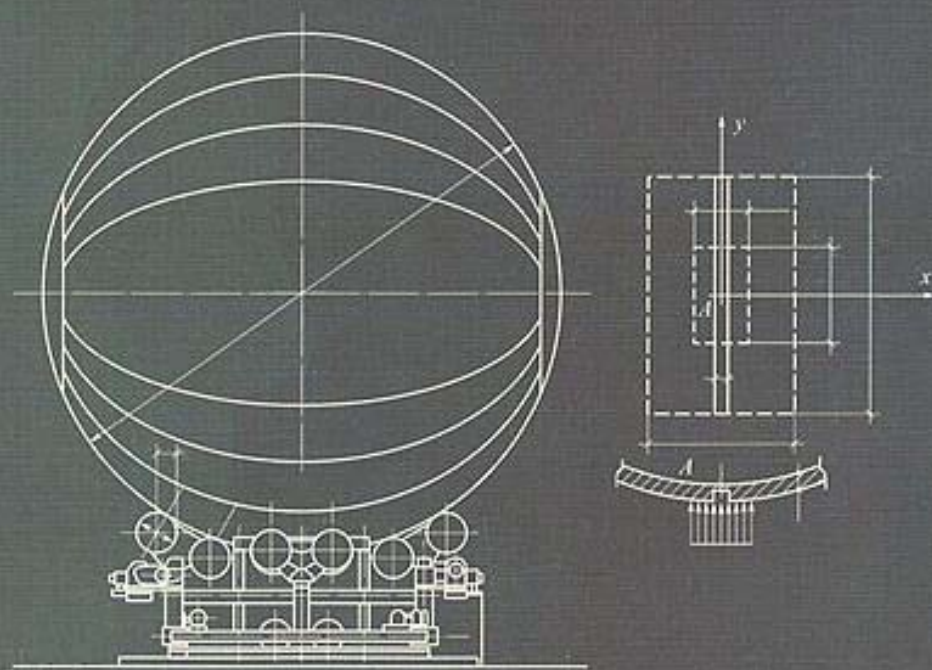


Р.Ф. Габбасов А.Р. Габбасов В.В. Филатов

# ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ



**Р.Ф. Габбасов,  
А.Р. Габбасов, В.В. Филатов**

**ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ  
РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ  
ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**



Издательство Ассоциации строительных вузов  
Москва  
2008

## Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РААСН, академик  
Международной академии информатизации  
*Шапошников Н.Н.*

Кафедра «Строительная механика и высшая математика» МАРХИ  
звездующий кафедрой Доктор технических наук, профессор, академик  
Международной академии информатизации  
*Смирнов В.А.*

## **Р.Ф. Габбасов, А.Р. Габбасов, В.В. Филатов**

Численное построение разрывных решений задач строительной механики.  
Учебное пособие. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 280 с.

ISBN 978-5-93093-591-2

Дается вывод разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА) и обобщенных уравнений метода конечных разностей (МКР) применительно к решению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Разностные уравнения МПА и обобщенные уравнения МКР позволяют в простой форме учитывать конечные разрывы искомым функций, их первых частных производных и разрывы правых частей исходных дифференциальных уравнений. Уравнения МПА обладают повышенной точностью. Показано применение этих уравнений к расчету стержней, стержневых систем, пластин и оболочек на упругом основании и без основания на устойчивость и действие статических и динамических нагрузок. Книга рекомендуется для студентов-дипломников строительных ВУЗов и инженеров проектных организаций.

ISBN 978-5-93093-591-2

© Издательство АСВ, 2008

© Р.Ф. Габбасов, А.Р. Габбасов,  
В.В. Филатов, 2008

## Предисловие

В книге излагаются основы разработанного на кафедре строительной механики МГСУ численного метода последовательных аппроксимаций (МПА).

Метод сводится к составлению разностных уравнений, учитывающих конечные разрывы искомой функции, правой части исходных дифференциальных уравнений, а также – разрывы производных этих функций. Дается также вывод обобщенных уравнений метода конечных разностей, учитывающих те же разрывы. Эти уравнения проще по структуре, но при малом числе разбиений приводят к большей погрешности.

Разработанная методика позволяет с единых позиций строить алгоритмы расчета всех конструкций: балок, арок, рам, ферм, плит – постоянной и кусочно-переменной жесткости, изгибаемых и сжато-изогнутых, на упругом основании и без основания, ребристых и ортотропных, средней толщины, а также балок-стенок и оболочек (призматических, пологих, подъемистых) – на действие статических, динамических нагрузок и на устойчивость.

Благодаря простоте и высокой точности методики многие задачи решаются при малом числе разбиений с использованием настольных вычислительных средств без составления программ для ЭВМ. В книге указаны также простые способы численной реализации предложенной методики на ПЭВМ. С этих точек зрения книга может быть использована как учебное пособие. Отдельные ее фрагменты в виде методических указаний [63, 74, 83] применяются в МГСУ в учебном процессе и дипломном проектировании.

