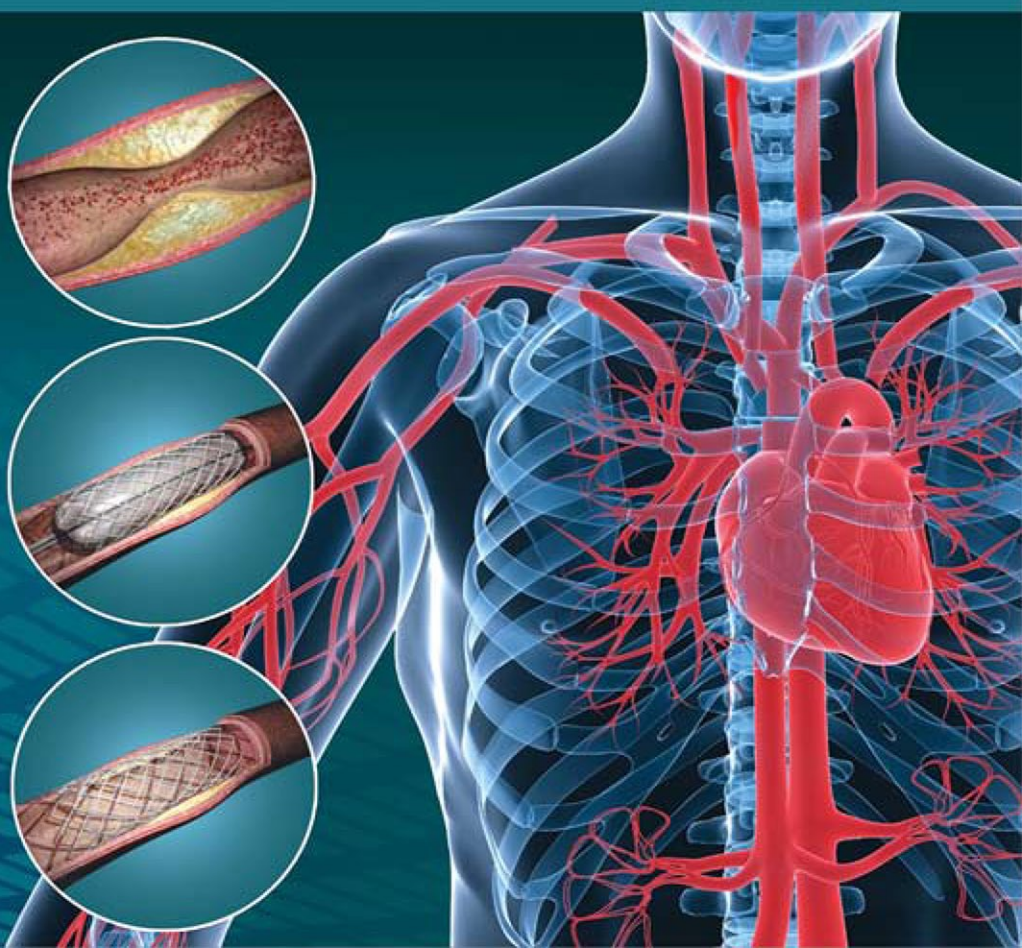




П. И. Бегун

# БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ



Электронный аналог печатного издания: Бегун П. И. Биомеханическое моделирование объектов протезирования : учебное пособие. — СПб. : Политехника, 2011. — 464 с. : ил.

УДК 531/539:61  
ББК 22.2 : 54.58я73  
Б37



**ПОЛИТЕХНИКА**  
**ИЗДАТЕЛЬСТВО**

Санкт-Петербург 2011

[www.polytechnics.ru](http://www.polytechnics.ru)

*Рекомендовано УМО вузов Российской Федерации  
по образованию в области радиотехники, электроники,  
биомедицинской техники и автоматизации  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся по направлению  
подготовки дипломированных специалистов  
200400 (653900) «Биомедицинская техника»  
по специальности 200401 (190500) «Биомедицинские  
и медицинские аппараты и системы»,  
200402 (190600) «Инженерное дело в медико-биологической  
практике» и направлению подготовки бакалавров  
и магистров 200300 (553400) «Биомедицинская инженерия»*

**Бегун, П. И.**

**Б37** Биомеханическое моделирование объектов протезирования: учебное пособие / П. И. Бегун. — СПб. : Политехника, 2011. — 464 с. : ил.

ISBN 978-5-7325-0988-5

Учебное пособие составлено в соответствии с государственными образовательными стандартами для подготовки магистров по программе «Биотехнические системы и технологии управления состоянием человека и окружающей среды» по профилю «Биотехнические системы и технологии в протезировании и реабилитации».

В учебном пособии изложены теоретические основы математического и физического моделирования объектов протезирования и методы их моделирования с использованием пакетов прикладных программ в различных областях медицинской деятельности: кардиологии, ортопедии, отоларингологии, офтальмологии, урологии, герниологии, неврологии.

