных сил на координатные оси и оперирование с этими проекциями. *Осью называют прямую линию, которой приписано определенное направление.* Проекция вектора на ось является скалярной величиной, которая определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на нее из начала и конца вектора.

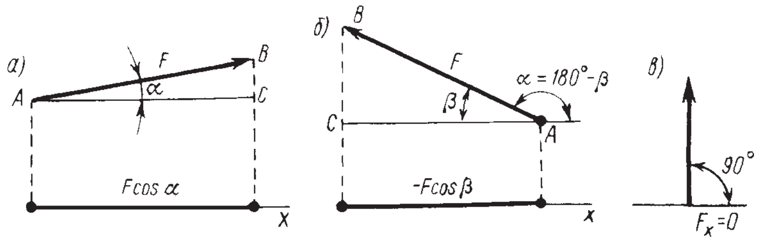

Рис. 12

Проекция вектора считается положительной (+), если направление от начала проекции к ее концу совпадает с положительным направлением оси. Проекция вектора считается отрицательной (−), если направление от начала проекции к ее концу противоположно положительному направлению оси.

Рассмотрим ряд случаев проецирования сил на ось.

1. Вектор силы $\vec{F}$ (рис. 12, *а*) составляет с положительным направлением оси x острый угол α. Чтобы найти проекцию, из начала и конца вектора силы опускаем перпендикуляры на ось x; получаем

$$F_x = F\cos\alpha. \qquad (4)$$

Проекция вектора в данном случае положительна.

2. Сила $\vec{F}$ (рис. 12, *б*) составляет с положительным направлением оси x тупой угол α. Тогда $F_x = F\cos\alpha$, но так как $\alpha = 180^\circ - \beta$,

$$F_x = F\cos\alpha = F\cos(180^\circ - \beta) = -F\cos\beta. \qquad (5)$$

Проекция силы $\vec{F}$ на оси x в данном случае отрицательна.

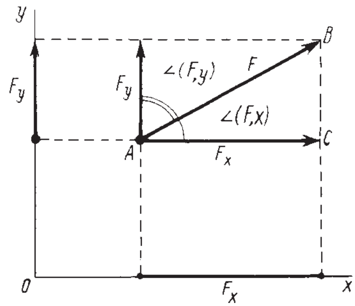

Рис. 13

3. Сила $\vec{F}$ (рис. 12, *в*) перпендикулярна к оси x. Проекция силы F на ось x равна нулю, т. е. $F_x = F\cos 90^\circ = 0$.

Итак, *проекция силы на ось координат равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси.*

Силу, расположенную на плоскости xOy (рис. 13), можно спроецировать на две координатные оси Ox и Oy. На рисунке изображена сила $\vec{F}$ и ее проекции F_x и F_y. Ввиду того что проекции образуют между собой прямой угол, из прямоугольного треугольника ACB следует:

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \\ \cos(\widehat{\vec{F},\ x}) &= F_x / F; \\ \cos(\widehat{\vec{F},\ y}) &= F_y / F. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Этими формулами можно пользоваться для определения модуля и направления силы, когда известны ее проекции на координатные оси.

§ 8. Проекция векторной суммы на ось

Рассмотрим сходящиеся силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ (рис. 14, *а*). Геометрическая сумма, или равнодействующая, этих сил $\vec{F}_\Sigma$ определяется замыкающей стороной силового многоугольника (рис. 14, *б*)

$$\vec{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Опустим из вершин силового многоугольника на ось x перпендикуляры.

Рассматривая полученные проекции сил непосредственно из выполненного построения, имеем

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}, \qquad (7)$$

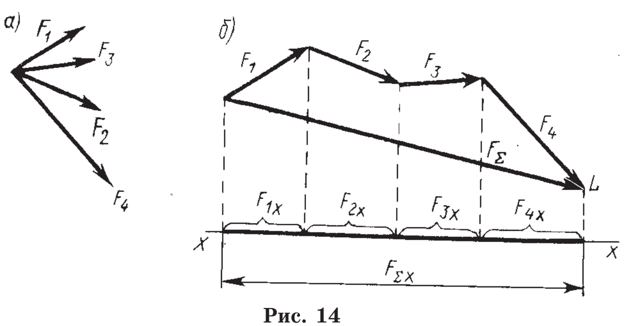

Рис. 14

или

$$F_{\Sigma x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad (7а)$$

где n — число слагаемых векторов. Их проекции входят в уравнение (7а) с соответствующим знаком.