Разностные уравнения МПА используются и при проектировании реальных сооружений для проверки расчетов отдельных частей зданий, выполненных по общим программам метода конечных элементов (МКЭ). Сопоставление МКЭ и МПА дается в тексте книги. Показывается, что МПА проще и дает результаты высокой точности. Однако разработанные мощные программы выдвигают на первое место МКЭ. Если задача не решается по общей программе МКЭ, рациональнее обратиться к МПА. Этот метод высокоэффективен в исследовательских работах.

В заключение отметим, что § 4.2, 7.4 написаны В.В. Филатовым, § 4.3, 4.4 – А.Р. Габбасовым. Ими же составлено большинство программ для ЭВМ, по которым выполнены многочисленные примеры расчетов. Авторы приносят сердечную благодарность доценту кафедры строительной механики МГСУ, кандидату техн. наук Н.Б. Уваровой и коллективу кафедры за неоценимую помощь, оказанную в работе над книгой.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение.....	7	
<b>Глава 1.</b>		
<b>Решение одномерных задач. Расчет плоских стержневых систем .....</b>		<b>9</b>
§ 1.1. Аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка обобщенным уравнением метода конечных разностей.....		9
§ 1.2. Применение обобщенного уравнения МКР к расчету балок на поперечный изгиб .....		11
§ 1.3. Разностное уравнение повышенной точности, аппроксимирующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка .....		14
§ 1.4. Расчет балок с использованием обобщенного разностного уравнения повышенной точности на статические нагрузки...		18
§ 1.5. Аппроксимация по МПА дифференциального уравнения второго порядка на неравномерной сетке.....		28
§ 1.6. Расчет арок произвольного очертания и криволинейных стержней с использованием разностных уравнений МПА.....		34
§ 1.7. Расчет плоских стержневых систем .....		44
<b>Глава 2.</b>		
<b>Решение двумерных задач .....</b>		<b>55</b>
§ 2.1. Аппроксимация дифференциального уравнения в частных производных второго порядка обобщенным уравнением МКР .....		55
§ 2.2. Обобщенные уравнения МКР, аппроксимирующие уравнение Пуассона в косоугольных, полярных и прямоугольных координатах .....		60
§ 2.3. Обобщенное уравнение МКР относительно вторых производных искомой функции.....		64
§ 2.4. Общий прием аппроксимации дифференциальных уравнений второго порядка обобщенными уравнениями МКР .....		66
§ 2.5. Разностные уравнения МПА для двумерных задач .....		67
<b>Глава 3.</b>		
<b>Расчет изгибаемых пластин .....</b>		<b>73</b>
§ 3.1. Алгоритм расчета прямоугольных плит постоянной жесткости на базе обобщенных уравнений МКР .....		73
§ 3.2. Алгоритм расчета прямоугольных плит по методу последовательных аппроксимаций .....		86

§ 3.3.	Расчет плит кусочно-переменной толщины.....	97
§ 3.4.	Расчет плит различных очертаний, со смешанными краевыми условиями и с отверстиями.....	105
§ 3.5.	О расчете пластин: ортотропных, средней толщины и с ребрами жесткости .....	119

#### **Глава 4.**

	<b>Расчет плит и балок на упругом основании.....</b>	<b>125</b>
§ 4.1.	О расчете изгибаемых пластин на упругом основании.....	125
§ 4.2.	Алгоритм расчета плит на несплошном упругом основании с учетом влияния продольных сил на изгибные деформации .....	130
§ 4.3.	Расчет сжато-изогнутых балок на несплошном упругом основании .....	155
§ 4.4.	Задачи оптимизации балок на упругом основании.....	160

#### **Глава 5.**

	<b>Решение плоской задачи теории упругости .....</b>	<b>170</b>
§ 5.1.	Алгоритм расчета в перемещениях .....	170
§ 5.2.	Алгоритм решения в напряжениях .....	181
§ 5.3.	Расчет пластин со сложным очертанием контура и с отверстиями .....	188
§ 5.4.	Учет объемных сил и переменных значений коэффициента Пуассона.....	200
§ 5.5.	Задачи термоупругости.....	204

#### **Глава 6.**

	<b>Расчет оболочек.....</b>	<b>207</b>
§ 6.1.	Расчет призматических оболочек .....	207
§ 6.2.	Алгоритм расчета пологих оболочек в перемещениях .....	212
§ 6.3.	Алгоритм расчета пологих оболочек в усилиях .....	218
§ 6.4.	Расчет круговой цилиндрической оболочки .....	222
§ 6.5.	Расчет сферической оболочки .....	225

#### **Глава 7.**

	<b>Задачи устойчивости .....</b>	<b>233</b>
§ 7.1.	Аппроксимация дифференциального уравнения устойчивости пластин постоянного сечения разностными уравнениями МПА .....	233
§ 7.2.	Численная реализация алгоритма по определению наименьшего критического параметра нагрузки.....	235
§ 7.3.	Алгоритм расчета на устойчивость пластин переменного сечения .....	240
§ 7.4.	Алгоритм расчета на устойчивость трехслойных пластин.....	242