УДК 531/539:61

ББК 22.2 : 54.58я73

© П. И. Бегун, 2011  
ISBN 978-5-7325-0988-5 © Издательство «Политехника», 2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
Глава 1. ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ . . . . .	7
Глава 2. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ . . . . .	17
Глава 3. СТАТИЧЕСКИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ . . . . .	34
3.1. Расчет внутренних сил и напряжений . . . . .	–
3.2. Расчет перемещений . . . . .	39
3.3. Примеры моделирования объектов протезирования . . . . .	42
Глава 4. ОБОЛОЧЕЧНЫЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ . . . . .	53
4.1. Расчет по схеме симметричных оболочек по безмоментной теории . . . . .	56
4.2. Расчет по схеме осесимметричных гибких оболочек . . . . .	57
4.3. Примеры моделирования объектов протезирования . . . . .	65
Глава 5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ . . . . .	71
5.1. Определение координат точки незамкнутой пространственной системы в неподвижной системе координат . . . . .	75
5.2. Определение линейных скоростей и ускорений точки звена незамкнутой пространственной системы в абсолютной системе координат . . . . .	81
5.3. Определение угловых скоростей и ускорений звеньев незамкнутой пространственной системы в абсолютной системе координат . . . . .	84
5.4. Примеры моделирования объектов протезирования . . . . .	85
Глава 6. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ . . . . .	90
6.1. Расчет напряжений при ударе . . . . .	–
6.2. Приведенные параметры динамической модели . . . . .	93
6.3. Уравнения движения . . . . .	98
6.4. Примеры построения динамических моделей . . . . .	102
Глава 7. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ . . . . .	121
7.1. Особенности метода конечных элементов . . . . .	122
7.2. Моделирование биологических объектов в конечно-элементных пакетах Solid Works и Cosmos Works . . . . .	124
7.2.1. Моделирование мешотчатой аневризмы в конечно-элементных пакетах Solid Works и Cosmos Works . . . . .	125
7.2.2. Моделирование структур среднего уха в конечно-элементных пакетах Solid Works и Cosmos Works . . . . .	133
7.3. Моделирование объемных медицинских изображений по томограммам . . . . .	143
Глава 8. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ. МЕТОДЫ ПОДОБИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ . . . . .	149
8.1. Размерности. Безразмерные комбинации параметров. $\pi$ -теорема . . . . .	–

8.2. Моделирование по методу классического подобия . . . . .	153
8.3. Физическое моделирование остеосинтеза длинных трубчатых костей . . . . .	158
8.4. Моделирование кровотока в протезах клапанов сердца . . . .	166
<b>Г л а в а 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ В КАРДИОЛОГИИ</b>	<b>172</b>
9.1. Протезирование и коррекция кровеносных сосудов . . . . .	—
9.2. Моделирование дилатации кровеносного сосуда со склеротической бляшкой . . . . .	182
9.3. Моделирование дилатации коарктации аорты . . . . .	197
9.4. Моделирование аневризматических образований . . . . .	212
9.5. Моделирование сегмента дегенеративно-измененного арте- риального сосуда . . . . .	229
9.6. Моделирование сегментов артериальных сосудов с концент- раторах напряжений . . . . .	232
9.7. Моделирование левого желудочка сердца . . . . .	242
9.8. Моделирование коррекции клапанов сердца . . . . .	254
<b>Г л а в а 10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ В ОРТОПЕДИИ И ТРАВМАТОЛОГИИ</b> . . . . .	<b>263</b>
10.1. Моделирование остеосинтеза костей предплечья . . . . .	274
10.2. Моделирование чрескостного остеосинтеза бедренной кости	286
10.3. Моделирование большеберцовой кости в норме, при остео- некрозе и коррекции . . . . .	292
10.4. Моделирование структур позвоночника . . . . .	299
<b>Г л а в а 11. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ В ОТОЛАРИН- ГОЛОГИИ</b> . . . . .	<b>315</b>
11.1. Моделирование барабанной перепонки . . . . .	316
11.2. Моделирование структур среднего уха при патологиях и коррекции барабанной перепонки . . . . .	320
11.3. Моделирование реконструкции структур среднего уха . . .	325
<b>Г л а в а 12. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ В ОФТАЛЬМО- ЛОГИИ</b> . . . . .	<b>334</b>
12.1. Моделирование деформированного состояния глаза при опе- рации по поводу отслойки сетчатки . . . . .	341
12.2. Моделирование отслоения сосудистой оболочки глаза . . .	348
12.3. Моделирование пломбирования глаза . . . . .	351
12.4. Моделирование капсулы глазного яблока . . . . .	353
12.5. Моделирование диска зрительного нерва . . . . .	362
<b>Г л а в а 13. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ В УРОЛОГИИ</b>	<b>367</b>
13.1. Моделирование мочевого пузыря в норме . . . . .	372
13.2. Моделирование мочевого пузыря с дивертикулом . . . . .	374
13.3. Моделирование реконструированного мочевого пузыря . .	377
<b>Г л а в а 14. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ В ГЕРНИОЛОГИИ</b>	<b>386</b>
14.1. Моделирование передней брюшной стенки при патологии и коррекции . . . . .	394

14.2. Моделирование паховой области при патологиях и коррек- ции . . . . .	402
Приложение 1. Свойства материалов протезов и имплантатов . . .	410
Приложение 2. Механические свойства биологических структур . . .	421
Приложение 3. Геометрические параметры и механические свой- ства кровеносных сосудов . . . . .	423
Приложение 4. Геометрические параметры структур сердца . . . .	429
Приложение 5. Влияние организма на материалы имлантатов . . .	434
Приложение 6. Соотношения внесистемных единиц с единицами СИ	435
Приложение 7. Множители и приставки для образования десятич- ных кратных и дольных единиц и их наименований . . . . .	436
Приложение 8. Задания для самостоятельной работы . . . . .	438
Словарь терминов . . . . .	445
Список литературы . . . . .	455

# Г Л А В А 1

## ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ

*Протез* — аппарат или приспособление, служащие для восполнения или замещения отсутствующей части тела либо органа. Функциональный протез выполняет частично или полностью функцию отсутствующего органа. Биоуправляемый протез — функциональный протез, приводимый в движение электродвигателем или сжатым воздухом и управляемый биоэлектрическими сигналами с мышц культи. Косметический протез обладает лишь внешними признаками протезируемого органа или части тела, но не восстанавливает его функции.

*Трансплантат* — ткань или орган, перемещенные из одного организма либо его части в другой организм либо его часть. Аутотрансплантат — трансплантат ткани или органа, перемещенный из одной части организма человека в другую часть организма того же человека. Аллотрансплантат — трансплантат ткани или органа, перемещенный от одного человека другому. Ксенотрансплантат — трансплантат ткани или органа, перемещенный человеку от другого вида.