Итак, *проекция векторной суммы или равнодействующей на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.* В плоскости геометрическую сумму сил можно спроецировать на две координатные оси, а в пространстве — соответственно на три.

Упражнение 4

1. Определить модуль и направление силы, если известны ее проекции F_x = = 30 Н; F_y = 40 Н.

2. При каком значении угла β между силой и осью проекция силы равна нулю?

А. $\beta = 0$. Б. $\beta = 90°$. В. $\beta = 180°$.

3. Определить проекцию равнодействующей силы на ось y, если известны проекции каждого из слагаемых векторов: F_{1y} = 40 Н; F_{2y} = 60 Н; F_{3y} = –100 Н; F_{4y} = –120 Н.

§ 9. Аналитическое определение значения и направления равнодействующей плоской системы сходящихся сил (метод проекций)

В системе сходящихся сил равнодействующая может быть найдена через проекции составляющих. Рассмотрим ее определение на примере системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, изображенной на рис. 15, *а*. Равнодействующая этих сходящихся сил построена на рис. 15, *б*:

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Проецируя все силы на оси Ox и Oy и используя теорему о проекции векторной суммы (см. § 8), получаем:

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{ix};$$

$$F_{\Sigma xy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{iy}.$$

Численное значение равнодействующей силы $\vec{F}_\Sigma$ через ее проекции определяется по формуле

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}. \qquad (8)$$

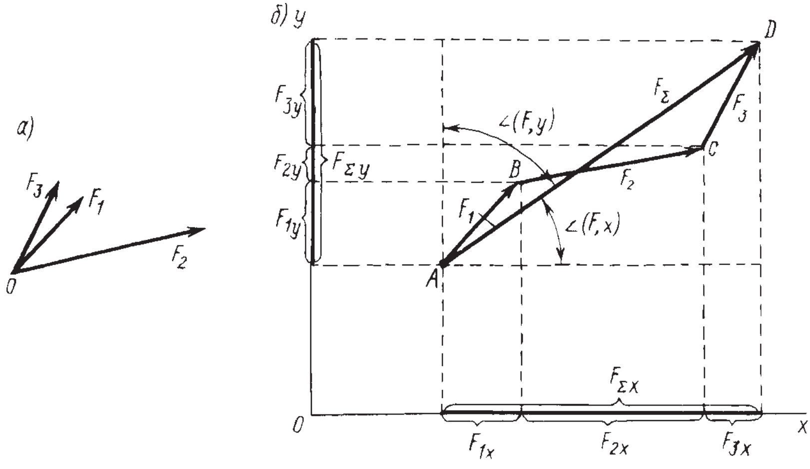

Рис. 15

Подставив в уравнение (8) значение проекций $F_{\Sigma x}$ и $F_{\Sigma y}$, найдем

$$F_\Sigma = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2}. \tag{9}$$

Направление $\vec{F}_\Sigma$ определим по косинусам углов, которые эта сила образует с координатными осями:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{F}_\Sigma,\ x}) &= F_{\Sigma x} / F_\Sigma; \\ \cos(\widehat{\vec{F}_\Sigma,\ y}) &= F_{\Sigma y} / F_\Sigma. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

§ 10. Уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил

Как было показано в § 6, сходящаяся система сил находится в равновесии в случае замкнутости силового многоугольника. Равнодействующая при этом равна нулю ($F_\Sigma = 0$). Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны суммам проекций составляющих сил на те же оси (см. § 9):

$$\left.\begin{aligned} F_{\Sigma x} &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \\ F_{\Sigma y} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел четвертый

ДЕТАЛИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН