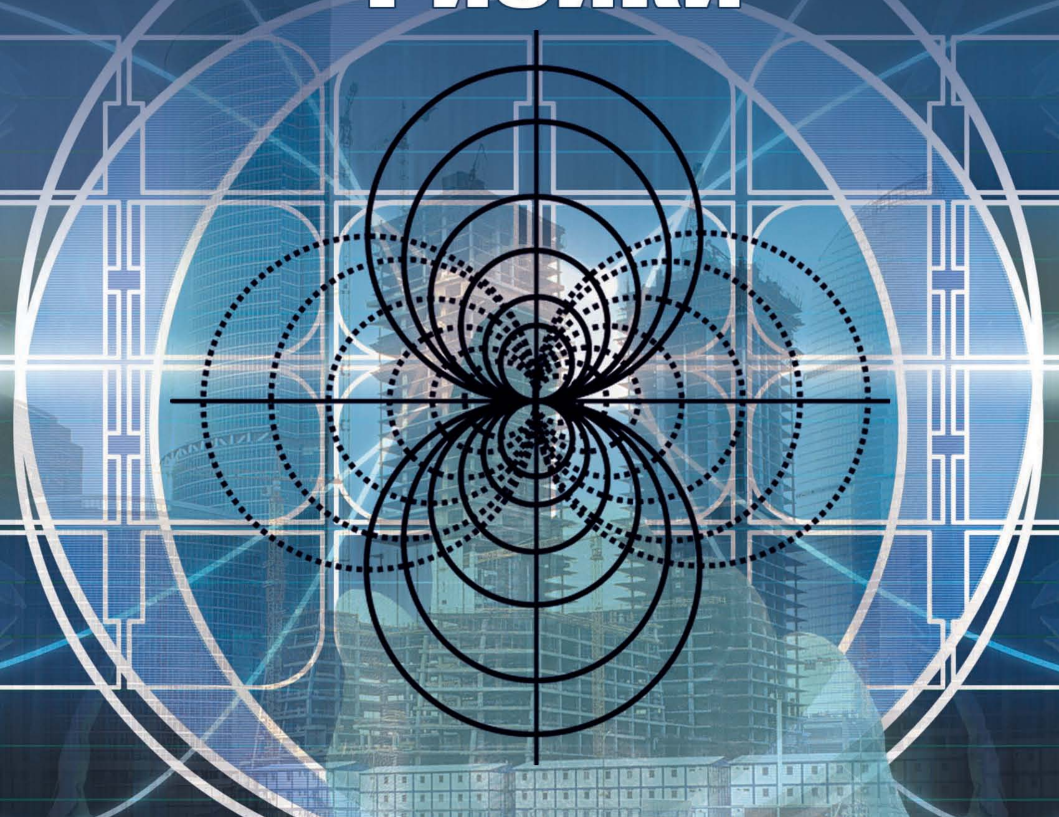
Г.Т. ТАРАБРИН

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Г.Т. ТАРАБРИН

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

Рекомендовано Федеральным агентством по образованию
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических учебных заведения

Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва
2009

УДК 517(075)

Рецензенты:

Заведующий кафедрой информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета профессор, доктор технических наук, *В.Н. Сидоров*

Профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета профессор, доктор технических наук, *В.А. Акимов*

Тарабрин Г.Т.

Методы математической физики. Учебное пособие. Издательство АСВ, – М.: 2009 г., - 208 с

ISBN 978-5-93093-614-8

Содержание пособия отвечает требованиям современных программ по математике для технических вузов, предусматривающих изучение методов математической физики.

Пособие состоит из четырех частей. В первой части дается краткое изложение теории функций комплексной переменной, включающее в себя дифференциальное и интегральное исчисления, конформные отображения, ряды, вычеты и их приложение. Во второй части излагаются теоретические основы интегральных преобразований Лапласа, Фурье, Ханкеля и приемы решения с их помощью дифференциальных и интегральных уравнений. В третьей части на классических примерах изучаются методы решения задач основных дифференциальных уравнений математической физики. В четвертой части даются основы метода вариаций в задачах с неподвижными границами.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов технических специальностей, завершивших изучение линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений.

Ил. 56. Библиогр. 52 назв.