Введение в медицинскую практику новых методов протезирования связано с необходимостью значительного расширения и углубления информационного обеспечения. Отсутствие необходимой информации создает объективные трудности при выполнении протезирования и не позволяет планировать успех и предсказать исход технически правильно выполненных манипуляций.

*Информация* — это сведения о системе, ее структуре и функции, выраженные моделью. Поэтому особое значение в жизнедеятельности приобретают вопросы моделирования, базовыми элементами которого являются реально существующие и создаваемые объекты. В связи с этим возрастает роль обоснованного выбора моделей.

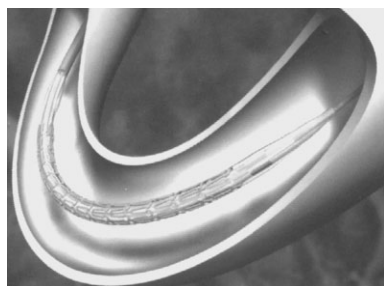
Моделирование состоит в выделении свойств объекта и его взаимодействия с другими объектами, отражении осо-

бенности функционирования при различных внешних воздействиях и логическом анализе собранной информации.

Модель отражает структуру и функцию системы-оригинала средствами структуры или функции тех элементов, из которых она строится. Всякое познание можно трактовать как моделирование, а имеющиеся знания — как модели, отражающие какой-то объект.

Например, при малоинвазивных интервенционных рентгенохирургических операциях, с установкой протезов — стентов (рис. 1.1, 1.2) — при дилатации стенозированных кровеносных сосудов, для определения величины и характера воздействия на патологическую структуру при обеспечении минимально возможного повреждения кровеносного сосуда необходимо располагать информацией о его патофизиологических, морфологических, геометрических и механических характеристиках и процессах реконструкции органа как следствия различных режимов воздействия на биологическую структуру при определенном физиологическом состоянии организма пациента в целом. На различных стадиях развития патологического образования каждая из перечисленных характеристик принимает существенно различные значения.

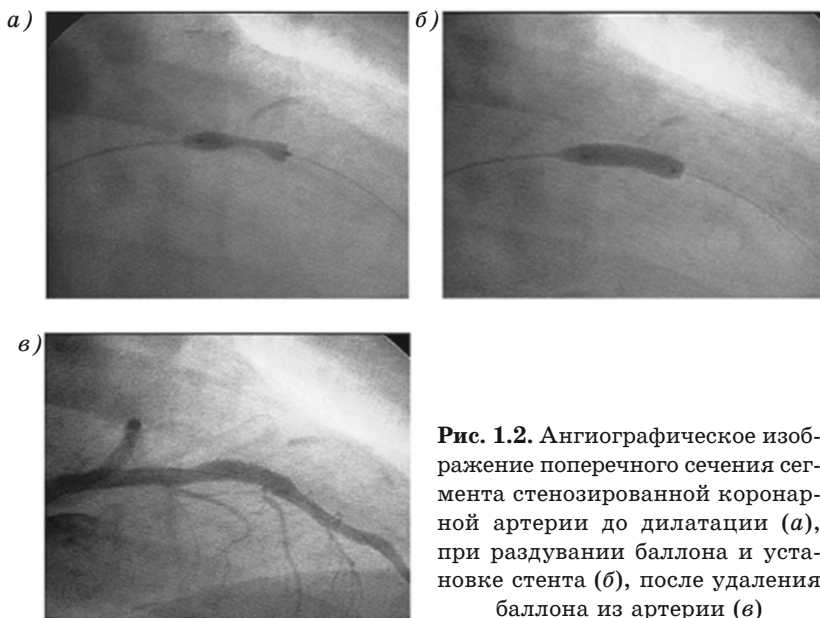
*Решение проблемы* — разработка медицинских биотехнических систем предоперационной диагностики хирургических операций структур человеческого организма на основе выявленных принципов диагностики биологических структур и методов проектирования протезов, функционально



**Рис. 1.1.** Схема коронарной стенозной системы — стент на баллоне

адекватных и биомеханически, биохимически и биофизически совместимых со структурами человеческого организма.

Во всех принципиальных направлениях проблемы: медицинских, технических и фундаментальных — неотъемлемой частью является моделирование на основе биомеханики системы биологический объект — протез. При этом построение



**Рис. 1.2.** Ангиографическое изображение поперечного сечения сегмента стенозированной коронарной артерии до дилатации (а), при раздувании баллона и установке стента (б), после удаления баллона из артерии (в)

моделей функционирования структур человеческого организма в норме, патологии и при хирургических операциях целиком и полностью зависит от использования всего арсенала новых методов и средств исследования.

*Модель* — это объект любой природы, умозрительный или материально реализованный, который воспроизводит явление, процесс или систему в целях их исследования или изучения. *Моделирование* — метод исследования явлений, процессов и систем, основанный на построении и исследовании их моделей.

*Содержательная модель* — это умозрительное представление реального объекта для построения математической или физической модели, в которой отражены свойства реального объекта, необходимые для получения ответа на поставленную задачу.

Каждое исследование в области технических наук включает следующие этапы: 1) постановку задачи; 2) построение содержательной модели и выяснение при помощи теории ее закономерностей; 3) практические выводы по результатам проведенных исследований.



*Математическая модель* — это система математических соотношений — формул, уравнений, неравенств и т. д., отражающих существенные свойства объекта или явления. Это абстракция, в которой функционирование реальных объектов и взаимоотношения между ними заменены отношениями математических категорий.

Прежде чем свести задачу к математической модели, необходимо серьезно подумать над тем, как правильно воспринимать реальную конструкцию, особенности ее функционирования и как обоснованно построить содержательную модель.