§ 7.5.	Расчет на устойчивость стержней кусочно-переменной жесткости .....	244
<b>Глава 8.</b>		
	<b>Решение динамических задач .....</b>	<b>251</b>
§ 8.1.	Задача о колебаниях струны.....	251
§ 8.2.	Расчет балок с распределенной массой на произвольные динамические нагрузки.....	253
§ 8.3.	Алгоритм расчета плит .....	256
§ 8.4.	Расчет пологих оболочек .....	258
	<b>Приложение .....</b>	<b>259</b>
	Об оценке точности, устойчивости и сходимости решений с использованием полученных уравнений.....	259
	Список литературы.....	263

## Введение

В последующих главах книги излагается вывод обобщенных уравнений метода конечных разностей (МКР) и разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА). Показывается применение обоих методов к различным задачам строительной механики с разрывными решениями. Численно исследуется сходимость этих решений. Обобщенные уравнения МКР без привлечения законтурных точек,  $\delta$ -функции и без специального сгущения расчетной сетки позволяют учитывать конечные разрывы: искомой функции, ее первой производной и правой части исходного дифференциального уравнения.

Уравнения МПА, обладая теми же свойствами, наряду с указанными выше разрывами учитывают разрывы первых производных правых частей дифференциальных уравнений и имеют меньшую погрешность при решении задач на одних и тех же сетках и прочих равных условиях. Структура же разностных уравнений МПА несколько сложнее по сравнению с обобщенными уравнениями МКР.

Идея метода последовательных аппроксимаций (без употребления этого термина) изложена в работах А.Ф. Смирнова [176, 177] и А.В. Александрова [5], предложивших последовательное применение матриц интегрирования и дифференцирования, построенных с применением полиномов Лагранжа, к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Обобщение этой методики на решение дифференциальных уравнений в частных производных выполнено В.А. Смирновым [180].

Б.Я. Лашениковым [121] показано, что решение дифференциальных уравнений с применением матриц интегрирования и дифференцирования дает одни и те же результаты, т.е. эти два подхода являются двумя формами одного общего метода; им же установлено, что обе формы метода, дающие результаты высокой точности на редких сетках, не сохраняют своей точности с увеличением числа разбиений. Сходящиеся решения были получены М.Б. Вахитовым [28], предложившим строить матрицы интегрирования с использованием так называемых скользящих парабол третьего порядка, сохраняя идею последовательного их применения; им же показана возможность учета конечных разрывов при решении одномерных задач. Однако первой работой, в которой получена учитывающая разрывы первого рода матричная формула численного интегрирования, является статья Б.Я. Лашеникова [122], в которой дается также пример расчета балки на сосредоточенную силу с использованием предложенной автором методики. Используемая в этой работе для построения матрицы интегрирования функция представляет собой обобщение понятия «параболический сплайн».

Теория сплайнов изложена в работах Д. Алберга, Э. Нильсона, Д. Уолша [4], С.Б. Стечкина, Ю.Н. Субботина [191] и других отечественных и зарубежных исследователей. Применение сплайнов к задачам строительной механики нашло отражение в работах следующего (не претендующего на



полноту) списка авторов: П.М. Варвака, А.Д. Добыша, В.В. Рогалевича, В.Д. Шайкевича, В.В. Шрамко, а также Х.Г. Антеса, Нгуен Ван Нго и ряда других зарубежных специалистов. В нашей работе используются функции, обобщающие понятие «сплайн».

Отличающиеся от изложенных выше направления, позволяющие учитывать разрывной характер решений также без специального сгущения расчетной сетки, рассмотрим отдельно. В работе М.И. Длугача [98] при построении уравнений МКР, аппроксимирующих бигармоническое уравнение изгибаемых плит, предлагается четные производные искомой функции выражать через конечные разрывы более низкого порядка нечетных производных. Этот подход позволяет в определенной мере обобщать уравнения МКР, но не учитывает разрывы самой искомой функции и правой части исходного дифференциального уравнения. В работах Ш.Е. Микеладзе [134, 135] для учета разрывов в одномерных задачах предлагается исходное дифференциальное уравнение предварительно преобразовать в интегральное, которое с помощью квадратурных формул сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Этот прием приводит к сложному алгоритму. В работе [168] изложены способы учета конечных разрывов искомой функции и ее первой производной при аппроксимации уравнения теплопроводности конечно-разностными уравнениями. Но в этой работе не учитываются разрывы правой части дифференциального уравнения, а учет упомянутых выше разрывов производится лишь в одном из координатных направлений.

В работе [169] численные решения с учетом разрывов строятся с помощью обобщенных функций; это перспективное направление вследствие своей сложности на данном этапе ограничивается решением относительно простых задач.

В нашей работе предлагается общий достаточно простой подход учета разрывов, приводящий к имеющим высокую точность сходящимся результатам. Этот прием применяется к численному построению разрывных и непрерывных решений практически всех типов задач строительной механики.

# Глава 1. Решение одномерных задач. Расчет плоских стержневых систем

## § 1.1. Аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка обобщенным уравнением метода конечных разностей

Задачи строительной механики в ряде случаев сводятся к интегрированию дифференциального уравнения или систем дифференциальных уравнений вида:

$$\omega'' = -p, \quad (1.1.1)$$

где  $\omega$  – искомая функция;  $p$  – функция аргумента  $\xi$ , она может быть заданной, а в некоторых задачах и неизвестной.

Мы пока не будем придерживаться общепринятых в задачах строительной механики обозначений, имея в виду, что уравнения типа (1.1.1) встречаются и в других областях техники.

Если предположить, что функции  $\omega$ ,  $p$  непрерывны, интегрирование (1.1.1) по методу конечных разностей (МКР) при заданных краевых условиях задачи не представляет труда.

Подойдем к решению (1.1.1) с более общих позиций, полагая, что  $\omega$ ,  $p$  дифференцируемые функции и вместе со своими первыми двумя производными в некоторых точках оси  $\xi$  претерпевают конечный разрыв. Именно такого типа задачи встречаются чаще в строительной механике.

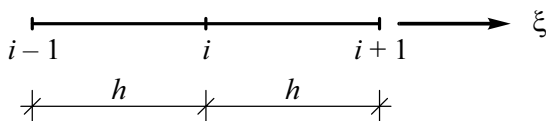


Рис. 1.1.1

Численное решение сформулированной выше задачи будем строить на равномерной сетке (рис. 1.1.1), т.е. на сетке, нанесенной на ось  $\xi$  с одним и тем же шагом  $h$ . Это оправданно с методической точки зрения, чтобы (хотя и простые) алгебраические преобразования, связанные с использованием неравномерной сетки, не заслоняли основную идею подхода. Кроме того, равномерная сетка при решении конкретных задач встречается чаще. Известно общее требование численных методов: расчетная сетка должна быть равномерной или по возможности ближе к ней. Случай неравномерной сетки будет рассмотрен отдельно.

Далее будем считать, что функция  $\omega$  в пределах участка сетки  $i - i+1$  описывается квадратной параболой:

$$\omega = a\xi^2 + b\xi + c. \quad (1.1.2)$$

Тем самым функцию  $\omega$ , удовлетворяющую исходному дифференциальному уравнению (1.1.1), мы приближенно заменяем выражением (1.1.2). Приближенная замена одного математического объекта другим – это и есть аппроксимация. Вопросы оценки точности аппроксимации, устойчивости и сходимости решений рассмотрены отдельно в приложении, с тем чтобы здесь заниматься только конструированием метода и его применением к определенным классам задач. Как указано в [138], при самом строгом доказательстве сходимости решения в общем виде с учетом  $h \rightarrow 0$  реализация на ЭВМ всякого метода нуждается в численном исследовании сходимости, поскольку на практике  $h$  никогда не равняется нулю. Численное исследование сходимости обычно сводится к решению задачи на последовательности по меньшей мере трех вложенных одна в другую сеток. В дальнейшем будем придерживаться в основном этого подхода.

Возвращаясь к конструированию метода решения, запишем производные (1.1.2):

$$(1.1.3) \quad \omega' = 2a\xi + b;$$

$$\omega'' = 2a. \quad (1.1.4)$$

Неопределенные коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  выразим через значения функции  $\omega$  в точках  $i$ ,  $i+1$  и через первую производную  $\omega'_i$ . Вводя дополнительное неизвестное  $\omega'$  в отличие от традиционных подходов, на первый взгляд мы усложняем дело. Однако именно это обстоятельство позволит, как показано ниже, самым простым путем, не прибегая к обобщенным функциям [169], учесть разрыв первой производной в решении. Здесь специально подробно останавливаемся на этих вопросах, с тем чтобы была понятна идея подхода и чтобы в дальнейших выводах эти пояснения можно было опустить.

Поскольку в расчетных точках предполагаются разрывы (первого рода), введем обозначения:

$$\omega_{i+0} = {}^{\Pi}\omega_i; \quad \omega'_{i+0} = {}^{\Pi}\omega'_i; \quad \omega_{i-0} = {}^{\Lambda}\omega_i; \quad \omega'_{i-0} = {}^{\Lambda}\omega'_i;$$

$$p_{i+0} = {}^{\Pi}p_i; \quad p'_{i+0} = {}^{\Pi}p'_i; \quad p_{i-0} = {}^{\Lambda}p_i; \quad p'_{i-0} = {}^{\Lambda}p'_i$$

где  $\Lambda$  – значение параметра решения левее точки  $i$ ,  $\Pi$  – правее.

Пусть на рис.1.1.1 начало координат в точке  $i$ . Тогда из (1.1.2) и условия  $\omega = {}^{\Pi}\omega_i$  при  $\xi = 0$  получим  $c = {}^{\Pi}\omega_i$ . Из (1.1.3) и условия  $\omega' = {}^{\Pi}\omega'_i$  при  $\xi = 0$  следует  $b = {}^{\Pi}\omega'_i$ . Из (1.1.2) и условия  $\omega = {}^{\Lambda}\omega_{i+1}$  при  $\xi = h$  с учетом найденных выше значений  $b$  и  $c$  определим:

$$a = -\frac{1}{h} {}^{\Pi}\omega'_i - \frac{1}{h^2} {}^{\Pi}\omega_i + \frac{1}{h^2} {}^{\Lambda}\omega_{i+1}. \quad (1.1.5)$$

С учетом (1.1.4), (1.1.5) запишем (1.1.1) в точке  ${}^{\Pi}i$ :

$$-\frac{2}{h} {}^{\Pi}\omega'_i - \frac{2}{h^2} {}^{\Pi}\omega_i + \frac{2}{h^2} {}^{\Lambda}\omega_{i+1} = -{}^{\Pi}p_i. \quad (1.1.6)$$

Повторяя проделанное выше на участке  $i-1 - i$ , найдем:

$$\frac{2}{h^2} {}^{\Pi} \omega_{i-1} - \frac{2}{h^2} {}^{\wedge} \omega_i + \frac{2}{h} {}^{\wedge} \omega'_i = -{}^{\wedge} p_i. \quad (1.1.7)$$

Видно, что (1.1.7) можно записать по аналогии с (1.1.6), меняя индексы и знак у  $\omega'$ . В дальнейших выводах мы этим правилом будем пользоваться, чтобы не повторять рутинные выкладки.

Суммируя (1.1.7) и (1.1.6), что соответствует сопряжению участков  $i-1 - i, i - i+1$ , и умножая результат на  $h^2/2$ , получим:

$${}^{\Pi} \omega_{i-1} - {}^{\wedge} \omega_i + h({}^{\wedge} \omega'_i - {}^{\Pi} \omega'_i) - {}^{\Pi} \omega_i + {}^{\wedge} \omega_{i+1} = -\frac{h^2}{2} ({}^{\wedge} p_i + {}^{\Pi} p_i). \quad (1.1.8)$$

$$\text{Введем обозначение: } {}^{\wedge} \omega'_i - {}^{\Pi} \omega'_i = \Delta \omega'_i. \quad (1.1.9)$$

$$\text{Запишем (1.1.9) в виде } {}^{\Pi} \omega'_i = {}^{\wedge} \omega'_i - \Delta \omega'_i. \quad (1.1.9,а)$$

$$\text{Аналогично (1.1.9,а) можно записать: } {}^{\Pi} \omega_i = {}^{\wedge} \omega_i - \Delta \omega_i; \quad {}^{\Pi} p_i = {}^{\wedge} p_i - \Delta p_i. \quad (1.1.10)$$

При учете (1.1.9) и (1.1.10) уравнение (1.1.8) принимает вид:

$${}^{\Pi} \omega_{i-1} - 2{}^{\wedge} \omega_i + {}^{\wedge} \omega_{i+1} + \Delta \omega_i + h \Delta \omega'_i = -h^2 \cdot {}^{\wedge} p_i + \frac{h^2}{2} \Delta p_i. \quad (1.1.11)$$

Уравнение (1.1.11) назовем обобщенным уравнением МКР, поскольку оно учитывает разрывы  $\Delta \omega, \Delta \omega', \Delta p$ , а при их отсутствии из (1.1.11) как частный случай следует известное уравнение МКР на равномерной сетке:

$$\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1} = -h^2 p_i. \quad (1.1.12)$$

## § 1.2. Применение обобщенного уравнения МКР к расчету балок на поперечный изгиб

Запишем дифференциальное уравнение изгиба балки переменного сечения:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = q, \quad (1.2.1)$$

где  $W$  – прогиб,  $EJ = EJ(x)$  – жесткость на изгиб;  $q = q(x)$  – поперечная нагрузка, распределенная по произвольному закону.

Из курса сопротивления материалов известно

$$EJ \frac{d^2 W}{dx^2} = -M, \quad (1.2.2)$$

где  $M$  – изгибающий момент.

При учете (1.2.2) из (1.2.1) следует:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q. \quad (1.2.3)$$

Таким образом, вместо дифференциального уравнения (1.2.1) четвертого порядка имеем систему двух дифференциальных уравнений (1.2.2) и (1.2.3) второго порядка.

Введем безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x}{l}; p = \frac{q}{q_0}; m = \frac{M}{q_0 l^2}; w = \frac{EJ_0 W}{q_0 l^4}, \quad (1.2.4)$$

где  $l$  – характерный размер балки (пролет),  $q_0$ ,  $EJ_0$  – соответственно интенсивность внешней нагрузки и величина жесткости в какой-либо фиксированной точке.

Переход к безразмерным величинам можно произвести и каким-либо другим способом. Решая задачу в безразмерных величинах, получим численные результаты в общем виде для данного класса задач. Например, определив  $m$  (точно или приближенно), тем самым по (1.2.4) находим  $M = m q_0 l^2$  при любых заданных значениях  $q_0$  и  $l$ .

Если в (1.2.3) подставить следующие из (1.2.4) выражения:  $M = m q_0 l^2$ ;  $x = l \xi$ ;  $q = p q_0$ , то получим дифференциальное уравнение относительно безразмерного неизвестного  $m$ :

$$\frac{q_0 l^2 d^2 m}{l^2 d \xi^2} = p q_0 \quad \text{или} \quad m'' = -p. \quad (1.2.5)$$

Аналогично из (1.2.2) следует

$$w'' = -g m. \quad (1.2.6)$$

В этих уравнениях:

$$m'' = \frac{d^2 m}{d \xi^2}; \quad w'' = \frac{d^2 w}{d \xi^2}; \quad g = \frac{EJ_0}{EJ}. \quad (1.2.4, a)$$

Поскольку (1.2.5) отличается от (1.1.1) только обозначением искомой функции, для аппроксимации (1.2.5) обобщенным уравнением МКР достаточно переписать (1.1.11) с заменой  $\omega$  на  $m$ :

$${}^{\Pi} m_{i-1} - 2 {}^{\Lambda} m_i + {}^{\Lambda} m_{i+1} + \Delta m_i + h \Delta m'_i = -h^2 \cdot {}^{\Lambda} p_i + \frac{h^2}{2} \Delta p_i. \quad (1.2.7)$$

Для отработки техники применения метода рассмотрим вначале простейшие задачи, в частности балки постоянной жесткости  $EJ_0$ . Тогда  $g = 1$ ; уравнение (1.2.6) принимает вид:

$$w'' = -m. \quad (1.2.6, a)$$

Для аппроксимации этого уравнения достаточно переписать (1.2.7) с заменой  $m$ ,  $p$  соответственно на  $w$ ,  $m$ :

$${}^{\Pi} w_{i-1} - 2 {}^{\Lambda} w_i + {}^{\Lambda} w_{i+1} + \Delta w_i + h \Delta w'_i = -h^2 \cdot {}^{\Lambda} m_i + \frac{h^2}{2} \Delta m_i. \quad (1.2.8)$$

**Пример 1** (рис. 1.2.1): найти изгибающий момент и прогиб в середине пролета балки. Пусть безразмерный пролет 1, безразмерная статическая нагрузка  $p = 1$ . Во всех главах, кроме последней, нагрузку будем полагать

статической. Нанесем на балку сетку при минимальном числе разбиений с шагом  $h = 1/2$ . Расчетные точки обозначены 0, 1, 2. Поскольку на краях шарниры,  $m_0 = m_2 = 0$ . Запишем (1.2.7) для точки 1 с учетом краевых условий.

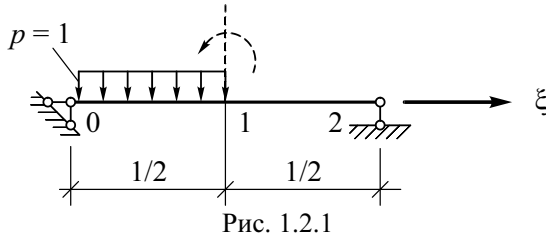


Рис. 1.2.1

Сосредоточенные моменты и сосредоточенные силы отсутствуют, значит,  $\Delta m_1 = \Delta m_1' = 0$ ;  $\Delta p_1 = 1$ ; тогда из (1.2.7) следует:

$$-2 \cdot m_1 = -\frac{1}{2^2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 1 ;$$

отсюда  $m_1 = 1/16$ . Если бы была загружена только правая половина балки, получили бы столько же. Следовательно, при загрузении всей балки равномерно распределенной нагрузкой  $m_1 = 1/8$ ; тогда будем иметь известное значение для размерного изгибающего момента  $M_1 = q_0 l^2 / 8$ .

Поскольку при аппроксимации исходного дифференциального уравнения была использована квадратная парабола, а аналитическое решение задачи при действии равномерно распределенных нагрузок также описывается полиномом второго порядка, здесь мы получили точное решение. Применение же (1.2.8) дает приближенное значение искомого прогиба, так как точное решение задачи приводит к параболе четвертого порядка.

Запишем (1.2.8) для точки 1 с учетом найденного значения  $m_1 = 1/16$  и

$$w_0 = w_2 = \Delta w_1 = \Delta w_1' = \Delta m_1 = 0: \quad -2 \cdot w_1 = -\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{16}; \quad w_1 = \frac{1}{128}.$$

При загрузении всего пролета балки:  $w_1 = 2/128 = 6/384$ , что на 20% превышает точное значение безразмерного прогиба, равного  $5/384$ . Нанося на ось балки более мелкую сетку и решая уже систему уравнений типа (1.2.8), записанных для всех расчетных точек, можно получить уточненное значение прогиба в середине пролета. При решении задачи на трех (и более) сетках, включая уже рассмотренную выше, можно убедиться, что  $w_1 \rightarrow 5/384$ . Разумеется, такого типа задачи лучше поручать ЭВМ, составив предварительно программу на каком-либо из употребляемых в настоящее время алгоритмических языков.

Продолжим иллюстрацию применения полученных обобщенных уравнений МКР к задачам с разрывными параметрами. На рассмотренном выше примере это удалось показать при разрыве распределенной нагрузки. В самом деле, если записать традиционное уравнение МКР (1.1.12) для точки 1 (рис. 1.2.1) применительно к дифференциальному уравнению (1.2.5):

$$m_0 - 2 \cdot m_1 + m_2 = -\frac{1}{2^2} \cdot p_1, \quad (1.2.9)$$

возникает вопрос, какое значение  $p_1$  подставить в (1.2.9)? При  $p_1 = 1$  ( $m_0 = m_2 = 0$ ) получим  $m_1 = 1/8$ ; при  $p_1 = 0$  значение  $m_1 = 0$ . Из положения можно выйти в этом простом случае, приняв (правда, ничем не обоснованное) среднее значение  $p_1 = 1/2$ . В нижеследующем примере такие ухищрения не помогут.

**Пример 2.** В рассмотренном выше примере (рис. 1.2.1) положим  $p = 0$  и будем считать, что в точке 1 приложена вертикально безразмерная сосредоточенная сила  $\Delta m_1 \varrho = 1$ . Имеем право так обозначить сосредоточенную силу, поскольку она, как это следует из условия равновесия элементарного участка балки, представляет собой скачок безразмерных поперечных сил  $m'$ . Записываем (1.2.7) для точки 1 с учетом  $m_0 = m_2 = \Delta m_1 = -\Delta p_1 = p_1 = 0$ :

$$-2m_1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0; \quad \text{отсюда } m_1 = 1/4.$$

Тогда по (1.2.4) получим точное значение размерного  $M_1 = \frac{1}{4} q_0 l = \frac{Pl}{4}$ .

Поскольку  $q_0$  произвольно, здесь произведение  $q_0 l$  принято равным величине произвольной сосредоточенной силы  $P$ . Для определения прогиба  $w_1$  пишем

$$(1.2.8) \text{ для точки 1 с учетом найденного значения } m_1: -2 \cdot w_1 = -\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{4};$$

$w_1 = 1/32$  отличается от точного значения  $1/48$  на 50% в большую сторону.

Заметим, что в [26] при рассмотрении подобного примера иллюстрируется лишь вычисление прогибов при известных  $m$ . Попытки найти численно изгибающие моменты в [26] не делается, поскольку разностных уравнений, учитывающих сосредоточенные воздействия, просто не было. В [169] эта задача решается путем введения  $\delta$ -функции Дирака, что сильно отдаляет методику расчета от применения на практике.

Здесь можно бы рассмотреть и другие примеры, учитывающие разрывы; в частности, также просто решается задача при действии сосредоточенного изгибающего момента.

Однако большая погрешность при определении прогибов оставляет удручающее впечатление, хотя и легко преодолевается измельчением сетки.

Можно предложить другой вариант разностного уравнения, так же просто учитывающего разрывы, но обладающего повышенной точностью.

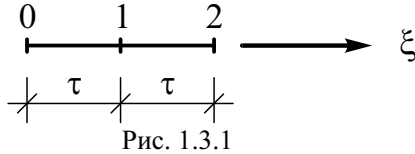
### § 1.3. Разностное уравнение повышенной точности, аппроксимирующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

Вернемся к дифференциальному уравнению (1.1.1) и аппроксимируем искомую функцию  $\omega$  на участке  $i - i+1$  рис. 1.1.1 кубической параболой,

полагая, что  $\omega = \omega(\xi)$  и  $p = p(\xi)$  в пределах этого участка непрерывны, а на границах участка испытывают вместе со своими производными указанные в § 1.1 разрывы:

$$\omega = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d. \quad (1.3.1)$$

Разобьем рассматриваемый участок на две равные части длиной  $\tau = h/2$  и рассмотрим его отдельно (рис. 1.3.1), обозначив временно узловые точки 0, 1, 2.