ISBN 978-5-93093-614-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 3. Задачи математической физики

Часть 4. Вариационное исчисление

ОТ АВТОРА

В каждой естественной науке
заключено столько истины,
сколько в ней есть математики.
Иммануил Кант (1724-1804)

Развитие современной техники требует от инженера такого уровня математической подготовки, при котором знание основных методов решения задач дифференциальных уравнений математической физики является совершенно необходимым.

Предлагаемое учебное пособие состоит из четырех частей. Первые две из них подготавливают математический аппарат для третьей и последовательно связаны друг с другом. Вместе с тем эти три части достаточно самостоятельны и могут быть подвергнуты сокращениям и изменениям, обусловливаемым нуждами учебного процесса. Четвертая часть стоит особняком от первых трех и может изучаться совершенно независимо от них.

Часть первая представляет собой изложение теории функций комплексной переменной, адаптированной к уровню математической подготовки студентов технических направлений и специальностей. Главная задача, которая ставится в этой части, - сформировать у студента знания о конформных отображениях, интеграле Коши и методах вычисления контурных и несобственных интегралов с помощью вычетов.

Часть вторая содержит теоретические основы и руководство к практическому применению интегральных преобразований: Лапласа, Фурье и Ханкеля. Основная цель этой части - выработать у студента навыки решения методами интегральных преобразований задач обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем с начальными и граничными условиями и интегральных уравнений.

Часть третья посвящена решению задач дифференциальных уравнений с частными производными. Дается сравнительно подробное изложение теоретической основы классификации уравнений с частными производными второго порядка функций двух независимых переменных.

Методы интегральных преобразований демонстрируются на примерах решения задач уравнений всех трех типов – параболического, гиперболического и эллиптического. Этими методами решаются задачи теплопроводности стержней конечной и бесконечной длин и круглой пластины, задачи свободных и вынужденных колебаний струны конечной длины и продольные колебания стержня, задачи статического прогиба прямоугольной и круглой мембран, задачи свободных и вынужденных осесимметричных колебаний мембраны.

Метод разделения переменных дается как фундаментальный метод, лежащий в основе метода интегральных преобразований. Он иллюстрируется на решениях задач об акустических колебаниях газа в сферической оболочке и в круглой трубке.

Методом характеристик решаются задачи о распространении волн упругих деформаций в стержне и задачи соударения стержней. Излагаются основы построения разностных схем на характеристической сетке для решения краевых задач Коши, Гурса и смешанной квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Метод конформных отображений применяется в решении задач Дирихле для круга и полуплоскости.

Знакомство с методом комплексного потенциала ограничивается примерами исследования течения жидкости, описываемого его простейшими видами.

В четвертой части (ее не было в первом издании пособия) излагаются теоретические основы вариационного исчисления задач с неподвижными границами и на классических примерах иллюстрируются методы их решения. В качестве прямого вариационного метода достаточно подробно с примерами дается метод Ритца. Для простейшего случая рассматриваются методы решения задачи на условный экстремум.

Предполагается, что в результате освоения излагаемого в книге учебного материала изучающий получит возможность самостоятельно расширять и углублять свои знания в области методов решения задач уравнений математической физики и применять их для чтения соответствующей технической и научной литературы.

Пособие написано на основе лекций (повторяет их практически слово в слово), читаемых автором студентам специальности «Физика» Волгоградского государственного технического университета на 2-м курсе осеннего и весеннего семестров.

Концепция принятого в пособии построения учебного материала и уровня его подачи была поддержана профессором, доктором технических наук А.Б. Золотовым (МГСУ, кафедра информатики и прикладной математики). Во многом благодаря его усилиям книга получила рекомендательный гриф Федерального агентства по образованию Российской Федерации.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору, доктору физико-математических наук В.М. Миклюкову (ВолГУ, кафедра математического анализа и теории функций) за чрезвычайно тщательное прочтение рукописи книги в процессе ее рецензирования. Сделанные им замечания существенно способствовали улучшению ее текста.

Г. Тарабрин

Часть 1
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 1
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ

1.1. Комплексные числа и действия над ними

До сих пор, когда речь заходила о числах, подразумевались так называемые *вещественные* (или их называют еще *действительные*) числа, которые взаимно однозначно ассоциируются с точками числовой оси.

Определение 1. Число $i = \sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей.*

Определение 2. *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара вещественных чисел x, y, записываемая в виде

$$z = x + iy, \tag{1}$$

первое из которых x называется *вещественной* (или *действительной*) *частью* комплексного числа z, а второе y называется *мнимой частью* комплексного числа z.