Необходимо путем минимального отступления от действительной конструкции максимально приблизить содержательную модель к разработанному эффективному методу и (или) находящимся в распоряжении пакетам прикладных программ. При этом в процессе моделирования постепенно углубляется понимание поставленной задачи.

При сравнении моделей оценивают следующие свойства: 1) адекватность; 2) простоту и оптимальность; 3) гибкость; 4) универсальность и проблемную ориентацию; 5) эффективность машинной реализации.

**А д е к в а т н о с т ь** (лат. *adaequatus* — правильный, сравнимый, вполне соответствующий). Этим свойством должна обладать модель по отношению к исследуемым свойствам объекта. Для сложных объектов можно построить модель, отражающую лишь какую-либо их сторону. В этом случае адекватность — отражение только какой-то стороны объекта. Оценка адекватности модели — уровень достижения цели моделирования.

Точность модели зависит от возможностей моделирования в конкретной области знаний, от сложности объекта и от метода моделирования. Структура и функции объекта моделируются упрощенно либо потому, что еще не известны соответствующие математические и программные средства, либо потому, что недостаточно ясна суть рассматриваемого явления. Самая точная модель — копия, но в механике и биомеханике это недопустимый предел. Трудно предположить возможность создания точной копии даже клет-

ки, так как сложные органические молекулы, из которых она составлена, неодинаковы.

**Простота и оптимальность.** Если модели имеют примерно одинаковую адекватность, целесообразно реализовать более простую. Если рассматриваемая система состоит из нескольких моделей, то результат моделирования определяется как свойствами каждой модели в отдельности, так и характеристиками их взаимодействия. При этом необходимо помнить, что абсолютно наилучшее решение находится, как правило, на пределе возможностей системы и малейшее отклонение ее разрушает. Все оптимальные системы, как правило, крайне неустойчивы.

**Гибкость (аддитивность).** Модель должна быть параметрической. *Параметрическая модель* — описание объекта, которое позволяет вариациями параметров в заданных пределах получить все множество его состояний.

**Универсальность и проблемная ориентация.** Модели должны быть специализированы по типу объектов и универсальны по исследуемым функциям.

**Эффективность машинной реализации.** Использование компьютерных программ, основанных на численных методах, позволяет углубиться в области, которые остаются не обслуженными аналитическими методами из-за больших трудностей в реализации. Аналитический метод и метод компьютерного численного анализа — взаимопроницающие и дополняющие друг друга методы. При мощном программном обеспечении компьютерный численный анализ занимает доминирующее положение. При этом возможности компьютера, освобождая от многого, не освобождают от необходимости творчески мыслить.

Следующий этап моделирования заключается в переводе содержательной модели на формальный математический язык соответствующего уровня. Математическое моделирование конструкций представляет собой аналитическое описание идеализированных систем и процессов, отображающих существенные свойства объекта или явления. Это система математических соотношений — формул, уравнений, неравенств.

Математические модели строят либо на основе экспериментальных данных, либо умозрительно, используя гипотезу или известную закономерность какого-то явления. При этом математическое моделирование требует последующей опытной проверки.

Наиболее эффективно математическую модель можно реализовать на компьютере в виде алгоритмической модели — так называемого вычислительного эксперимента. Если в модели не будут учтены какие-то важные стороны объекта, возможно несоответствие результатов вычислительного эксперимента действительности. В этом случае следующий этап состоит в вскрытии моментов, не укладывающихся в установленную схематизацию, и в переходе к построению новых допущений, полнее охватывающих исследуемый процесс.

Одного умения работать с математическими формулами недостаточно для углубленного понимания существа процессов, происходящих в элементах конструкций. А. Пуанкаре по этому поводу сделал по сути справедливое замечание: «Если человек не понимает проблему, он пишет много формул, а когда наконец поймет, в чем дело, — остаются в лучшем случае две формулы».

Искусство построения математической модели состоит в том, чтобы совместить как можно большую лаконичность в ее математическом описании с достаточной точностью модельного воспроизводства именно тех сторон анализируемой реальности, которые интересуют при данном анализе.

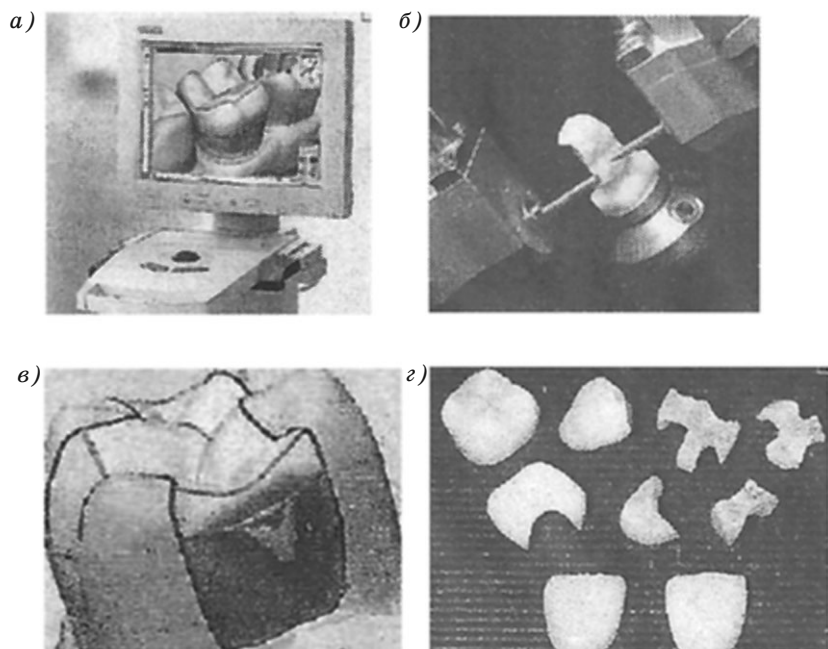
Биомеханический анализ с использованием компьютерных программ может показать и несостоятельность новых технологических решений в протезировании.

*Компьютерная модель* — отдельная программа, совокупность программ, программный комплекс, позволяющие с помощью последовательности вычислений и графического отображения их результатов воспроизводить процессы функционирования объекта при условии воздействия на него различных факторов.

*Компьютерное моделирование* — эффективный метод решения задач анализа и синтеза сложных систем на основе имеющихся моделей. В то время как у моделирования на ЭВМ методическая основа — разделы теорий математических мо-

делей, у компьютерного моделирования — системный анализ. Это гибкое средство, которое усиливает возможности человека, использующего его для более глубокого понимания проблемы. Например, в медицине применение методов компьютерного моделирования открывает возможность дальнейшего совершенствования стратегии или тактики лечения и реконструкции поврежденных биологических структур с позиций научно обоснованного и строго индивидуального подхода.

**Пример. Метод компьютерного моделирования и изготовление фарфоровых восстановителей зубов.** Этот метод позволяет за одно посещение пациента, без установки каких-либо временных протезов, конструировать и изготавливать не содержащие металлов восстановителей зубов. Вместо традиционного слепка используется трехмерная видеокамера, а вместо слепочных масс и моделей — оперативная память компьютера.



**Рис. 1.3.** Последовательность моделирования и изготовления фарфоровых восстановителей зубов: *а* — построение конструкции; *б* — изображение на дисплее; *в* — готовая вкладка; *г* — изготовленные вкладки

При помощи 3D-камеры изображение фиксируется на экране монитора, и стоматолог приступает к построению конструкции (рис. 1.3, а). Врач на экране монитора моделирует недостающую часть зуба (рис. 1.3, б). После прорисовки всех линий по разработанной программе вычисляется объем вкладки. Эти данные поступают в шлифовальный блок, имеющий шесть степеней свободы (рис. 1.3, в), который с высокой точностью выполняет необходимый имплантат-вкладку. Через 10–20 мин вкладка готова (рис. 1.3, г). Приступают к примерке и фиксации. В обычной лаборатории на эту работу в лучшем случае необходимо 2–3 дня. Расстояние между вкладкой и стенкой зуба 25–60 мкм позволяет применять минимальное количество адгезионного материала.

Физическое моделирование основано на воспроизведении физическими способами биотехнических объектов, функций или процессов. Физическое моделирование позволяет заменить изучение реального объекта исследованием характеристик уменьшенной или увеличенной механически подобной модели с последующим переходом от параметров модели к соответствующим параметрам биотехнического объекта. Научную основу физического моделирования составляет теория подобия. Методы теории подобия позволяют перейти от исходных физических величин к некоторым обобщенным переменным — критериям подобия. Этим достигаются уменьшение количества физических параметров, описывающих явлений и большая общность получаемых результатов.

В основу моделирования биотехнических систем протезирования должны быть положены следующие принципы.

1. Геометрические и механические характеристики моделей биологических объектов должны соответствовать индивидуальным характеристикам структур конкретного человеческого организма.

2. Из общего набора существующих к моменту построения модели сведений об исследуемом объекте необходимо прежде всего выделить наиболее существенные для исследуемого процесса. Затем сформулировать качественные особенности физиологического процесса. После этого можно переходить к его количественному описанию.

3. При исследовании напряженно-деформированного состояния биологических структур в расчетные схемы необходимо включать окружающие биологические структуры.

4. При задании внешних воздействий надо учитывать физиологический процесс, происходящий в рассматриваемом биологическом объекте и окружающих его структурах. Должны учитываться изменения механических свойств на протяжении физиологического цикла исследуемого объекта и окружающих его структур.

5. При исследовании напряженно-деформированного состояния реконструированной биологической структуры необходимо учитывать изменение во времени как механических свойств биологического объекта и окружающих его структур, так и технических элементов.

6. При разработке протезов необходимо предусмотреть их надежное функционирование в течение определенного срока жизни.

7. Биотехническая система должна быть разработана с учетом внешних воздействий, возникающих в человеческом организме в критических ситуациях.

8. При внешних воздействиях протезы должны испытывать деформированное состояние, адекватное тем биологическим структурам, для замены которых они предназначены. Они не должны быть источниками концентрации напряжений в зоне контакта протеза и биологической структуры и при этом нарушать физиологический процесс.

В настоящее время моделирование биотехнических систем протезирования в различных областях медицины находится на разных технологических уровнях.

Примеры. А. В стоматологии начиная с 1980 г. появились технологии, позволяющие изготавливать протезы с помощью компьютерного управления. Их можно разделить на три вида. 1. Система CAD (компьютерное моделирование, трехмерный сканер — 3D). Находится в кабинете или в зуботехнической лаборатории, сканирует и передает сообщение на систему CAM (компьютерное управление процессом изготовления) в имеющуюся зуботехническую лабораторию или в зуботехническую лабораторию другого города страны для изготовления протеза либо его карка-

са. 2. Система САМ. В нее входят: компьютер, обрабатывающий информацию и производящий моделирование будущего протеза, и фрезерная установка с компьютерным управлением, изготавливающая протез. Система находится в зуботехнической лаборатории клиники или на заводе, принимает сообщения из клиники или зуботехнической лаборатории, находящейся в другом месте. 3. Система САД/САМ, включающая в себя все три элемента (сканер, компьютер, выполняющий моделирование протеза, и фрезерный аппарат).

Б. В кардиологии разработаны содержательные модели протезирования кровеносных сосудов, реализованные в пакетах прикладных программ.

В. В урологии разрабатываются модели искусственных мочевых пузырей.