Выражая коэффициенты  $a, b, c, d$  подобно тому, как это делалось в § 1.1, через  ${}^{\Pi}\omega_0', {}^{\Pi}\omega_0, \omega_1, {}^{\Lambda}\omega_2$  и дифференцируя (1.3.1), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1' &= -\frac{1}{2}{}^{\Pi}\omega_0' + \frac{1}{\tau}\left(-\frac{5}{4}{}^{\Pi}\omega_0 + \omega_1 + \frac{1}{4}{}^{\Lambda}\omega_2\right); \\ {}^{\Lambda}\omega_2' &= {}^{\Pi}\omega_0' + \frac{1}{\tau}(2{}^{\Pi}\omega_0 - 4\omega_1 + 2{}^{\Lambda}\omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

Добавляя к (1.3.2) тождество  ${}^{\Pi}\omega_0' = {}^{\Pi}\omega_0'$ , эти выражения можно записать в матричной форме:

$$\{\omega'\} = \{d\}{}^{\Pi}\omega_0' + \frac{1}{\tau}[D] \cdot \{\omega\}, \quad (1.3.3)$$

где  $\{\omega'\} = [{}^{\Pi}\omega_0' \ \omega_1' \ {}^{\Lambda}\omega_2']^T$ ;  $\{\omega\} = [{}^{\Pi}\omega_0 \ \omega_1 \ {}^{\Lambda}\omega_2]^T$ ;

$$\{d\} = \left[1 \quad -\frac{1}{2} \quad 1\right]^T; \quad (1.3.4)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.3.5)$$

Здесь  $T$  означает транспонирование.

Матрица  $[D]$  совпадает с частным случаем матрицы дифференцирования работы [5].

Для определения  $\omega''$  можно (1.3.1) дважды продифференцировать с учетом уже найденных значений  $a, b, c, d$ . Но можно поступить иначе – записать (1.3.3) с заменой  $\omega', \omega$  соответственно на  $\omega'', \omega'$ , то есть:



$$\{\omega''\} = \{d\}^{\Pi} \omega_0'' + \frac{1}{\tau} [D] \cdot \{\omega'\}, \quad (1.3.6)$$

где  $\{\omega''\} = [\omega_0'' \ \omega_1'' \ \omega_2'']^T$ .

Это равносильно тому, что по значениям  $\omega''$  и  $\omega'$  в точках 0, 1, 2 построена новая кубическая парабола. Такой прием был использован в [5], а еще раньше предложен в [176] при построении интегрирующих матриц и соответствующих формул численного интегрирования. Нами в [46, 76] такой переход от производных низшего порядка к высшим был назван последовательной аппроксимацией, ибо в основе его лежит последовательная замена искомой функции или ее той или иной производной одной и той же аппроксимирующей функцией, в данном случае – кубической параболой. Действительно, заменяя в (1.3.6)  $\omega''$  на  $\omega'''$ , а  $\omega'$  на  $\omega''$ , получим формулу для вычисления третьих производных и т.д. Высших производных, скажем, при расчете балок на упругом основании, может быть теоретически бесчисленное множество. Благодаря последовательной аппроксимации по крайней мере те из них, которые представляют интерес, могут быть вычислены достаточно просто. Необходима лишь последовательность: сначала первые, затем по ним – вторые производные и т.д.

Коснувшись истории вопроса, отметим, что в [122] при обобщении матричных формул интегрирования работы [176] были учтены и разрывы в одномерных задачах. Но разностные уравнения не были получены, а предложенная в [122] методика оказалась весьма неудобной при решении практических задач даже по сравнению с таким трудоемким (но широко распространенным и общим) методом, как МКЭ.

Возвращаясь к (1.3.6), в правую часть этого выражения вместо  $\{\omega'\}$  подставим (1.3.3), получим:

$$\{\omega''\} = \{d\}^{\Pi} \omega_0'' + \frac{1}{\tau} [D] \cdot \{d\}^{\Pi} \omega_0' + \frac{1}{\tau^2} [D^2] \cdot \{\omega\}. \quad (1.3.7)$$

Учитывая (1.3.4) и (1.3.5), найдем:

$$[D] \cdot \{d\} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 6 \end{bmatrix}^T; \quad (1.3.8)$$

$$[D^2] = [D] \cdot [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 9 & -12 & 3 \end{bmatrix}. \quad (1.3.9)$$

С учетом (1.3.8), (1.3.9) из (1.3.7) получим следующие алгебраические уравнения:

$$\omega_1'' = -\frac{1}{2} \omega_0'' - \frac{3}{2\tau} \omega_0' - \frac{3}{4\tau^2} \omega_0 + \frac{3}{4\tau^2} \omega_2; \quad (1.3.10)$$

$$\omega_2'' = \omega_0'' + \frac{6}{\tau} \omega_0' + \frac{9}{\tau^2} \omega_0 - \frac{12}{\tau^2} \omega_1 + \frac{3}{\tau^2} \omega_2. \quad (1.3.11)$$

Учебное пособие

Радек Фатыхович Габбасов

Айдар Радекович Габбасов

Владимир Владимирович Филатов

**ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ  
РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ  
ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

Редактор: *Р.В. Воробьева*

Дизайн обложки: *Н.С. Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98.

Подписано к печати 30.06.08. Формат 60x90/16.

Бумага офс. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Усл. 17,5 п.л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)  
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации - оф. 511  
тел., факс: (495)183-56-83, e-mail: [iasv@mgsu.ru](mailto:iasv@mgsu.ru), <http://www.iasv.ru/>