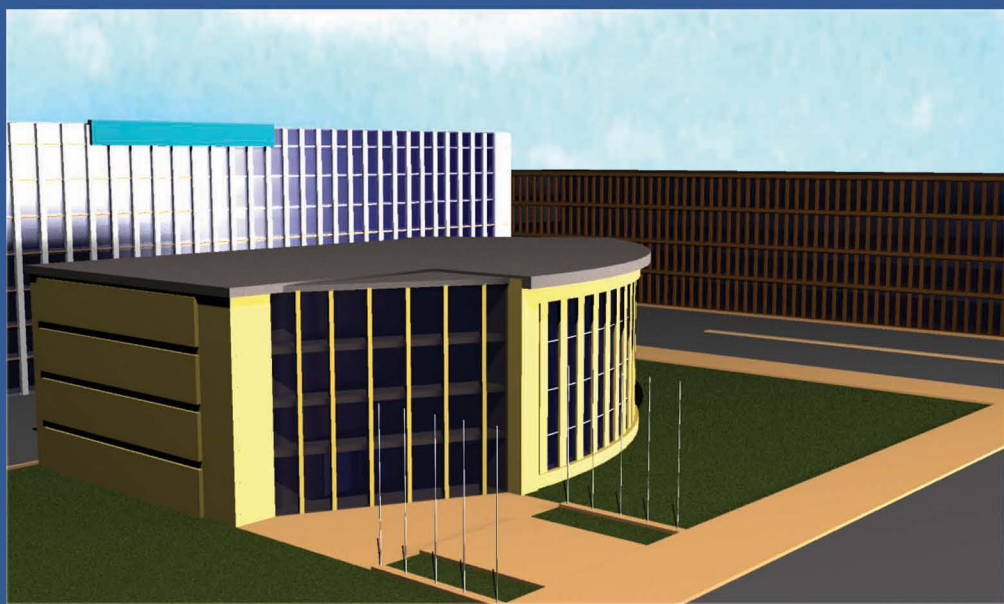


**А.С. Городецкий    И.Д. Евзеров**

# **КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИЙ**



**А.С. Городецкий  
И.Д. Евзеров**

# **Компьютерные модели конструкций**



Издательство АСВ

*Москва 2008*

УДК 624.012.3:681.3.06

**А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров. Компьютерные модели конструкций.** – Москва: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 360 с.

ISBN 978-5-93093-638-4

Книга предназначена для специалистов, проектирующих конструкции строительных сооружений и в своей работе применяющих компьютеры.

Рассматриваются теоретические основы метода конечных элементов как основного расчетного инструмента. Много внимания уделяется вопросам сходимости, оценки приближенного решения, особенностям применения МКЭ для различных типов конструкций. Немало места уделено нелинейным задачам, включая физическую и геометрическую нелинейность, односторонние связи, трение, устойчивость, нелинейную динамику.

Основное внимание уделяется методам и приемам построения компьютерных моделей. Рассматривается моделирование не только отдельных конструктивных решений (опорные крепления, шарниры, проскальзывание, контактные задачи и др.) и часто встречающихся конструкций (конструкции, работающие совместно с грунтовым основанием, вантовые конструкции, конструкции высотных зданий и др.), но и моделирование процессов, связанных с жизненным циклом конструкции – предварительное натяжение, приспособляемость, возведение, устойчивость к прогрессирующему обрушению и др.

В приложении приводится набор верификационных примеров, которые могут служить оселком для проверки различных методов, в том числе и реализованных в различных программных комплексах.

Книга может быть также полезна исследователям, изучающим работу различных типов конструкций, разработчикам программных комплексов и студентам, изучающим методы расчета и проектирования конструкций.

---

#### **A. Gorodetsky, I. Yevzerov. Computational models of structures**

The book focuses on theory of Finite Element Method as the main analysis tool. The book also deals with convergence matters, evaluation of approximate solution, peculiar features in application of FEM for different types of structures. Nonlinear problems including physical (material) and geometric nonlinearity, one-way springs, friction, stability, nonlinear dynamics are considered in the book.

Special attention is given to generation of computational models. The book presents not only simulation of separate structural solutions (boundary conditions, hinges, contact problems, etc.) and widely used structures (structures that considered together with soil, cable-stayed structures, structures of multi-storey buildings, etc.), but simulation of life cycle of the structure – pretension, adaptability, erection, etc.

The appendix contains a set of verification test cases.

The book will be useful for scientists that do research in behaviour of different types of structures, developers of software and students that study methods of analysis and design of structures.

---

#### **A. Gorodetski, I. Evsérov. Modélisation assistée par ordinateur**

Le présent ouvrage est dédié aux ingénieurs qui participent à l'art d'édifier et de construire et qui appliquent dans son travail les ordinateurs pour modeler les éléments constitutifs d'un édifice en projet.

Les auteurs exposent le fondement théorique de la méthode par éléments finis (MEF) qui est l'outil principal du calcul. La convergence et la résolution approchée, ainsi que l'application de MEF aux différents types de structures sont étudiées avec attention. Une importance est accordée aux problèmes non linéaires, y compris la non linéarité physique et géométrique, liaisons unilatérales, frottement, stabilité et dynamique non linéaire.

L'objectif principal de cet ouvrage est la formation des modèles assistés par ordinateur. A part les modèles des solutions constructives (appuis, articulations, glissement, contacts...) et des structures les plus répandues (ouvrages sur sol de fondation, structures haubanées, structures des édifices à très nombreux étages...) sont étudiés les modèles des processus responsables de la longévité des structures, tels que prétension, adaptation, élévation, résistance à l'effondrement progressif, etc...

Les tests présentés à l'annexe peuvent servir de pierre à aiguiser pour vérifier certaines méthodes, y compris les méthodes employées dans différents logiciels réalisés.

Cet ouvrage peut être un vade-mecum des projeteurs qui étudient le comportement de différents types de structures, il peut aussi être utile aux développeurs des logiciels et, enfin, c'est un recours pour les étudiants à vocation de génie civil qui apprennent les méthodes de calcul et de conception des ouvrages.

ISBN 978-5-93093-638-4

© Издательство АСВ, 2009 г.

© А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров

# Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>15</b>
<b>От авторов</b>	<b>21</b>
<b>О построении материала книги</b>	<b>22</b>
<b>Глава 1. Проблемы компьютерного моделирования</b>	<b>24</b>
1.1. Путь к компьютерным моделям. Ретроспектива. Возможное развитие	24
1.2. Глубина моделирования	30
1.3. Расчет – это способ рассуждения	33
1.4. Программные комплексы – инструментарий компьютерного моделирования	36
<b>Литература к главе 1</b>	<b>40</b>
<b>Глава 2. Современные методы решения задач строительной механики. Инженерный подход</b>	<b>42</b>
2.1. Основные положения метода конечных элементов	42
2.2. Выбор базисных функций и узловых неизвестных	48
2.3. Исследование конечных элементов	53
2.4. Связь МКЭ с методами строительной механики стержневых систем	56
2.5. Применение МКЭ для решения линейных задач	60
2.6. Применение МКЭ для решения нелинейных задач	68
2.7. Решение систем нелинейных уравнений	70
2.8. Физическая нелинейность. Ползучесть	74
2.9. Геометрическая нелинейность	77
2.10. Устойчивость	80
2.11. Односторонние связи. Трение	82
2.12. Динамика	85
2.13. Анализ чувствительности	88
<b>Литература к главе 2</b>	<b>92</b>
<b>Глава 3. Компьютерная реализация</b>	<b>95</b>
3.1. Интуитивная графическая среда пользователя	95
3.2. Составление канонических уравнений МКЭ	100
3.3. Решение систем уравнений высоких порядков	105
3.4. Глобальные, местные, локальные системы координат, углы чистого вращения	111
3.5. Реализация граничных условий. Расчет на заданные перемещения. Кинематическая связь перемещений	115
3.6. Определение геометрических характеристик сечений стержней	120
3.7. Определение усилий и напряжений	125
3.8. Организация расчета конструкций с учетом изменения расчетных схем в процессе возведения	127
3.9. Расчетные сочетания усилий (PCY). Расчетные сочетания нагружений (PCN)	128

3.10. Конструирующие системы	131
3.11. Проблемы реализации на многопроцессорных компьютерах. Параллельные вычисления	135
<b>Литература к главе 3</b>	<b>138</b>
<b>Глава 4. Компьютерные модели.</b>	
<b>Построение, анализ, опыт, возможные ошибки, рекомендации</b>	<b>140</b>
4.1. Построение конечно-элементных моделей	140
4.2. Стратификация, фрагментация, суперэлементы, вариация моделей	153
4.3. Моделирование конструктивных решений узлов – опорные крепления, податливость соединений, шарниры, трение	156
4.4. Абсолютно жесткие вставки (тела). Объединение перемещений	159
4.5. Применение различных систем координат	162
4.6. Рассуждения на тему, почему узлы ферм рассчитываются шарнирными, а конструируются жесткими	164
4.7. Вантовые конструкции, мембраны, предварительное натяжение	165
4.8. Контактные задачи	170
4.9. Конструкции, работающие совместно с грунтовым основанием	172
4.10. Плиты перекрытий, усиленные балками и капителями	180
4.11. Конструкции высотных зданий из монолитного железобетона	186
4.12. Моделирование процесса возведения	207
4.13. Моделирование процесса нагружения	212
4.14. Компьютерное моделирование жизненного цикла конструкции	219
4.15. Как проверить правильность полученных результатов компьютерного моделирования	220
<b>Литература к главе 4</b>	<b>225</b>
<b>Приложение 1. Математические основы МКЭ</b>	<b>227</b>
П. 1. Линейная статическая задача	228
1.1. Стержни	230
1.2. Пластины (оболочки)	235
П. 2. Метод конечных элементов для линейной статической задачи	240
2.1. Математическая постановка	240
2.2. Основные теоремы о сходимости. Оценки погрешности	243
2.2.1. Конформный и не конформный МКЭ	246
2.2.2. Сходимость плоских КЭ для оболочек, численное интегрирование, складчатые пластины	249
2.3. Конечные элементы линейной статической задачи	251
2.3.1. Стержни, плоская и трёхмерная задачи, толстые плиты	251
2.3.2. Конформные и не конформные элементы тонкой плиты	253
П. 3. Нелинейные статические задачи	255
3.1. Существование и единственность решения, приближенные методы	255
3.2. Оценки погрешности приближенных методов	257
3.3. Геометрически нелинейные задачи	259

3.3.1. Стержни, нити, сильный изгиб стержней	261
3.3.2. Пластины, мембраны, сильный изгиб пластин	263
3.4. Задачи устойчивости, их связь с геометрической нелинейностью	266
3.5. Нелинейная упругость	267
3.6. Задача с односторонними ограничениями	270
3.6.1. Односторонние связи	271
3.6.2. Трение Кулона	271
3.6.3. Диаграмма Прандтля	271
3.6.4. Условие Гениева	272
3.6.5. Сыпучая среда (грунт)	272
3.6.6. Пластичные материалы	273
II. 4. Нестационарные задачи	274
4.1. Линейная динамическая задача	274
4.2. Разностные схемы, безусловная устойчивость	277
4.3. Геометрически нелинейные динамические задачи	279
4.4. Задачи вязко–упруго–пластичности	282
4.5. Динамические задачи с односторонними связями	284
4.6. Динамическая задача с трением	285
II. 5. Используемые теоремы	287
II. 6. Обозначения	289
<b>Список литературы</b>	<b>295</b>
<b>Приложение 2. Верификационные тесты</b>	<b>300</b>
Тест 1. Пространственная рама с упругими опорами	301
Тест 2. Плоская ферма	303
Тест 3. Балка с затяжкой	304
Тест 4. Прямоугольная плита	305
Тест 5. Круглая плита	306
Тест 6. Цилиндр под внутренним давлением	307
Тест 7. Тор под внутренним давлением	308
Тест 8. Цилиндрическая оболочка под собственным весом	309
Тест 9. Консольная плита под действием пары сил	310
Тест 10. Параллелепипед под действием собственного веса	311
Тест 11. Чистый изгиб призматического бруса	312
Тест 12. Толстая плита	313
Тест 13. Стержень на упругом основании	314
Тест 14. Жесткая балка на подвесках	315
Тест 15. Железобетонная плита перекрытия под распределенной нагрузкой	316
Тест 16. Железобетонная балка под распределенной нагрузкой	317
Тест 17. Стальной канат с заданной стрелой провеса	318
Тест 18. Нить с разновысокими опорами	319
Тест 19. Стальной канат с заданной начальной длиной	320
Тест 20. Вантовая сеть	321
Тест 21. Вантовая ферма	322
Тест 22. Сильный изгиб консоли	323

Тест 23. Закритический изгиб консоли	324
Тест 24. Закритический изгиб шарнирно опертого стержня	325
Тест 25. Геометрически нелинейная задача со стержнями различной жесткости	326
Тест 26. Стержень под действием растяжения и равномерно распределенной нагрузки	327
Тест 27. Сильный изгиб консольной плиты	328
Тест 28. Квадратная мембрана с податливым контуром	329
Тест 29. Устойчивость оболочки	330
Тест 30. Устойчивость консоли	331
Тест 31. Устойчивость равномерно нагруженной консоли	332
Тест 32. Устойчивость плоской формы изгиба консоли	333
Тест 33. Устойчивость плоской формы изгиба шарнирно опертой балки	334
Тест 34. Устойчивость при кручении	335
Тест 35. Устойчивость стержня с жесткими вставками	336
Тест 36. Балка переменного сечения	337
Тест 37. Тонкая плита	338
Тест 38. Шарнирно опертая прямоугольная плита	339
Тест 39. Цилиндрическая оболочка	340
Тест 40. Задача Ховгаарда	341
Тест 41. Колебания клинообразной консоли	342
Тест 42. Динамическая задача при импульсном воздействии	343
Тест 43. Развитие перемещений вдоль стержня со свободными концами	344
Тест 44. Консольный стержень на односторонних опорах	345
Тест 45. Система с односторонними пружинами	346
Тест 46. Круглая плита на одностороннем упругом основании	347
Тест 47. Контактная задача для цилиндра	348
Тест 48. Квадратная плита на одностороннем жестком основании	349
Тест 49. Температурное расширение при наличии зазора	350
Тест 50. Динамическая односторонняя контактная задача для квадратной пластины	351
Тест 51. Определение геометрических характеристик эллипса	352
Тест 52. Определение геометрических характеристик равностороннего треугольника	353
Тест 53. Определение геометрических характеристик полукруга	354
Тест 54. Определение геометрических характеристик тонкостенного сечения двутавра	355
Тест 55. Определение геометрических характеристик тонкостенного сечения сектора кольца	356
Тест 56. Определение геометрических характеристик тонкостенного полузамкнутого сечения	357

---

# Contents

<b>Preface</b>	<b>15</b>
<b>From authors</b>	<b>21</b>
<b>About this book</b>	<b>22</b>
<b>Chapter 1. Computer simulation issues</b>	<b>24</b>
1.1. History of computer models. Possible development	24
1.2. Adequate presentation of structure behavior	30
1.3. Analysis is the line of reasoning	33
1.4. Software programs – tools for computer simulation	36
<b>Bibliography to chapter 1</b>	<b>40</b>
<b>Chapter 2. Advanced methods for solving structural analysis problems.</b>	
<b>Engineering approach</b>	<b>42</b>
2.1. Fundamentals of finite element method	42
2.2. Basis functions and unknowns per node	48
2.3. Brief survey on finite elements	53
2.4. Relations between FEM and methods of structural analysis for bar systems	56
2.5. FEM for solving linear problems	60
2.6. FEM for solving nonlinear problems	68
2.7. Systems of nonlinear equations	70
2.8. Physical nonlinearity. Creep	74
2.9. Geometrical nonlinearity	77
2.10. Stability	80
2.11. One-way springs. Friction	82
2.12. Dynamics	85
2.13. Sensibility	88
<b>Bibliography to chapter 2</b>	<b>92</b>
<b>Chapter 3. Computer implementation</b>	<b>95</b>
3.1. Intuitive graphic environment	95
3.2. Canonical equations of FEM	100
3.3. Systems of high order equations	105
3.4. Global, local coordinate systems, angle of pure rotation	111
3.5. Boundary conditions. Initial displacements. Kinematic relation	115
3.6. Geometric properties for bar sections	120
3.7. Force and stress	
3.8. Analysis of structure with account of changes in design models during erection	125
3.9. Design combinations of forces (DCF). Design combinations of loads (DCL)	127
3.10. Design modules	131
3.11. Multicore technology. Parallel calculations	135
<b>Bibliography to chapter 3</b>	<b>138</b>
<b>Chapter 4. Computational models. Generation, analysis, practice, possible errors, suggestions</b>	<b>140</b>
4.1. Generation of FE models	140
4.2. Stratification, fragmentation, super-elements, model variation	153
4.3. Simulation of joints – restraints, compliance of joints, hinges, friction	156
4.4. Perfectly rigid bodies. Coupled DOF	159



4.5.	Various coordinate systems	162
4.6.	About nodes of trusses. Why they are calculated as hinged and designed as rigid	164
4.7.	Cable-stayed structures, membranes, pretension	165
4.8.	Contact problems	170
4.9.	Structures considered together with soil	172
4.10.	Floor slabs strengthened with beams and capitals	180
4.11.	Structures of high-rise buildings from monolithic reinforced concrete	186
4.12.	Simulation of erection	207
4.13.	Simulation of loading history	212
4.14.	Computer simulation of life cycle of the structure	219
4.15.	Verification of analysis results for computer simulation	220
<b>Bibliography to chapter 4</b>		<b>225</b>
<b>Appendix 1. Fundamentals of FEM</b>		<b>227</b>
A. 1.	Linear static problem	228
1.1.	Bars	230
1.2.	Plates (shells)	235
A. 2.	Finite element method for linear static problem	240
2.1.	Mathematical statement	240
2.2.	Basic theorems of convergence. Estimated accuracy	243
2.2.1.	Conformal and non-conformal FEM	246
2.2.2.	Convergence of plane FE of shells, numerical integration, folded plates	249
2.3.	Finite elements of linear static problem	251
2.3.1.	Bars, plane and three-dimensional problems, thick slabs	251
2.3.2.	Conformal and non-conformal elements of thin slab	253
A. 3.	Nonlinear static problems	255
3.1.	Existence and uniqueness of the solution, approximate methods	255
3.2.	Estimated accuracy of approximate methods	257
3.3.	Geometrically nonlinear problems	259
3.3.1.	Bars, cables, intense flexure in bars	261
3.3.2.	Plates, membranes, intense flexure in plates	263
3.4.	Stability problems and geometric nonlinearity	266
3.5.	Nonlinear elasticity	267
3.6.	Problem with one-way restraints	270
3.6.1.	One-way restraints	271
3.6.2.	Coulomb friction	271
3.6.3.	Prandtl diagram	271
3.6.4.	Geniev criterion	272
3.6.5.	Loose ground (soil)	272
3.6.6.	Ductile materials	273
A. 4.	Unsteady motion problems	274
4.1.	Linear dynamic problem	274
4.2.	Differential equations, unconditional stability	277
4.3.	Geometrically nonlinear dynamic problems	279
4.4.	Visco-elasto-plasticity problems	282
4.5.	Dynamic problems with one-way restraints	284

4.6. Dynamic problems with friction	285
A. 5. Theorems in use	287
A. 6. Notation	289
<b>Bibliography</b>	<b>295</b>
<b>Appendix 2. Verification test case descriptions</b>	<b>300</b>
Case 1. Three-dimensional frame with elastic supports	301
Case 2. Plane frame	303
Case 3. Beam with straining	304
Case 4. Rectangular slab	305
Case 5. Round slab	306
Case 6. Cylinder under internal pressure	307
Case 7. Torus under internal pressure	308
Case 8. Cylindrical shell under dead weight	309
Case 9. Cantilever slab under couple of forces	310
Case 10. Parallelepiped under dead weight	311
Case 11. Pure flexure of prismatic bar	312
Case 12. Thick slab	313
Case 13. Beam on elastic foundation	314
Case 14. Rigid beam on suspension rods	315
Case 15. Reinforced concrete floor slab under distributed load	316
Case 16. Reinforced concrete beam under distributed load	317
Case 17. Steel rope with specified sag	318
Case 18. Cable with uneven supports	319
Case 19. Steel rope with specified initial length	320
Case 20. Cable grid	321
Case 21. Guy truss	322
Case 22. Intense flexure of cantilever	323
Case 23. Postcritical flexure of cantilever	324
Case 24. Postcritical flexure of hinged bar	325
Case 25. Geometrically nonlinear problem with bars of different stiffness	326
Case 26. Bar under tension and uniformly distributed load	327
Case 27. Intense flexure of cantilever slab	328
Case 28. Square membrane with elastic contour	329
Case 29. Stability of shell	330
Case 30. Stability of cantilever	331
Case 31. Stability of uniformly loaded cantilever	332
Case 32. Stability of cantilever plane flexure	333
Case 33. Stability of plane flexure of hinged beam	334
Case 34. Stability in torsion	335
Case 35. Stability of bar with offsets	336
Case 36. Beam of variable cross section	337
Case 37. Thin slab	338
Case 38. Hinged rectangular slab	339
Case 39. Cylindrical shell	340
Case 40. Hovgaard problem	341
Case 41. Vibrations of wedge cantilever	342
Case 42. Dynamic problem under impulse load	343

Case 43. Displacements along the bar with free ends	344
Case 44. Cantilever bar on one-way supports	345
Case 45. One-way spring system	346
Case 46. Circular slab on one-way elastic foundation	347
Case 47. Contact problem for cylinder	348
Case 48. Square slab on one-way rigid foundation	349
Case 49. Thermal expansion with clearance	350
Case 50. Dynamic one-way contact problem for square plate	351
Case 51. Geometric properties for ellipse	352
Case 52. Geometric properties for equilateral triangle	353
Case 53. Geometric properties for semicircle	354
Case 54. Geometric properties for thin-wall I-section	355
Case 55. Geometric properties for thin-wall section of ring	356
Case 56. Geometric properties for thin-wall semiclosed section	357

---

# Sommaire

<b>Préface</b>	<b>15</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>21</b>
<b>Table des matières</b>	<b>22</b>
<b>Chapitre 1. Modélisation assistée par ordinateur</b>	<b>24</b>
1.1. Accès aux modèles assistés par ordinateur. Rétrospective. Evolution	24
1.2. Adéquation du modèle à la structure réelle	30
1.3. Calcul comme un mode de réflexion	33
1.4. Logiciel comme un outil de modélisation	36
<b>Bibliographie au chapitre 1</b>	<b>40</b>
<b>Chapitre 2. Résolution des problèmes en mécanique des constructions.</b>	
<b>Méthodes contemporaines. Approche d'ingénieur</b>	<b>42</b>
2.1. Méthode de calcul par éléments finis. Rappels sommaires	42
2.2. Sélection des fonctions de base et des inconnues nodales	48
2.3. Etude des éléments finis	53
2.4. MEF et mécanique des constructions des systèmes de barres	56
2.5. Résolution des problèmes linéaires par MEF	60
2.6. Résolution des problèmes non linéaires par MEF	68
2.7. Résolution des systèmes d'équations non linéaires	70
2.8. Non linéarité physique. Fluage	74
2.9. Non linéarité géométrique	77
2.10. Stabilité	80
2.11. Liaisons unilatérales. Frottement	82
2.12. Dynamique	85
2.13. Analyse de sensibilité	88
<b>Bibliographie au chapitre 2</b>	<b>92</b>
<b>Chapitre 3. Réalisation assistée par ordinateur</b>	<b>95</b>
3.1. Environnement graphique intuitif	95
3.2. Equations canoniques MEF	100
3.3. Résolution de grands systèmes d'équations	105
3.4. Systèmes de coordonnées et angle de rotation pure	111
3.5. Conditions aux limites. Calcul des déplacements définis. Conditions cinématiques	115
3.6. Caractéristiques géométriques des sections	120
3.7. Définition des efforts et des contraintes	125
3.8. Organisation du calcul des structures avec la prise en compte de leur modification au cours de l'élévation	127
3.9. Combinaisons d'efforts (CE). Combinaisons de charges (CC)	128
3.10. Systèmes de conception	131
3.11. Réalisation assistée par ordinateurs multiprocesseurs. Calculs parallèles	135
<b>Bibliographie au chapitre 3</b>	<b>138</b>
<b>Chapitre 4. Modèles assistés par ordinateurs. Formation, expérience, analyse, erreurs éventuelles, recommandations</b>	<b>140</b>
4.1. Formation des modèles en éléments finis	140
4.2. Stratification, fragmentation, super-éléments, variation des modèles	153

4.3.	Modèles constructifs des noeuds : appuis, connexions élastiques, articulations, frottement	156
4.4.	Tronçons (corps) absolument rigides. Unification des déplacements	159
4.5.	Application des systèmes de coordonnées	162
4.6.	Pourquoi les noeuds des fermes, calculés comme noeuds articulés, sont conçus comme noeuds rigides	164
4.7.	Structures haubanées, membranes, prétension	165
4.8.	Contacts	170
4.9.	Ouvrages sur sol de fondation	172
4.10.	Dalles de revêtement renforcées par poutres	180
4.11.	Structures en béton armé coulé en oeuvre	186
4.12.	Modélisation de l'élévation	207
4.13.	Modélisation du chargement	212
4.14.	Modélisation de la longévité d'une structure	219
4.15.	Comment vérifier les résultats	220
<b>Bibliographie au chapitre 4</b>		<b>225</b>
<b>Annexe 1. MEF. Bases mathématiques</b>		<b>227</b>
A. 1.	Problème linéaire statique	228
1.1.	Barres	230
1.2.	Plaques (coques)	235
A. 2.	MEF pour le problème linéaire statique	240
2.1.	Approche mathématique	240
2.2.	Théorèmes de convergence. Estimation des équarts	243
2.2.1.	MEF conforme et non conforme	246
2.2.2.	Convergence des EF plats des coques, intégration numérique	249
2.3.	Eléments finis du problème linéaire statique	251
2.3.1.	Barres, problème plat et volumique, plaques épaisses	251
2.3.2.	Eléments conformes et non conformes de la plaque fine	253
A. 3.	Problèmes non linéaires statiques	255
3.1.	Résolution unique, méthodes approchées	255
3.2.	Méthodes approchées. Estimation des équarts	257
3.3.	Problèmes géométriquement non linéaires	259
3.3.1.	Barres, câbles, barres à forte flèche	261
3.3.2.	Plaques, membranes, plaques à forte flèche	263
3.4.	Problèmes de stabilité, leur liaison avec la non linéarité géométrique	266
3.5.	Elasticité non linéaire	267
3.6.	Problème aux restrictions unilatérales	270
3.6.1.	Liaisons unilatérales	271
3.6.2.	Frottement Coulomb	271
3.6.3.	Diagramme Prandtl	271
3.6.4.	Condition Guéniev	272
3.6.5.	Milieu mouvant (sol)	272
3.6.6.	Matériaux plastiques	273
A. 4.	Problèmes hors standard	274
4.1.	Problème linéaire dynamique	274
4.2.	Schémas différentiels, stabilité absolue	277

4.3.	Problèmes dynamiques géométriquement non linéaires	279
4.4.	Problèmes visco-élasto-plastiques	282
4.5.	Problème dynamique aux liaisons unilatérales	284
4.6.	Problème dynamique au frottement	285
A. 5.	Théorèmes utilisés	287
A. 6.	Désignations	289
	<b>Bibliographie</b>	<b>295</b>
	<b>Annexe 2. Tests de vérification</b>	<b>300</b>
Test 1.	Portique spatial sur appuis élastiques	301
Test 2.	Ferme plate	303
Test 3.	Poutre sous-tendue	304
Test 4.	Plaque rectangulaire en porte-à-faux	305
Test 5.	Plaque circulaire	306
Test 6.	Cylindre mince sous pression interne	307
Test 7.	Tore sous pression interne	308
Test 8.	Coque cylindrique sous son poids propre	309
Test 9.	Plaque à console sous effet de couple de forces	310
Test 10.	Parallélépipède sous son poids propre	311
Test 11.	Flexion pure d'une barre prismatique	312
Test 12.	Plaque épaisse	313
Test 13.	Poutre sur sol élastique	314
Test 14.	Poutre rigide suspendue	315
Test 15.	Dalle de revêtement en béton armé sous charge répartie	316
Test 16.	Poutre en béton armé sous charge répartie	317
Test 17.	Câble d'acier à flèche définie	318
Test 18.	Câble aux appuis de hauteur différente	319
Test 19.	Câble d'acier de longueur définie	320
Test 20.	Système de haubans	321
Test 21.	Ferme haubanée	322
Test 22.	Flexion forcée de la console	323
Test 23.	Flexion postcritique de la console	324
Test 24.	Flexion postcritique de la barre librement appuyée	325
Test 25.	Problème géométriquement non linéaire aux barres de rigidité différente	326
Test 26.	Barre soumise à la traction et à la charge régulièrement répartie	327
Test 27.	Flexion forcée de la plaque à console	328
Test 28.	Membrane carrée au contour élastique	329
Test 29.	Stabilité de la coque	330
Test 30.	Stabilité de la console	331
Test 31.	Stabilité de la console sous charge régulièrement répartie	332
Test 32.	Stabilité de la flexion simple de la console	333
Test 33.	Stabilité de la flexion simple de la poutre articulée	334
Test 34.	Stabilité en torsion	335
Test 35.	Stabilité de la barre aux tronçons rigides	336
Test 36.	Poutre à section variable	337
Test 37.	Plaque mince	338
Test 38.	Plaque rectangulaire articulée	339

Test 39.	Coque cylindrique	340
Test 40.	Problème Hovgaard	341
Test 41.	Oscillations de la console cunéiforme	342
Test 42.	Effet impulsif	343
Test 43.	Evolution des déplacements le long des barres aux bouts libres	344
Test 44.	Barre à console aux appuis unilatéraux	345
Test 45.	Système aux ressorts unilatéraux	346
Test 46.	Plaque circulaire sur appui élastique unilatéral	347
Test 47.	Problème de contacts pour le cylindre	348
Test 48.	Plaque carrée sur appui rigide unilatéral	349
Test 49.	Dilatation thermique en présence du jeu	350
Test 50.	Contact dynamique unilatéral de la plaque carrée	351
Test 51.	Caractéristiques géométriques de l'ellipse	352
Test 52.	Caractéristiques géométriques du triangle équilatéral	353
Test 53.	Caractéristiques géométriques du demi-cercle	354
Test 54.	Caractéristiques géométriques du profil mince en I	355
Test 55.	Caractéristiques géométriques du secteur d'un anneau mince	356
Test 56.	Caractéristiques géométriques d'une section partiellement fermée	357

## **Предисловие**

Вся история строительной механики в докомпьютерный период изобиловала приемами, ориентированными на численную реализацию той или иной расчетной схемы. Методы моментных и угловых фокусных отношений, метод Кросса, метод перераспределения начальных угловых деформаций, метод упругого центра и другие приемы – вот небольшой перечень из огромного ряда существовавших в то время приемов и методов расчета конструкций, которые, по сути, сводились к стремлению избежать большого количества вычислений. И когда специалист составлял расчетную схему он, прежде всего, думал о возможности решения задачи в такой постановке.

Положение в корне изменилось с появлением компьютеров, а затем и метода конечных элементов. Первые практически сняли проблему объема вычислений, а метод конечных элементов, с одной стороны, примирил и взаимно обогатил методы теории упругости и методы строительной механики стержневых систем, а с другой стороны, заменил дискретизацию дифференциальных уравнений (метод конечных разностей) или функционала потенциальной энергии (вариационно-разностные методы) непосредственно дискретизацией расчетной схемы, что значительно расширило возможности построения адекватных моделей.

Таким образом, можно говорить, что в конце 50-х – начале 60-х годов в строительной механике произошла тихая революция, связанная с отказом от многочисленных узко ориентированных приемов и перенесением центра тяжести в фундаментальные исследования методов механики твердого тела и математической физики, а в инженерной практике – на приемы и методы построения компьютерных моделей. Это было достаточно быстро осознано специалистами, работавшими в области применения компьютеров при расчетах конструкций. Так, разработчики семейства программных комплексов ЛИРА уже в 60-х (программные комплексы РПСС, ЭКСПРЕСС, МИРАЖ) большое внимание уделяли рекомендациям по составлению расчетных схем. В последнее время появляется большое количество работ, посвященных синтезу и анализу расчетных схем, но именно таких, применение которых решает одну задачу – нахождение компонентов напряженно-деформированного состояния фиксированной расчетной схемы под заданную нагрузку. Вместе с тем, непрерывно увеличивающаяся мощность современных технических платформ (быстродействие, память), современные возможности операционных сред и современные методы строительной механики (метод конечных элементов, учет физической и геометрической нелинейности) позволяют учесть конструктивные особенности сооружения и реологические свойства материала непосредственно в дискретной расчетной схеме, что открывает поистине неограниченные возможности в компьютерном моделировании.



По сравнению с возможностями расчетных схем компьютерные модели позволяют ставить и решать значительно более широкие задачи, связанные с моделированием процессов:

- моделирование процесса нагружения;
- моделирование процесса возведения;
- моделирование процессов «приспособляемости».

На их основе возможно моделирование всего «жизненного цикла» сооружения.

В ряде случаев (их количество интенсивно расширяется) компьютерные модели вытесняют испытание натуральных образцов или подсказывают экспериментатору где, как и что надо выявить в результате натурального эксперимента. Например, имеются работы по моделированию заделки арматурного стержня в бетонном массиве, моделированию работы сваи в грунтовом массиве и мн. др. (раньше это была исключительно прерогатива натуральных испытаний). Распространено компьютерное моделирование узлов мостовых конструкций. Список таких примеров может быть продолжен.

*Небольшое отступление.*

*Группа сопровождения ежедневно выполняет несколько десятков консультаций по запросам пользователей, поступающих по телефону, электронной или факсимильной связи, на форуме сайта [www.lira.com.ua](http://www.lira.com.ua) или при личной встрече. В 2003 году поступил запрос для консультации по достаточно сложной схеме. На просьбу группы сопровождения прислать компьютерную модель для изучения проблемы и оказания консультации последовал отказ. В качестве аргумента было сообщено: компьютерная модель – это наше «ноу-хау». Можно считать этот случай рядовым, а можно считать его знаковым: составление компьютерных моделей становится искусством и специалистами, их составляющие, дорожат примененными приемами и находками, не желая в ряде случаев делать их всеобщим достоянием.*

В этой книге авторы, не следуя примеру вышеназванных специалистов, не делая никаких секретов и опираясь на свой более чем сорокалетний опыт разработки программных комплексов, их сопровождения, расчетов и проектирования сложных конструкций, общения с профессионалами в области строительной механики и математической физики изложили свое видение проблемы синтеза и анализа компьютерных моделей конструкций, что и определило название книги.

## **От авторов**

В предлагаемой книге авторы сделали попытку рассмотреть некоторые вопросы синтеза и анализа компьютерных моделей, опираясь на более чем сорокалетний опыт разработки и использования программных комплексов семейства ЛИРА, бесценный опыт общения с пользователями, учеными и их трудами.

Сейчас, когда современные компьютеры, операционные системы и специализированные программные комплексы предоставляют пользователям практически неограниченные возможности расчета и проектирования конструкций, наблюдаются тенденции не только традиционно определять напряженно – деформированное состояние, соответствующее фиксированной расчетной схеме, но и осуществлять компьютерное моделирование процессов, связанных с различными стадиями жизненного цикла сооружения.

Конечно, в основе компьютерного моделирования лежат расчетные схемы (одна, несколько, связанная последовательность), поэтому вопросам построения расчетных схем также уделено внимание авторов.

Много внимания авторы уделили теоретическому обоснованию применяемых методов, так как инструментарий построения компьютерных моделей должен быть безупречен. Этот материал, наряду с разделом о численной реализации методов расчета конструкций, может быть полезен исследователям и разработчикам программных комплексов.

В основном же, по нашему мнению, книга предназначена специалистам, которые избрали синтез и анализ компьютерных моделей своей основной профессией. Сейчас эта профессия становится все более актуальной, почетной и востребованной.

Авторы благодарят весь коллектив разработчиков ПК ЛИРА и ПК МОНО-МАХ. В первую очередь В.Е. Боговиса, Е.Б. Стрелецкого, А.В. Горбовца, Ю.Д. Гераймовича, Д.В. Марченко, Ю.В. Гензерского, В.П. Титка, без которых написание книги было бы просто невозможно.

Особая благодарность Е.И. Горбенко, которая проделала титанический труд по оформлению текста и иллюстраций.

Сильное и плодотворное влияние на видение проблемы оказало бесценное общение с замечательными инженерами и учеными современности Ю.П. Назаровым, В.А. Алмазовым, Ю.И. Немчиновым, Л.Г. Дмитриевым, Г.Б. Гильманом, В.А. Марчуком, Б.Г. Хайкиным, М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, П.Е. Соболевским, В.Г. Литвиновым.

Мы желаем успеха всем читателям книги и заранее приносим извинения за ошибки и несуразности, которые, безусловно, вам встретятся, несмотря на все наши старания.

*А. Городецкий*

*И. Евзеров*

## **О построении материала книги**

В том, что, уделяя особое внимание методам синтеза и анализа компьютерных моделей, все же необходимо достаточно подробно остановиться на изложении теоретических основ метода конечных элементов, авторы не сомневались с самого начала. Сомнения были в другом – как это сделать. С одной стороны, книга в основном ориентирована на инженеров, знающих основы строительной механики, чувствующих физику явлений, а с другой стороны, очень хотелось изложить основы МКЭ в строгой математической форме, чтобы не упустить такие важные вопросы, как сходимости, оценка приближенного решения и др., приближенные методы для физически и геометрически нелинейных задач, задач нелинейной динамики и т.п.

Изложение этих позиций в одном разделе было бы достаточно эклектичным и могло даже отпугнуть инженера сложностью изложения, а у математика вызвать неудовольствие многочисленными рассуждениями о физическом смысле. Поэтому авторы приняли решение о разделении этого материала.

Итак, построение материала книги выглядит следующим образом.

В первом разделе рассматриваются проблемы компьютерного моделирования. Красной нитью изложения проходит тезис: расчет – это способ рассуждения, а результаты компьютерного моделирования – это информация для такого рассуждения.

Во втором разделе излагаются теоретические основы МКЭ. Авторы старались это сделать с максимальным приближением к инженерному мышлению. Изложение таких проблем, как выбор базисных функций, исследование конечных элементов, применение МКЭ для решения линейных и нелинейных задач, по возможности сопровождаются несложными примерами на простейших системах типа сжато-растянутого стержня, консольного стержня, изгибаемого стержня на двух опорах и т.п. Каждое рассмотрение того или иного вопроса по возможности снабжается физическим смыслом.

В третьем разделе приводятся приемы численной реализации методов решения задач механики. Авторы здесь также одолевали сомнения в необходимости приведения такого материала. Однако соображения о его полезности для разработчиков программных комплексов и о том, что пользователю при компьютерном моделировании полезно иметь представление об устройстве инструментария, склонили авторов к необходимости публикации такого рода материала. Вместе с тем, были предприняты старания для придания ему максимальной компактности, тем более что все программные комплексы семейства ЛИРА всегда снабжаются инструктивными материалами, где этим вопросам уделяется достаточное внимание. Кстати, в этих же материалах большое внимание всегда уделяется вопросам построения расчетных схем и компьютерных моделей.

Четвертый раздел посвящен именно этим вопросам. Приводятся различные приемы и примеры компьютерного моделирования. Конечно, ни о какой полноте говорить не приходится, так как область практически необъятна. Авторы постарались представить примеры компьютерного моделирования как достаточно сложных конструкций (геометрически нелинейные вантовые системы и мембраны, контактные задачи и т.п.), так и достаточно востребованных в настоящее время конструкций (плиты, подпертые ребрами, конструкции высотных зданий). Авторы не обошли вниманием и вопросы компьютерного моделирования процессов, связанных с жизненным циклом конструкций (процессы возведения, процессы нагружения). Безусловно, в дальнейших изданиях этот материал будет расширяться, а, может быть, оформляться в виде отдельных публикаций. Примером расширения этого материала служит недавно вышедшая книга «Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона» (Киев, Факт, 2004, [www.lira.com.ua](http://www.lira.com.ua)).

Книга имеет два очень обширных приложения.

В Приложении 1 приводятся математические основы МКЭ. В какой-то мере это альтернатива второму разделу и об этом говорилось вначале. Помещение этого материала в приложении объясняется тем, что круг специалистов, заинтересованных в таком материале, будет не так обширен. Вместе с тем, авторы предполагают, что и для инженеров-практиков наличие такого материала полезно, так как придает им уверенность в том, что применяемые ими методы строго обоснованы.\* Во всяком случае, они всегда могут в этом убедиться, взглянув в приложение.

В Приложении 2 приведен набор верификационных тестов. Тесты имеют различную сложность: от простых задач линейной статики и динамики до сложных физически и геометрически нелинейных задач, задач с односторонними связями, задач устойчивости и нелинейной динамики. Этот материал может быть полезен при верификации программных комплексов, как их разработчикам, так и специалистам, проводящим сертификацию. Пользователи могут применить этот материал, чтобы убедиться в соответствии возможностей программного комплекса декларациям их разработчиков.

---

\* Имеются в виду методы реализованные в ПК ЛИРА: сходимости и оценка погрешности реализованных конечных элементов; сходимости итерационных и прямых методов решения нелинейных задач (физическая и геометрическая нелинейность, односторонние связи, трение, сыпучие среды в упруго-пластической постановке, устойчивость, нелинейная динамика); правомерность аппроксимации криволинейных поверхностей плоскими конечными элементами, правомерность несогласованной стыковки различных типов конечных элементов и др.

## Глава 1 . Проблемы компьютерного моделирования

### 1.1. Путь к компьютерным моделям.

#### Ретроспектива. Возможное развитие

Когда в конце 50-х годов ЭВМ стали доступны гражданским инженерам, первыми, кто оценил перспективу их применения в практике проектирования конструкций, были инженеры-расчетчики. Это было вполне естественно, так как именно они в первую очередь страдали от необходимости производить большое количество вычислений. Их многочисленные попытки уйти от этой проблемы, используя приближенные методы, упрощенные расчетные схемы, гипотезы, допущения и другие способы, хорошо отображены в сборнике статей [1.1] – «Строительная механика в СССР 1917– 1957» под редакцией И.М. Рабиновича, в котором, по сути, подведен итог развития строительной механики в докомпьютерный период.

Первой процедурой, которая была реализована на ЭВМ того периода, было, конечно, решение систем линейных уравнений. Эта процедура, с одной стороны, лежит в основе практически всех численных методов, с другой стороны, сравнительно проста в реализации (так, по крайней мере, тогда это казалось) и связана с большим количеством вычислений.

#### *Небольшое отступление*

*В 50-е годы делались попытки решать системы линейных уравнений прямым методом исключений (Гаусса) на клавишных автоматах. Решение системы уравнений двадцатого порядка на клавишных автоматах занимало 5–6 дней. Попытки превзойти этот предел даже для опытного оператора клавишных автоматов с применением хорошо организованной последовательности вычислений с многочисленными перекрестными проверками [1.2] оканчивалось неудачей – человек ошибался, и это все время отодвигало достижение цели. Поэтому, на семинаре в Харькове в 1959 году Р.А. Резников – один из пионеров применения ЭВМ в расчетах конструкций – в своем сообщении заявил, что разработан и реализован алгоритм метода Гаусса для решения систем уравнений. Система с 30-ю неизвестными решается на ЭВМ за 4 минуты и проблему решения систем линейных уравнений можно считать закрытой. Это произвело огромное впечатление. Была продемонстрирована мощь ЭВМ – больших арифмометров (тогда ЭВМ воспринимались только как вычислители, отсюда и их название – электронные вычислительные машины). Но как ошибался Р.А. Резников, и насколько быстрой была эйфория. Проблема решения систем линейных уравнений занимает ученых и по сей день. Ленточный, окаймленный, небоскрежный методы, метод исключений, фронтальный метод, метод суперэлементов, метод параллельных вычислений, разреженных матриц – вот неполный перечень приемов решения этой проблемы. Пути совершенствования решения любой проблемы, даже кажущейся на первый взгляд простой, бесконечны.*

Затем было быстро осознано, что возможность решения на ЭВМ систем линейных уравнений вызывает другие проблемы. Составление больших систем

и дальнейшая обработка их решений – вычисление параметров напряженно-деформированного состояния – оказалось также очень трудоемким. Эти процедуры также были реализованы. Реализация других этапов расчета (расчетные сочетания усилий, расчетные сочетания нагрузжений, конструирующие подсистемы и др.) и их интеграция внутри программных комплексов продолжается и в настоящее время.

В начале 60-х годов образовалось несколько школ, каждая из которых избрала свой путь решения проблемы расчета конструкций: московская школа Р.А. Резникова (Л.С. Якобсон, А.М. Горлов, В.С. Лавитман), киевская школа Д.В. Вайнберга, (А.Л. Синявский, А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, Е.С. Дехтерюк), киевская школа П.М. Сосиса (Л.Г. Дмитриев, Г.Б. Гильман, И.Д. Гликин, А.С. Городецкий).

Школа Р.А. Резникова первой начала создавать программы, которые автоматизировали составление и решение уравнений, а также вычисление усилий и перемещений [1.3, 1.4]. Разработанные в этом коллективе программы СИДР и МАРСС были основными инструментами в практике расчета конструкций в начале 60-х годов. Здесь была отдана дань традициям, и был реализован метод сил как основной метод докомпьютерной эпохи, так как этот метод охватывал возможности различных ухищрений с целью сокращения количества вычислений (многочисленные варианты расчетных схем, метод упругого центра и др.). Вскоре выяснилось, что метод сил является неперспективным ввиду трудностей алгоритмизации построения расчетных схем и в дальнейшем от него пришлось отказаться. Это был первый пример, когда новая технология расчета конструкций, связанная с применением ЭВМ, существенно повлияла на выбор подходов и методов строительной механики.

Киевская школа Д.В. Вайнберга разрабатывала вариационно-разностные методы решения задач пластин и оболочек [1.5]. Разработанная в этом коллективе программа «ПРОЧНОСТЬ» широко использовалась в исследованиях строительных и машиностроительных конструкций.

Разработки Киевской школой П.М. Сосиса [1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10] опирались на такие основные представления:

- метод перемещений, как наиболее удобный для алгоритмизации;
- непосредственная дискретизация пластинчатых систем на основе стержневых аппроксимаций;
- шаговый метод для решения нелинейных задач.

По сути, эти концепции лежат в основе всех современных программных комплексов, с той лишь разницей, что дискретизация пластинчатых и массивных тел производится на основе более плодотворных идей метода конечных элементов.

Появление ЭВМ обусловило интенсивную разработку численных методов, которые, так или иначе, основывались на дискретизации дифференциальных уравнений (метод сеток), функционала потенциальной энергии (вариационно-разностные методы) и непосредственно расчетных схем. Поначалу предпочте-

ние отдавалось разностным методам, тем более что они были хорошо разработаны в докомпьютерный период, например работы П.М. Варвака [1.11], а также множество работ, посвященных реализации методов Ритца и Галеркина. Однако все большее внимание ученых привлекали возможности непосредственной дискретизации расчетных схем. Здесь также довели определенные традиции – хорошо разработанные методы строительной механики стержневых систем и уже имеющиеся удачные реализации их на ЭВМ заинтересовали многих ученых возможностью расчета пластинчатых и трехмерных систем на основе стержневых аппроксимаций [1.7, 1.8, 1.12, 1.13]. Настоящую революцию в строительной механике и теории упругости, значение которой в полной мере осознается только сейчас, произвело появление метода конечных элементов (МКЭ). Это объясняется тем, что МКЭ, с одной стороны, использует строгие математические обоснования методов теории упругости и математической физики, с другой стороны, открывает неограниченные возможности компьютерного моделирования, основанные на непосредственной дискретизации расчетных схем. МКЭ «примирил» и возможно обогатил методы строительной механики стержневых систем (по сути, подход, основанный на применении матрицы жесткости стержня – прерогатива МКЭ – использовался испокон веков) и методы теории упругости. Это дало возможность использовать хорошо разработанные подходы и апробированные для стержневых систем методы и приемы реализации на ЭВМ для расчета пластинчатых и трехмерных систем.

#### *Небольшое отступление*

*Термин «шарнир» и содержательная его сущность сплошь и рядом используется в моделях стержневых систем. Сейчас он стал частым гостем и в расчетах пластинчатых систем, где применяется, например, при моделировании цилиндрических шарниров. Ранее в рамках прежних концепций теории упругости, которая ограничивалась построением дифференциальных уравнений и рассмотрением многочисленных, далеко не универсальных, приемов их решения, моделирование такого естественного и широко распространенного свойства конструкции было связано с большими трудностями.*

Большое количество работ посвященных МКЭ появилось в середине 60-х и начале 70-х годов прошлого столетия, хотя считается, что первым предложил МКЭ в его современном виде Р. Курант еще в 1943 г. [1.14].

В обзорно-аналитической статье [1.15] анализируются 196 работ, посвященных МКЭ и опубликованных в начале 70-х годов. Это, конечно, не полный перечень. Среди работ того времени следует отметить ранние работы О. Зенкевича [1.16], М. Тернера, Р. Клафа, К. Мартина, Л. Топпа [1.17], а также работы Л.А. Розина [1.18, 1.19] и В.Г. Корнеева [1.20], где было дано математическое обоснование МКЭ.

В 1969 году была разработана одна из первых программ «МИРАЖ» [1.21] на ЭВМ «Минск-22», ориентированная на массовое применение (в дальней-

шем такие программы получили название «промышленные»), в которой был реализован МКЭ в его современном виде.

В последующих разработках можно видеть три направления:

- поиски альтернативных МКЭ численных методов;
- совершенствование МКЭ;
- совершенствование программных комплексов, реализующих МКЭ.

Достаточно быстро было осознано, что метод конечных элементов в перемещениях, несмотря на всю свою привлекательность, имеет ряд существенных недостатков. Это в первую очередь пониженная (по сравнению с перемещениями) точность вычисления напряжений и усилий; наличие разрывов значений напряжений и усилий на границах конечных элементов; неиспользование граничных условий, выраженных в напряжениях и усилиях. Кроме того, МКЭ свойственны недостатки всех численных методов: необходимость решения систем уравнений больших размеров и связанные с этим проблемы обусловленности, а для определения параметров напряженно-деформированного состояния в локальной области необходимо рассчитывать всю конструкцию.

В связи с этим, в 70–80-е годы разрабатывались методы, альтернативные МКЭ в перемещениях. В основном это методы, основанные на вариационных формулировках, отличных от функционала в перемещениях:

- *Метод напряжений*, в котором используется функционал дополнительной энергии Кастильяно. Он минимизируется на множестве допустимых напряжений. Допустимые напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия в напряжениях при заданной внешней нагрузке. Основным недостатком этого метода в том, что множество допустимых напряжений зависит от нагрузки. При множестве загрузок это вызывает существенные затруднения.
- *Смешанный метод*, в котором неизвестными являются перемещения и напряжения. Недостатком этого метода является необходимость нахождения седловой точки функционала Рейсснера, следовательно, нет положительной определенности.
- *Гибридные методы*, где неизвестными являются перемещения в узлах и средние значения напряжений на границах элементов.
- Несколько обособленно выглядит *метод граничных интегральных уравнений*. Применение этого метода позволяет выразить значения перемещений внутри области через их значения на границе. Задача сводится к интегральному уравнению, которое далее решается МКЭ. Недостаток – неприменим для неоднородных областей и сложной геометрии области. Хотя количество неизвестных и сокращается, но матрица системы уравнений полностью заполнена.

В связи с тем, что действительной альтернативы МКЭ в перемещениях найти не удалось, в настоящее время наблюдается спад в подобных научных разработках, хотя, возможно, действенные альтернативные методы появятся.



Значительно более интенсивно развивались направления по разработке новых форм МКЭ в перемещениях и совершенствованию программных комплексов.

Совершенствование МКЭ в основном было связано с разработкой уточненных КЭ с тем, чтобы снизить размерность разрешаемых уравнений, приложению МКЭ к решениям задач динамики, устойчивости, физической и геометрической нелинейности. По неофициальным данным количество работ по МКЭ уже измеряется десятками тысяч. Поэтому имеет смысл перечислить только основные направления:

- Построение уточненных конечных элементов за счет увеличения количества узловых неизвестных и степени аппроксимирующих полиномов. Это направление известно как  $p$ -метод, в отличие от традиционного МКЭ –  $h$ -метода, в котором для уточнения решения уменьшаются размеры элементов.
- Ведутся исследования и по комбинированию  $h$  и  $p$ -методов –  $h$ - $p$ -метод, который состоит в одновременном сгущении сетки и увеличении степени полиномов.
- Метод структурных конечных элементов (МСКЭ) в основном применяется для пластин и оболочек. Конечномерная аппроксимация строится для трехмерной задачи, затем используется дискретный аналог гипотез Кирхгофа.
- Различные модифицированные методы вычисления напряжений:
  - вычисление средних значений напряжений в узле по полученным напряжениям в центрах КЭ, составляющих звезду этого узла;
  - метод двух функционалов – построение непрерывных полей напряжений по вычисленным разрывным. Метод основан на минимизации функционала дополнительной работы на множестве непрерывных напряжений, удовлетворяющих статическим граничным условиям.

Неограниченные возможности реализации компьютерных моделей на основе МКЭ обусловили разработку новых методов математической физики для решения задач динамики, устойчивости, физической и геометрической нелинейности.

Например, для задач динамики перспективна разработка методов прямого интегрирования, позволяющего учитывать реологические свойства материала. Решение задач устойчивости должно быть неразрывно связано с решением задач физической и геометрической нелинейности ( $p - \Delta$  метод, широко распространенный на Западе и включенный в Еврокод). Недостаточность и временная проблематичность описания вероятностных процессов нагружения, недостаточные знания о реологических свойствах материала, особенностях сложного и циклического нагружения и мн. др. не должны останавливать разработчиков программных комплексов в последовательном (step by step) продвижении к це-

ли. Например, реализация решения задач физической нелинейности в рамках активного нагружения, несмотря на ряд упрощенных гипотез, предоставляет специалисту значительно больше информации для размышления (см. раздел 1.3) по сравнению с расчетными схемами, основанными на упруго-линейных предположениях.

Рискнем высказать предположение, что самостоятельная роль расчетных схем в линейно-упругой постановке со временем будет стремительно уменьшаться, и им будет отводиться вспомогательная роль при решении нелинейных задач на основе методов линеаризации.

Что касается совершенствования современных программных комплексов, то здесь главенствующую роль, по-видимому, будут играть принципы интеграции, универсализации и интеллектуализации.

*Немного терминологии*

*Термины «интеграция», «универсализация», «интеллектуализация», равно как и термины «расчетная схема», «расчетная модель», «промышленная программа», «программный комплекс», «система», «подсистема» и др. являются для обсуждаемой в этой книге области достаточно молодыми (как и сама область) и еще не устоявшимися. Авторы не уделяют этому особого внимания, так как не хотят втягиваться в бесконечный спор о терминах, тем более что специалист – технократ всегда поймет, о чем идет речь.*

Рассуждая о возможных направлениях совершенствования программных комплексов, прежде всего необходимо иметь в виду, что здесь легко ошибиться, хотя прогнозируемая область достаточно узка и прозрачна. Так, в работе [1.22], посвященной именно прогнозу развития программных комплексов, указан ряд прогнозных функций, некоторые из которых были реализованы практически немедленно, а некоторые, например, автоматический выбор метода решения, до сих пор не выполнены, и их осуществление в ближайшем будущем не просматривается. Ряд примеров слишком оптимистических и быстро реализованных прогнозов, конечно, может быть продолжен.

Безусловно, можно говорить о том, что основные усилия разработчиков в ближайшем будущем будут направлены на интеллектуализацию программных комплексов. Характерным примером в этом отношении является программный комплекс «МОНОМАХ» [1.23], ориентированный на решение задач расчета и проектирования конструкций высотных зданий. Он обладает многими признаками интеллектуальных систем: язык общения пользователя с компьютером достаточно естественен, пользователь оперирует такими понятиями, как колонна, ригель, плита перекрытия, отверстие в плите или в стене и т.п. Принципы задания нагрузок предельно упрощены и так же естественны – нагрузка по всей области, по произвольному полигону и т.п. Для ветровых и сейсмических воздействий достаточно задать только направление воздействия и район строительства. Комплекс обладает экспертной системой, которая в процессе расчета сообщает пользователю о некорректности принятых исходных данных – недостаточном сечении элемента, переемлении и т.п.

И, конечно же, программные комплексы будут наращивать возможности компьютерного моделирования процессов возведения, процессов нагружения на всех стадиях эксплуатации, т.е. жизненного цикла конструкций. Революционные преобразования компьютерных технологий в современном проектировании строительных объектов налицо. Все чертежи практически выполняются только на компьютерах, происходит процесс интеграции программных комплексов автоматизирующих различные разделы проекта. По-видимому, в недалеком будущем следует ожидать появления технологий проектирования, основанных на последовательном создании в компьютере «виртуального объекта», во всех подробностях отражающего его реальный прототип. В дальнейшем «виртуальный объект» будет документироваться, архивироваться, служить основой организации строительства и отражать все изменения своего натурального близнеца в процессе эксплуатации. Первые шаги в этом направлении уже сделаны. Разработана интегрированная технологическая линия проектирования многоэтажных зданий «КАЛИПСО» ([www.lira.com.ua](http://www.lira.com.ua), [www.sofos.com.ua](http://www.sofos.com.ua)).

## 1.2. Глубина моделирования

Рассмотрим очень простую конструктивную схему, имеющую, между тем, реальные очертания. Это однопролетная одноэтажная рама, опирающаяся на фундаментную балку (рис. 1.1, а). Материал конструкций – железобетон. Грунтовое основание принято в виде модели Винклера с коэффициентом постели  $300 \text{ т/м}^3$ . На раму действуют два нагружения: постоянное (рис. 1.1, б) и времен-

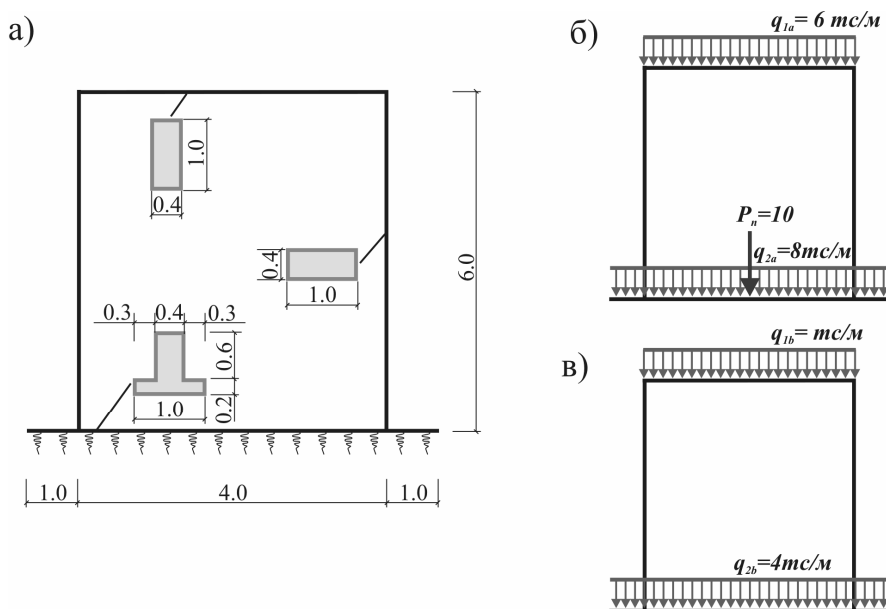


Рис. 1.1.

ное (рис. 1.1, в). На рисунке 1.2 показаны эпюры моментов в элементах рамы при различных расчетных предположках.

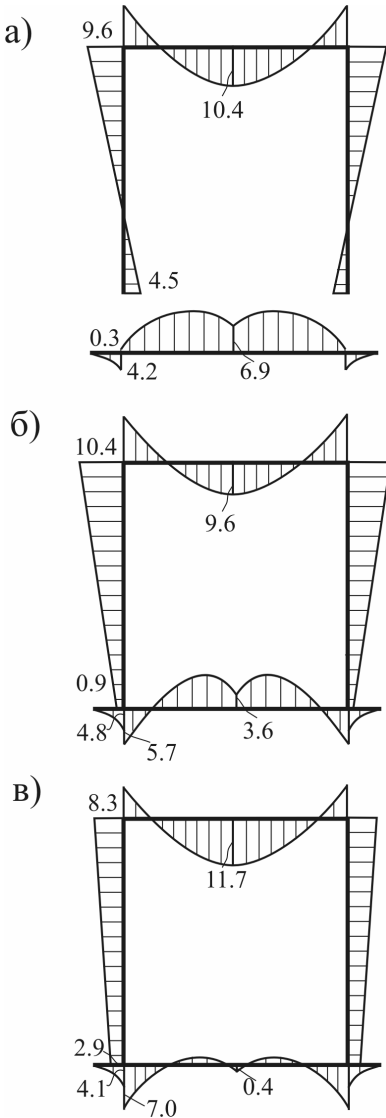


Рис. 1.2.

На рис. 1.2, а эпюра моментов соответствует раздельному расчету рамы и фундаментной балки, т.е. сначала была рассчитана рама с жестким защемлением низа стоек, а затем фундаментная балка на собственную нагрузку и силы, соответствующие реакциям в защемлении низа стоек рамы. Такой подход был широко распространен в докомпьютерный период. Специалисты много времени могли обоснованно считать, что они произвели *точный* (!?) расчет, т.к. полученные усилия точно соответствовали принятым расчетным схемам.

На рис. 1.2, б приведена эпюра моментов, соответствующая расчетной схеме, учитывающей совместную работу рамы и фундаментной балки. Здесь уже можно наблюдать некоторые изменения. Наиболее значительное – это изменение величины и знака в нижнем сечении стойки, а также уменьшение величины моментов в фундаментной балке. Это известный эффект, обусловленный совместной работой фундаментных и надземных конструкций (подробно он будет исследован в разделах 4.9 и 4.11). Расчет по такой схеме характерен для настоящего времени, когда современные программные комплексы позволяют исследовать расчетные схемы с большим количеством элементов и узлов, и, следовательно, учитывать эффекты совместной работы всех элементов конструкций.

На рис. 1.2, в показана эпюра моментов, отражающая последовательность возведения конструкции: сначала рассматривается фундаментная балка с постоянной нагрузкой  $P_n$  и  $q_{2n}$  (рис. 1.2, б), затем рассматривается фундаментная балка совместно с рамой и прикладывается нагрузка  $q_{1n}$  (рис. 1.2, в), а затем уже на

всю конструкцию прикладывается временная нагрузка (рис. 1.2, в). На каждом этапе полученные усилия замораживаются и суммируются с усилиями, полученными для следующей схемы. Здесь изменения более чем значительны. Так,

например, момент в середине фундаментной балки изменил величину и знак. Схема работы фундаментной балки полностью изменилась по сравнению с первыми двумя. Изменилась и схема работы стоек.

Можно говорить о том, что последняя эпора моментов получена на основе компьютерного моделирования, т.к. схема (рис. 1.2, в) получена на основе моделирования процесса возведения\*. Рассматривая приведенные подходы в исследовании этой простейшей конструктивной схемы, можно говорить о том, что все расчетные схемы и полученные результаты *правильные* (!?) с точки зрения правильного отображения заложенных в них предпосылок.

С точки зрения правильного отображения действительной работы конструкции эти «правильные» схемы имеют далеко не одинаковую степень приближения. Даже для приведенного простейшего примера далеко не исчерпаны факторы, которые могли бы приблизить результаты расчета к адекватному отображению действительной работы конструкции. Вместо винклеровской модели можно принять модель упругого полупространства (в данном случае полуплоскости), учесть нелинейную работу грунтового основания (например, по схеме Кулона) и материала конструкции. Кроме того принять во внимание, что временные нагрузки могут действовать не одновременно.

Еще целый пласт возможных расчетных модулей образуется на основе стохастического подхода. С большой степенью вероятности (уже это часто встречающееся сочетание слов свидетельствует о том, что мы живем в вероятностном мире и при решении многих проблем возможен вероятностный подход) можно говорить, что все используемые в настоящее время расчетные схемы и компьютерные модели конструкций (в том числе и рассмотренные выше) основаны на детерминистическом подходе. Это означает, что геометрия конструкции, характеристики материала, нагрузки и др. описываются фиксированными величинами.

В рамках стохастического подхода, который во многом может показаться более естественным, чем детерминистический, параметры, описывающие геометрию конструкции и характеристики материала, являются случайными величинами, а описание нагрузок, особенно таких как ветровые или сейсмические, выполняется на основе случайных (в общем случае нестационарных) процессов. Эта ситуация всегда была в поле зрения ученых [1.24, 1.25] и являлась одним из аргументов перехода в 60-х годах от единого коэффициента запаса к набору повышающих (перегрузки) или понижающих (условия работы для материала) коэффициентов. Такая замена, по мнению авторов такого подхода, создавала предпосылки для более удобного внесения поправок в эти коэффициенты на основании дальнейших исследований вероятностных свойств нагрузок и материала. В

---

\* Все многочисленные результаты расчетов и компьютерного моделирования, приведенные в этой книге, получены на основе программного комплекса ЛИРА ([www.lira.com.ua](http://www.lira.com.ua)).

последнее время коэффициенты перегрузки заменили коэффициентами надежности (показательно, что этот термин заимствован из теории вероятности). В 60–70-х годах наблюдался некоторый всплеск исследований в области вероятностного подхода [1.26, 1.27, 1.28]. В характерной для того периода работе [1.29] рассматривалась возможность определения вероятности разрушения для достаточно сложных конструкций (статически неопределимая ферма с учетом физической нелинейности). Характеристики материала и нагрузок задавались как гистограммы для случайных величин, хотя рассматривалась возможность и задания нагрузок как случайных стационарных процессов. В основу решения задачи был положен метод стохастических испытаний [1.30], для которых использовался метод Монте-Карло с различными модификациями (метод выделения главного объема, метод стратификаций, метод антикоррелированных выборок). По сути, в этой статье было продемонстрировано, что методы компьютерного моделирования во многом решают проблему численной реализации вероятностного подхода.

Несмотря на то, что с тех пор мощность компьютеров резко возросла и в какой-то степени можно говорить, что численная реализация вероятностного подхода может стать доступной в конкретных расчетах, этот подход остается предметом научных исследований в связи с неподготовленностью нормативной базы и слабым статистическим материалом, характеризующим вероятностные свойства конструктивных схем и нагрузок. Поэтому инженерная практика расчета и проектирования конструкций осталась на прежних детерминистических позициях, а в ряде областей (мостовые конструкции) до сих пор использует подходы, основанные на коэффициенте запаса. Это объясняется с одной стороны устоявшимся, хорошо разработанным аппаратом, основанным на детерминистическом подходе, а с другой стороны сложностью изучения вероятностных свойств нагрузок, для которых выработаны практические рекомендации, а также удобный инженерный аппарат учета этих свойств в практических расчетах. Хотя, безусловно, детерминистический подход определения параметров напряженно–деформированного состояния и сравнение их с допустимым является менее естественным, чем определение количества отказов (разрушения конструкции) в заданный период времени и сравнение его с количеством допустимых отказов.

Конечно, ряд возможных расчетных моделей может быть продолжен. И как быть специалисту в этой ситуации при выполнении конкретного расчета, когда он должен выдать решения для дальнейшего конструирования? Как разобратся в этом огромном количестве расчетных схем и моделей? Рассуждения на эту тему будут продолжены в следующем разделе.

### **1.3. Расчет – это способ рассуждения**

В предыдущем разделе показано, что даже для простой конструкции (П – образной рамы, что может быть проще?) возможно большое количество компьютерных моделей, на основе которых полученные параметры напряженно – деформированного состояния могут значительно отличаться. Причем рас-

сматривалась только стержневая система, для которой имеется возможность получить точное решение (в смысле решения дифференциальных уравнений). Для пластинчатых и массивных конструкций решения на основе метода конечных элементов являются приближенными, и это порождает еще один практически неограниченный ряд возможных компьютерных моделей, обусловленный применением различных типов конечных элементов (различные геометрические формы, базисные функции, узловые неизвестные) и различных видов расчетной сетки (различный шаг, равномерная, неравномерная сетка). Применение различных конечно-элементных моделей также может давать различные результаты. Как разобраться специалисту в этом лабиринте возможных компьютерных моделей, когда ему необходимо ответить на конкретный вопрос: как запроектировать конструкцию, чтобы с одной стороны она была достаточно экономичной, а с другой стороны обладала необходимой надежностью.

Ответ на этот, казалось бы, сложный вопрос может оказаться неожиданно простым: расчет – это способ рассуждения. А результаты расчетов и исследований, полученные на основе различных компьютерных моделей – это информация для такого рассуждения.

#### *Небольшое отступление*

*Лев Гумилевский в книге «Русские инженеры» писал: «В старину на Руси строители городов, укреплений, мостов, плотин – все те, кого сегодня назвали бы инженерами, назывались размыслами. Размысл обязан был размыслить задачу, опираясь не только на собственный опыт, но и на весь опыт, накопленный его предшественниками, на свой ум, изобретательность...», и на информацию, которую предоставляет компьютерное моделирование, – добавил бы автор этой книги, если бы жил в наше время.*

Такой простой ответ для определенного круга специалистов, особенно для инженеров, мировоззрение которых формировалось в докомпьютерный период, может показаться слишком сложным. Ведь раньше все было гораздо проще: точно рассчитывалась рама, точно рассчитывалась балка; если схема была сложнее, то принимались одно или несколько упрощений, при которых можно было получить точное решение. СНИП также как будто давал ответы на все вопросы, и эти указания неукоснительно соблюдались. Почему сейчас, когда, казалось, компьютеры должны облегчить работу инженера, ситуация на первый взгляд оказалась усложненной.

Конечно, при анализе этой ситуации имеется много аспектов.

Во-первых, и раньше многие инженеры относились к расчету как к способу рассуждения. Просто для этих рассуждений было меньше информации, поэтому требовалось больше интуиции и опыта. Естественно, что недостаток информации часто компенсировался большими запасами прочности.

Во-вторых, появление компьютеров позволило учитывать в повседневной деятельности инженеров многие факторы – геометрическую и физическую не-

линейности, монтаж и многое другое, которые ранее были предметом лишь научных исследований.

В-третьих, несколько изменились взгляды на СНиП. СНиП и раньше допускал возможность отступления от установленных правил. Например, при обоснованном расчете – увеличивать размеры температурных блоков. Допускались и определенные алогизмы: расчет сооружения – в линейной постановке, а расчет сечений железобетонных элементов – в стадии предельного равновесия, которое основывается на нелинейной работе материала. И это естественно, так как нельзя все предусмотреть, нельзя заранее дать ответ на все вопросы. Поэтому вполне логично относиться к строительным нормам и правилам как к рекомендательному материалу. В Западной Европе Еврокод носит рекомендательный характер. В России принят закон о техническом регулировании, где говорится о необязательности соблюдения СНиПа. Все это также осложняет жизнь инженера, ведь свобода выбора – это тяжелое бремя. Рискнем высказать достаточно крамольную мысль (надеемся, что она будет неприемлемой только для небольшой части специалистов), что тенденции отхода от диктата строительных норм и правил в дальнейшем будут усиливаться.

#### *Небольшое отступление*

*В предисловии к вышедшей в 2003 году книге М.М. Корнеева «Стальные мосты», выдающийся мостовик современности Г.Б. Фукс пишет: книга «Стальные мосты» представляет собой оригинальную работу, рассчитанную на инженера, который не удовлетворяется в своей повседневной работе формальным соблюдением норм... Основным инструментом обеспечения надежности проектируемых конструкций будет становиться компьютерное моделирование, на основе которого проектант будет получать необходимую ему информацию. Осмысление и обобщение этой информации будет лежать в основе проектируемых конструкций».*

Современные компьютерные программы совершенствуются и в направлении облегчения выбора за счет встроенных экспертных систем, графического анализа результатов, сравнение результатов по различным расчетным схемам, выдачи информации о тенденциях изменения свойств системы на основе коэффициентов чувствительности и многое другое.

Весь материал этой книги служит рассмотрению рекомендаций для такого выбора, однако, пока окончательный выбор на основе рассуждений – это прерогатива инженера.

Небольшое отступление, подтверждающее плодотворность рассуждений на основе компьютерного моделирования.

#### *Случай из жизни*

*В начале 80-х на построенном здании пансионата «Дружба» в Крыму обнаружили трещины, и автор проекта был вызван в Крым, так как ситуация некоторыми специалистами была расценена как аварийная. Конструкция представляла собой криволинейную стену, покоящуюся на трех опорах и связанную со сложной системой перекрытий, отверстий, балконов, лоджий, эркеров. В процессе проектирования производились подробные расчеты, в том числе и компьютерное моделирование процесса нагружения конструкции с учетом реологических свойств железобетона. Компьютер-*



***А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров. Компьютерные модели конструкций.*** –  
Москва: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 360 с.

Редактор: *В.П. Бурмакин*

*Дизайн обложки: Н.С. Кузнецова*

Компьютерная верстка: *В.П. Бурмакин*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Подписано к печати 29.06.09.

Формат 70x100/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. 22,5 п.л. 1000 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)  
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – КМК, оф. 348.  
Тел., факс: (499) 183-56-83. E-mail: [iasv@mgsu.ru](mailto:iasv@mgsu.ru). Сайт: [www.iasv.ru](http://www.iasv.ru)