## Г Л А В А 2

### СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ ПРОТЕЗИРОВАНИЯ

Реальная конструкция, освобожденная от несущественных особенностей, носит название *содержательной модели*. Она строится после анализа поставленной проблемы. Построение содержательной модели состоит в выявлении основных факторов, характеризующих исследуемый объект и необходимых для получения ответа на поставленную задачу, логического анализа взаимоотношения выявленных факторов, определения параметров, не укладывающихся в построенную модель, и собственно в построении новой модели.

В содержательных моделях должны быть: 1) выделены положения, на которых основывается математическая модель; 2) определены исходные данные; 3) выявлены параметры, которые дают ответы на вопросы, связанные с проблемой, для решения которой была поставлена задача.

В биомеханике состояние биологического объекта и элемента конструкции определяют параметрами: *напряжение, деформация, перемещение*. Задача заключается в том, чтобы при минимальном отступлении от реальной конструкции максимально приблизить содержательную модель к разработанному эффективному методу. В механике таким методом является теория деформированного тела.

При деформации приложенные силы совершают работу. Если материал упругий, то работа запасается в виде потенциальной энергии. Эта энергия высвобождается по мере того, как уменьшаются действующие силы. Если материал пластичный, то работа пойдет на изменение его физического состояния.

В теории деформаций построены соотношения, позволяющие каждой части конструкции придать размеры, соответствующие тем силам, действиям которых они должны соответствовать.

Механика твердого деформированного тела имеет в своей основе три системы уравнений: 1) уравнения равновесия;



2) уравнения совместности деформаций; 3) физические, или, как их называют иначе, определяющие, уравнения.

Уравнения совместности деформаций имеют чисто геометрический характер и состояются аналитически с любой степенью точности.

Уравнения равновесия и определяющие уравнения опираются на экспериментальные данные. Определяющие уравнения состояются на основании эксперимента, выясняющего сопротивление тела внешним воздействиям. При этом мера достоверности теории полностью зависит от полноценности и точности эксперимента, положенного в ее основу, и от адекватности отображения результатов этого эксперимента в математическом аппарате теории через определяющие уравнения.

Точность экспериментальных исследований, достаточная для того, чтобы установить зависимость между нагрузкой и деформацией при малых и больших деформациях, была достигнута в 40-е годы XIX века. Тогда же начались исследования деформационных свойств тканей человеческого организма — костей, мышц, нервов.

Внутренние силы, возникающие в деформируемом теле, не зависят от свойств материала. Гипотезой, служащей для механического описания действия внутренних сил в деформируемом теле, является принцип напряжений Эйлера и Коши: в каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри тела, имеет место взаимодействие сил такого же характера, как и распределенных по поверхности нагрузок.

При деформации возникает смещение масс, связанное с возникновением энергии движения. Если ускорения малы, то можно считать, что в любой момент нагружения система находится в равновесии (кинетическая энергия мала по сравнению с упругой энергией деформируемого тела). Если эти энергии соизмеримы, то в таком случае нагружение следует рассматривать как динамическое.

Деформируемые тела (и твердые тела, и жидкости) меняют свои размеры и форму под действием внешних сил. В твердых телах они вызывают деформации, в жидких — течение. При этом и в том и в другом случаях возникают внут-

рение силы. Значение и распределение этих сил в рассматриваемых телах зависят как от нагрузки, так и от геометрической формы тел.

Деформации определяют нагруженное состояние тела. Если принимается гипотеза, определяющая, что свойства материала подчиняются закону Гука, то прослеживается линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

Стремление материалов принять конфигурацию, соответствующую минимальной упругой энергии, можно рассматривать как общее свойство материалов, подчиняющихся закону Гука. Допущение в теоретических построениях о линейно-упругом поведении материала позволяет значительно упростить математическое описание. Все уравнения линейны относительно искомых величин и их производных. Следует заметить, что при очень высокой точности измерения деформаций, практически начиная от нулевого напряжения, зависимость между напряжениями и деформациями нелинейная. Таким образом, и предел пропорциональности, и предел упругости являются величинами, значения которых условны и не зависят от точности средств измерения. Несмотря на это, для практически важных конструктивных материалов степень отклонения этой зависимости от линейной в достаточно большом рабочем диапазоне значений напряжений столь невелика, что при построении инженерной теории вполне может быть принят закон Гука.

Линейную зависимость между напряжениями и деформациями с этой точки зрения следует рассматривать как аппроксимацию экспериментально обнаруживаемой зависимости.

В теории трехмерного тела линейная зависимость дает приемлемые результаты для каждого материала лишь до определенной комбинации значений компонентов напряжений. При этом влияние меры отклонения зависимости напряжение — деформация от линейной на напряженное состояние тем меньше, чем меньше неоднородность напряжений.

Статические содержательные модели строят для исследования напряженно-деформированного состояния неподвиж-

ных элементов конструкций и подвижных элементов конструкций в заданном мгновенном состоянии.

Допущения, принимаемые при переходе от реальных конструкций к кинематическим и динамическим содержательным моделям, подробно рассмотрены в дисциплине «Прикладная механика».

В динамических содержательных моделях приведенные параметры: 1) силы и моменты; 2) массы и массовые моменты инерции; 3) коэффициенты жесткости; 4) коэффициенты диссипации — определяют из условий равенства работ возможных перемещений и равенства кинетической и потенциальной энергий реальной конструкции и содержательной модели.

Понятие динамической системы возникло как понятие механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона. В настоящее время для исследования этих систем используют два разных подхода.

При первом подходе модель динамической системы основывается на понятии состояния системы. Система описывается в некоторый момент выражением, определяющим изменение этого состояния во времени.

Если при построении модели не возникает сложностей определения сил инерции, то для записи уравнения движения удобно использовать принцип д'Аламбера: «Эффективные силы, представляющие собой сумму активных действующих сил и сил инерции, уравниваются реакциями связей».