Принято обозначать: $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$.

(1) называется *алгебраической формой комплексного числа*.

Определение 3. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу тогда и только тогда, когда равны их соответственно действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

Определение 4. Комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его действительная x и мнимая y части:

$$z = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ y = 0.$$

Теорема 1. В декартовой системе координат x, y комплексное число $z = x + iy$ необходимо и достаточно определяет единственную точку на координатной плоскости (рис.1).

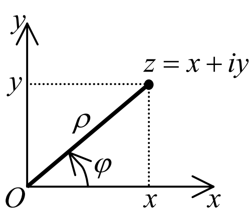


Рис.1

Доказательство. Между упорядоченными парами вещественных чисел и точками декартовой плоскости существует взаимно однозначное соответствие. Из этого непосредственно следует, что между комплексными числами и точками плоскости декартовых координат также имеет место взаимно однозначное соответствие. #

Применительно к комплексным числам плоскость декартовых координат называют *комплексной плоскостью*. При этом ось абсцисс x называют *вещественной* (*действительной*) *осью,* а ось ординат y - *мнимой осью*.

Определение 5. Неотрицательное число

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

называется *модулем* комплексного числа $z=x+iy$.

Число φ, принимающее значение в пределах от 0 до 2π и удовлетворяющее каждому из уравнений

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}, \tag{3}$$

называется *аргументом* этого комплексного числа.

Принято обозначать: $\rho=|z|, \quad \varphi=\arg z$.

Геометрический смысл модуля и аргумента: ρ - расстояние от начала координат до точки z, φ - полярный угол точки z (рис.1).

Обратим внимание, что числа $\arg z\pm 2k\pi$, где $k=1,2,3,...$, являются решениями системы уравнений (3) и также могут рассматриваться как аргументы комплексного числа.

Теорема 2. Комплексное число $z=x+iy$ может быть записано в виде

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{4}$$

где ρ - модуль комплексного числа, φ - его аргумент.

Доказательство. По формулам (3) $x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi$. Подставив эти выражения в равенство (1), получим формулу (4). #

(4) называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Лемма. Справедливо равенство

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \tag{5}$$

называемое *формулой Эйлера*.

Доказательство. Запишем натуральные степени мнимой единицы

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-1,\ i^7=-i,\ i^8=1,... .$$

Разложение $e^{i\varphi}$ в ряд Тейлора

$$e^{i\varphi}=1+\frac{i\varphi}{1!}+\frac{(i\varphi)^2}{2!}+\frac{(i\varphi)^3}{3!}+\frac{(i\varphi)^4}{4!}+\frac{(i\varphi)^5}{5!}+\frac{(i\varphi)^6}{6!}+\frac{(i\varphi)^7}{7!}+\frac{(i\varphi)^8}{8!}+\cdots$$

с учетом значений натуральных степеней i преобразуется к виду

$$e^{i\varphi}=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\frac{\varphi^8}{8!}-\cdots+i\left(\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+\cdots\right).$$

Замечая, что в этом равенстве справа ряды Тейлора

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\frac{\varphi^8}{8!}-\cdots, \quad \sin\varphi=\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+\cdots,$$

приходим к равенству (5). #

Теорема 3. Комплексное число $z = x + iy$ может быть записано в виде

$$z = \rho e^{i\varphi}, \tag{6}$$

где ρ - модуль комплексного числа, φ - его аргумент.

Доказательство. Подставив формулу (5) в (4), получим формулу (6). #

(6) называется *показательной формой комплексного числа*.

Определение 6. Сумма, разность и произведение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяются следующим образом:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_1 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_1 + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 z_2 = x_1 z_2 + iy_1 z_2.$$

Теорема 4. Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ может быть вычислено по любой из равносильных формул:

в алгебраической форме

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{7}$$

в тригонометрической форме

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right], \tag{8}$$

в показательной форме

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{9}$$

где $\rho_1 = |z_1|, \quad \rho_2 = |z_2|, \quad \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2$.

Доказательство. Перемножая, согласно определению 6, комплексные числа, как двучлены, и учитывая, что $ii = -1$, получаем

$$z_1 z_2 = z_1(x_2 + iy_2) = z_1 x_2 + z_1 iy_2 = (x_1 + iy_1)x_2 + (x_1 + iy_1)iy_2 =$$

$$= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 iy_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Из уравнений (3) имеем

$$x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1,\ y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1,\ x_2 = \rho_2 \cos\varphi_2,\ y_2 = \rho_2 \sin\varphi_2.$$

Подставив эти выражения в (7), вынеся за скобки общий множитель $\rho_1 \rho_2$, отделив действительную и мнимую части и воспользовавшись формулами косинуса и синуса суммы двух углов, получим формулу (8).

Применив к формуле (8) формулу Эйлера (5), получим (9). #

Следствие 1. При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Доказательство. Видно из формулы (8). #

Теорема 5. Возведение комплексного числа z в целую положительную степень n осуществляется следующими равносильными формулами:

в тригонометрической форме

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{10}$$

в показательной форме

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}, \tag{11}$$

где $\rho = |z|, \quad \varphi = \arg z$.

Формулы (10), (11) называются *формулами Муавра*.

Доказательство. Формулы (10), (11) вытекают непосредственно из формул (8), (9), записанных для n одинаковых сомножителей. #

Определение 7. Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Можно доказать, что

$$z\overline{z} = x^2 + y^2, \quad |\overline{z}| = |z|, \quad \arg\overline{z} = -\arg z,$$

$$\overline{z} = |z|\left[\cos(\arg z) - i\sin(\arg z)\right].$$

Теорема 6. Деление комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексное число $z_2 = x_2 + iy_2$ выполняется по любой из равносильных формул:

в алгебраической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{12}$$

в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right], \tag{13}$$

в показательной форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \tag{14}$$

где $\rho_1 = |z_1|, \quad \rho_2 = |z_2|, \quad \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2$.

Доказательство. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \Rightarrow$ (12).

Подставив $x_1 = \rho_1\cos\varphi_1, y_1 = \rho_1\sin\varphi_1, x_2 = \rho_2\cos\varphi_2, y_2 = \rho_2\sin\varphi_2$ в формулу (12) и воспользовавшись формулами косинуса и синуса разности двух углов, получим формулу (13).

Применив в формуле (13) формулу Эйлера (5), получим (14). #

Следствие 2. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Доказательство. Видно из формулы (13). #

Теорема 7. Корень целой положительной степени n из комплексного числа $z = x + iy$ имеет ровно n различных значений - комплексных чисел, имеющих равные модули, определяемые формулой

$$\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|}\,, \tag{15}$$

и различные аргументы, определяемые формулой

$$\arg\sqrt[n]{z} = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1\,. \tag{16}$$

Таким образом, в тригонометрической форме корень n-й степени из комплексного числа z вычисляется по формуле

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\arg z + 2\pi(k-1)}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi(k-1)}{n}\right], \tag{17}$$

$k = 1,2,\cdots,n.$

Подчеркнем, что здесь $\sqrt[n]{|z|} > 0$ - арифметический корень.

Доказательство. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$ и $\xi = \eta e^{i\alpha}$ - комплексные числа такие, что

$$z = \xi^n \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \sqrt[n]{z}\,.$$

Тогда

$$z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \xi^n = \eta^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)\,.$$

Отсюда, приравнивая действительные и мнимые части, имеем

$$\rho\cos\varphi = \eta^n\cos n\alpha, \quad \rho\sin\varphi = \eta^n\sin n\alpha\,.$$

Эти два равенства выполняются одновременно при условии, что

$$\rho = \eta^n, \quad \varphi + 2\pi k = n\alpha, \quad k = 0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

Так как $\rho > 0$ и $\eta > 0$, то из первого из этих равенств следует, что $\eta = \sqrt[n]{\rho}$. А учитывая, что $\rho = |z|$ и $\eta = |\xi| = \left|\sqrt[n]{z}\right|$, получаем (15).

Второе равенство из рассматриваемой пары можно переписать в виде $\alpha = (\varphi + 2\pi k)/n$. Если здесь учесть, что $\alpha = \arg\xi = \arg\sqrt[n]{z}$ и $\varphi = \arg z$, то получится формула (16).

Осталось доказать, что в формуле (17) $k = 1,2,\cdots,n$.