При втором подходе для изучения динамических систем исследуется функциональная сторона системы. Система рассматривается как «черный ящик», обладающий входными и выходными переменными. Модель определяется пространством входов и выходов и оператором, который осуществляет преобразование входных переменных в выходные. В нашей дисциплине использован первый подход.

В кинематических содержательных моделях: 1) материал звеньев считают абсолютно твердым; 2) зазорами в кинематических парах и соединениях пренебрегают; 3) движение звеньев исследуют независимо от сил, действующих на подвижную систему; 4) размеры звеньев определяют рас-

стояния между осями кинематических пар в недеформированном состоянии; 5) конструктивные особенности звеньев, не влияющие на характер движения, не учитывают.

При составлении статических содержательных моделей схематизируют: 1) свойства материала конструкции; 2) геометрию рассчитываемого объекта; 3) характер закрепления; 4) внешнюю нагрузку.

Материал наделяют свойствами сплошности в пределах выделенной в модели области. В схеме сплошного материала отвлекаемся от его структурных особенностей и молекулярного строения. Среда наделяется свойством заполнять непрерывно, без пустот, весь объем в пределах установленных границ.

Объект рассматривается как трехмерное евклидово пространство, точки которого совпадают с частицами тела. В математическом смысле это непрерывная среда. Близкие точки при деформации переходят также в близкие точки. Возможность появления в теле при деформации трещин и пустот исключается.

Предпосылки о сплошности позволяют пользоваться методом анализа бесконечно малых. Эта предпосылка приемлема до тех пор, пока размеры изделия значительно превышают межатомные расстояния. При этом в механике есть задачи, постановка которых лежит на пределе и за пределом применимости понятия сплошности. Например, задачи о развитии трещин.

Основанием для введения модели сплошной среды является опыт, делающий возможным экспериментальную проверку рассматриваемой теории. При нагружении под действием внешних сил материальные частицы меняют свое положение в пространстве, сплошная среда движется.

Однородность материала предполагает неизменность физических и механических свойств в пределах выделенной в модели области, а изотропность — независимость этих свойств от угловой ориентации.

Вводится предположение, что в материале отсутствуют начальные напряжения.

Механика как наука представляет собой: с одной стороны, набор разработанных общих моделей для трех классов геометрических объектов: стержни, оболочки, трехмерные

тела, с другой стороны, метод получения этих моделей и их использования для построения моделей биологических структур и элементов конструкций в рамках математических теорий, разработанных для этих классов объектов. Достоверность теории стержней и теории оболочек обеспечена многочисленными исследованиями, проведенными методами теории упругости.

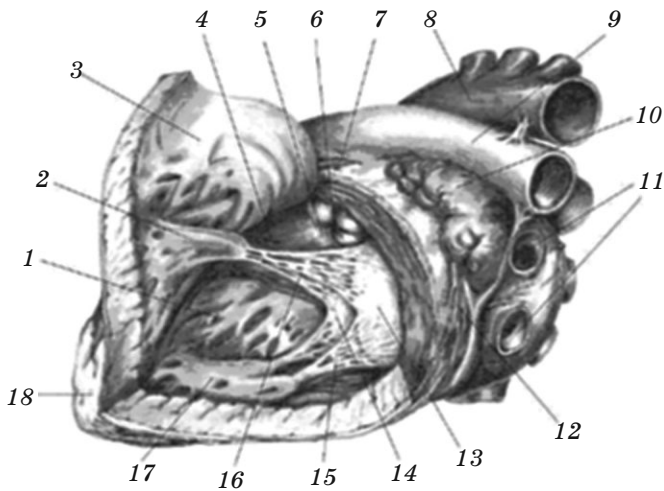
Анализ биологических структур и элементов конструкций может быть проведен только в пределах той точности, которая уже заложена в используемые теории стержней, оболочек или трехмерных тел.

*Стержень* — тело, один размер которого (длина) значительно больше других. Стержень определен, если заданы его ось и поперечное сечение (в общем случае — переменное). В теории стержней: 1) перемещения второго порядка малости не учитываются; 2) нормальные напряжения при плоском поперечном изгибе определяются при допущении, что стержень сохраняет плоское сечение.

При определенном уменьшении поперечного сечения стержня он теряет способность воспринимать изгибающие моменты. В этом случае принимают, что жесткости стержня на изгиб, кручение и сжатие равны нулю — стержень работает только на растяжение. Пример: сухожильные хорды митрального клапана (рис. 2.1).

*Оболочка* — тело, один из размеров которого (толщина) значительно меньше двух других. Оболочка геометрически определена, если заданы форма срединной поверхности и толщина. В общем случае срединная поверхность может иметь любую форму, а толщина — быть переменной. Примеры: створки клапанов, межжелудочная перегородка (рис. 2.1).

В теории оболочек, на основании особенностей их формы, делают два основных допущения о напряжениях и деформациях: 1) ввиду незначительной толщины нормальные напряжения в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности, равны нулю; 2) точки, находящиеся на перпендикуляре к срединной поверхности, после деформации также будут находиться на прямой, перпендикулярной к деформированной срединной поверхности, и расстояние между ними не меняется.



**Рис. 2.1.** Левый желудочек (вскрыт):

1 — мясистые трабекулы; 2 — задняя сосочковая мышца; 3 — задняя стенка левого желудочка; 4 — межжелудочковая перегородка; 5 — мембранозная часть межжелудочковой перегородки; 6 — аортальный клапан; 7 — передняя нисходящая ветвь левой коронарной артерии; 8 — дуга аорты; 9 — левая ветвь легочной артерии; 10 — ушко левого предсердия; 11 — легочные вены; 12 — огибающая ветвь левой коронарной артерии; 13 — задняя створка митрального клапана; 14 — передняя створка митрального клапана; 15 — задняя группа хорд; 16 — передняя группа хорд; 17 — передняя сосочковая мышца; 18 — верхушка левого желудочка

Второе допущение и закон Гука устанавливают распределение напряжений по сечению, перпендикулярному к срединной поверхности. Равномерно распределенные по толщине напряжения, обусловленные растяжением оболочки, складываются с изгибными напряжениями, распределенными по толщине оболочки по линейному закону.

Если при заданных граничных условиях оболочка не изгибается, то в окружном и меридиональном направлениях возникают лишь нормальные напряжения, равномерно распределенные по толщине. В оболочке, защемленной по краю, изгибные напряжения по мере удаления от краев уменьшаются, и на достаточном удалении от краев будет преобладать растяжение (сжатие).

Тонкие оболочки сопротивляются изгибу незначительно — для них строится безмоментная теория.

Выбор схемы стержня или оболочки определяется не только формой конструкции, но и рядом других соображений, связанных, например, с характером напряженного состояния исследуемого объекта. В случае переменных нагрузок, вызывающих усталостное разрушение, необходимо учитывать мелкие геометрические особенности — отверстия, канавки, являющиеся очагами концентрации напряжений. При постоянных нагрузках они несут существенны для пластического состояния материала и существенны для хрупкого состояния.

При расчете биологического объекта как трехмерного тела имеем дело с неоднородным напряженным состоянием. При оценке предельных состояний материала конструкции, как правило, используют гипотезу энергии формообразования (при пластических деформациях) и гипотезы внутреннего трения и наибольших нормальных напряжений (при хрупком состоянии материала), прочно вошедшие в инженерную расчетную практику и представляющие удобства при решении многих задач.

Согласно гипотезе энергии формообразования (критерий Мизеса) пластические деформации возникают тогда, когда удельная энергия формообразования достигает некоторого предела. Эквивалентное напряжение  $\sigma$  в окрестности точки тела рассчитывается по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения.

Гипотезу внутреннего трения (критерий Мора—Кулона) применяют при исследовании хрупкого состояния материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию. Эквивалентное напряжение зависит от первого  $\sigma_1$  и третьего  $\sigma_3$  главных напряжений ( $\sigma = \sigma_1 - \sigma_3$ ). Для исследования хрупкого состояния материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, применяют гипотезу наибольших нормальных напряжений. Эквивалентное напряжение определяет первое главное напряжение  $\sigma_1$ .

Таким образом, мы пользуемся феноменологическим подходом, который описывает внешнюю суммарную сторону

происходящих в материале микропроцессов, проявляющуюся в численных значениях механических характеристик материалов.

Следующий этап моделирования заключается в переводе содержательной модели на формальный математический язык соответствующего уровня.

Попытка учесть при математическом моделировании все известные особенности структуры биологического объекта приводит к резкому усложнению описывающих его выражений.

Чем сложнее исследуемая часть организма, тем менее определенной становится задача разделения ее на обособленные части и тем более неопределенными требования к характеристикам расчетных схем и математических моделей этих объектов. Поэтому основными условиями построения содержательных моделей биологического объекта являются возможно более полный анализ и формализация той функции, которую он выполняет в процессе жизнедеятельности организма или его соответствующей части.

Построение содержательных моделей связано с очень большой и кропотливой работой по выявлению необходимых количественных данных по анатомии, морфологии и физиологии исследуемого объекта и его механических свойств. Многие необходимые данные отсутствуют в литературе, а механические свойства исследуемого объекта, если и удастся обнаружить, часто получены при исследованиях *in vitro*. Поэтому при выполнении работы необходим тесный контакт с медицинскими работниками, специализирующимися в конкретной области. Содержательные модели строят при введении большого числа гипотез. Это необходимо помнить, анализируя результаты исследований и высказывая определенные суждения о функционировании биологического объекта после протезирования.

Содержательные модели объектов протезирования должны удовлетворять следующим требованиям: 1) качественное воспроизведение реальных механических процессов в структурах и органах биологического объекта в физиологических состояниях; 2) соответствие описываемых ими процессов фундаментальным законам функционирования биологической системы.



Основными проблемами, рассматриваемыми в процессе изучения моделей биологических объектов, являются: 1) познание принципов функционирования биологических объектов; 2) развитие представлений о функционировании и патологии биологических объектов; 3) изучение методов улучшения функционирования биологических систем при различных внешних воздействиях; 4) разработка методов протезирования; 5) разработка и совершенствование систем диагностики; 6) зависимость характеристик содержательных моделей объектов протезирования от значений вводимых в модель параметров; 7) познание процессов функционирования биологических систем.

За время, прошедшее с начала изучения каждого биологического объекта, накоплено большое количество информации в медицине, биологии, биомеханике. Она содержит те или иные неполные сведения о различных процессах, протекающих в каждом биологическом объекте. Часто эти сведения крайне противоречивы, так как они получены при исследованиях: 1) проведенных при различных методиках; 2) без указания погрешности измерений; 3) разных людей и животных, находившихся в различных состояниях; 4) часто без фиксации необходимых механических и биологических факторов.

При построении содержательных моделей объектов протезирования приходится сталкиваться с тем, что крайне необходимые сведения вообще отсутствуют в литературе.

Из общего набора существующих к моменту построения содержательной модели сведений об исследуемом объекте необходимо прежде всего выделить наиболее существенные для исследуемого процесса. Затем сформулировать качественные особенности физиологического процесса. После этого можно переходить к его количественному описанию. Сформулированные качественные особенности физиологического процесса в объекте протезирования необходимо учитывать при создании любой его модели.

Чем проще модель, тем легче выделить наиболее существенные особенности процесса. Введение каждого нового фактора должно быть функционально оправдано.

Пример. Г. Бекеша, выделив особенности распространения колебаний в улитке органа слуха (рис. 2.2, 2.3), в сере-