При $k = 1,2,\cdots,n$ выражение в квадратных скобках правой части равенства (17) принимает n различных значений. При $k < 1$ и при $k > n$ квадратные скобки формулы (17) дают значения, представляющие собой числа, уже полученные при $k = 1,2,\cdots,n$. Поэтому значения $k < 1$ и $k > n$ можно отбросить. #

Вместо $k = 1,2,\cdots,n$ можно взять любую непрерывную последовательность из n целых чисел.

Пример. Найти все корни уравнения $z^4+1=0$ и построить их на комплексной плоскости.

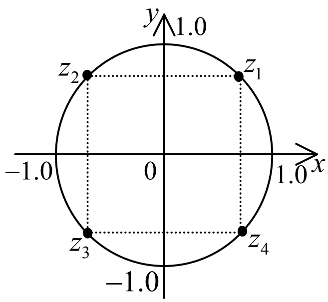


Рис.2

Решение.

$$z_k=\left(\sqrt[4]{-1}\right)_k, \quad k=1,2,3,4.$$

Запишем -1 в комплексной форме и вычислим модуль и аргумент этого комплексного числа.

$$-1=-1+i0,\ |-1|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1.$$

Точка $-1+i0$ лежит на отрицательной половине вещественной оси, поэтому $\arg(-1)=\pi$.

По формуле (17)

$$\left(\sqrt[4]{-1}\right)_k=\sqrt[4]{1}\left[\cos\frac{\pi+2\pi(k-1)}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi(k-1)}{4}\right], \quad k=1,2,3,4.$$

Отсюда имеем следующее:

при $k=1$ $\quad z_1=\left(\sqrt[4]{-1}\right)_1=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

при $k=2$ $\quad z_2=\left(\sqrt[4]{-1}\right)_2=\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

при $k=3$ $\quad z_3=\left(\sqrt[4]{-1}\right)_3=\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

при $k=4$ $\quad z_4=\left(\sqrt[4]{-1}\right)_4=\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найденные значения корней уравнения построены на рис. 2. Это точки

$$z_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ z_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ z_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ z_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Определение 8. Комплексное число z^{-1} называется *обратным* числу z, если эти числа связаны равенством

$$zz^{-1}=1. \tag{18}$$

Числа z и z^{-1} называются *взаимно обратными*.

Теорема 8. Модули и аргументы взаимно обратных чисел связаны равенствами

$$\left|z^{-1}\right|=\frac{1}{|z|}, \quad \arg z^{-1}=-\arg z. \tag{19}$$

Доказательство. Используя равенство (18) и следствие 2,

$$z^{-1}=\frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \left|z^{-1}\right|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}, \quad \arg z^{-1}=\arg\frac{1}{z}=\arg 1-\arg z=-\arg z \text{ . \#}$$

Определение 9. Возведение комплексного числа z в целую отрицательную степени n определяется формулой

$$z^{-n}=\left(z^{-1}\right)^{n} . \tag{20}$$

Теорема 9. Значения комплексного числа в целой отрицательной степени и в той же положительной степени связаны равенством

$$z^{-n}=\frac{1}{z^{n}} . \tag{21}$$

Доказательство. По формулам (20), (19) (10)

$$|z|=\rho, \arg z=\varphi, \quad z^{-n}=\left(z^{-1}\right)^{n}=\left(\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\rho}\right)^{n}=\frac{\cos n\varphi-i\sin n\varphi}{\rho^{n}}=$$

$$=\frac{(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}{\rho^{n}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}=\frac{\cos^{2} n\varphi+\sin^{2} n\varphi}{\rho^{n}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}=\frac{1}{z^{n}} \text{ . \#}$$

Следствие 3. Если n - целое положительное число и z - комплексное число, то z^{n}, z^{-n} - взаимно обратные комплексные числа, т.е.

$$z^{n}z^{-n}=1 . \tag{22}$$

1.2. Ряды с комплексными членами

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{n} , \tag{1}$$

члены которого $z_n=x_n+iy_n$ - комплексные числа.

Комплексные числа

$$S_1=z_1, \quad S_2=z_1+z_2, \quad \cdots, \quad S_n=z_1+z_2+\cdots+z_n, \cdots ,$$

называемые *частичными суммами* ряда, образуют *последовательность,* обозначаемую $\{S_n\}$.

Определение 1. Если существует предел последовательности $\{S_n\}$ при $n\to\infty$, равный конечному числу S, то этот предел называют *суммой ряда* (1), пишут $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ и говорят, что ряд (1) *сходится*.

Сумма ряда с комплексными членами есть число комплексное.

Теорема 1. Если ряд (1) с комплексными членами сходится и его сумма равна $S=X+iY$, то сходятся ряды с действительными членами, составленные из действительных и мнимых частей членов ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \tag{2}$$

их суммы равны соответственно X и Y. И, наоборот, если ряды (2) сходятся, то сходится и ряд (1).

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится. $\Leftrightarrow$ Согласно определению 1, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. $\Leftrightarrow$ Так как $S_n = X_n + iY_n$, где $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ и $Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} X_n + i\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = X + iY$. $\Leftrightarrow$ Используя определение 3/1.1, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$. $\Leftrightarrow$ Согласно определению 1, ряды (2) сходятся. Так как в выполненном доказательстве всюду стоит знак взаимно обратного соответствия $\Leftrightarrow$, то оно справедливо и в обратном направлении, т.е. из сходимости рядов (2) следует сходимость ряда (1). #

Теорема 2. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \tag{3}$$

составленный из модулей членов ряда (1), то ряд (1) также сходится, что называется *абсолютной сходимостью* ряда (1).

Доказательство. $|z_n| = \sqrt{x_n{}^2 + y_n{}^2} \quad \Rightarrow \quad |z_n| \geq |x_n|, \quad |z_n| \geq |y_n|$.

Пусть ряд (3) сходится. Тогда, согласно этим неравенствам, по признаку сравнения рядов с неотрицательными членами сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

Из сходимости этих рядов следует сходимость, причем абсолютная, рядов (2), что достаточно, согласно теореме 1, для сходимости ряда (1). #

Рассмотрим теперь *комплексную переменную* $z = x + iy$, где x, y - независимые друг от друга вещественные переменные.

Ряд

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{4}$$

где z - комплексная переменная и $a_0, a_1, a_2, \cdots$ - комплексные числа, называется *степенным рядом с комплексными членами*.

Любая его частичная сумма

$$S_n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \tag{5}$$

является *комплексной функцией* вида

$$S_n = u_n(x, y) + i v_n(x, y), \tag{6}$$

где $u_n(x, y), v_n(x, y)$ - вещественные функции вещественных переменных

x, y. Действительно. Согласно формуле (10)/1.1, z^n - комплексная переменная. Тогда и $a_n z^n$, как произведение комплексных величин, является комплексной переменной и, следовательно, частичная сумма (5), как сумма комплексных переменных, также является комплексной переменной.

При фиксированных значениях x, y ряд (4) превращается в числовой ряд (1) и можно говорить о его сходимости.

Совокупность точек (x, y), в которых ряд (4) сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда с комплексными членами.

Докажем, что ряды

$$\left.\begin{aligned} &1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots, \\ &1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2(n-1)}}{\left[2(n-1)\right]!}+\cdots, \\ &\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

абсолютно сходятся на всей комплексной плоскости.

Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ - действительная переменная, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\rho^{2(n-1)}}{\left[2(n-1)\right]!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\rho^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{8}$$

являются рядами с действительной переменной ρ и представляют собой известные разложения в ряд Тейлора функций $e^{\rho}, \cos\rho, \sin\rho$. Ряды Тейлора этих функций действительной переменной сходятся, причем абсолютно, на всей числовой оси и, следовательно, ряды (8) сходятся при всех значениях $|z| \in [0, \infty)$.

Из абсолютной сходимости рядов (8) следует сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{2(n-1)}}{\left[2(n-1)\right]!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{9}$$

при $|z| \in [0, \infty)$, т.е. при $x \in (-\infty, +\infty)$ и $y \in (-\infty, +\infty)$.

Эти ряды представляют собой также ряды, составленные из модулей членов рядов (7). Поэтому из сходимости рядов (9), согласно теореме 2, следует абсолютная сходимость рядов (7) при $x \in (-\infty, +\infty)$ и $y \in (-\infty, +\infty)$, что означает абсолютную сходимость рядов (7) на всей комплексной плоскости. #

Учебное пособие

Геннадий Тимофеевич **Тарабрин**

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Издание подготовлено в авторской редакции
Дизайн обложки: *Н.С. Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98.
Подписано к печати 30.03.09. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. 13 п.л. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – КМК, оф. 348
тел., факс: (499)183-56-83, e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru/