

Михасев Г.И.
Товстик П.Е.

**Локализованные
колебания и
волны в
тонких оболочках**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 539.3
ББК 22.25
М 69



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 09-01-07017*

Михасев Г.И., Товстик П.Е. **Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 292 с. — ISBN 978-5-9221-1183-6.

Рассматриваются три класса задач о локализованных формах движения тонких оболочек: стационарные и квазистационарные задачи о собственных и параметрических колебаниях, а также нестационарные задачи о бегущих волновых пакетах. С использованием асимптотических методов строятся формы колебаний, локализованные в окрестности некоторых фиксированных либо подвижных линий или точек на поверхности оболочки. Исследуется зависимость форм колебаний, собственных частот, области параметрической неустойчивости, а также динамических характеристик бегущих волновых пакетов от геометрии оболочки, физических характеристик материала, способа закрепления краев, а также характера стационарного и нестационарного нагружения оболочки.

Для специалистов в области теории оболочек, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов.

Рецензенты:

Л. Ю. Коссович, доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Саратовского государственного университета;

С. Б. Филиппов, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета

ISBN 978-5-9221-1183-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2009

© Г. И. Михасев, П. Е. Товстик, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
Глава 1. Уравнения двумерной теории оболочек	13
§ 1.1. Геометрические соотношения	13
§ 1.2. Уравнения движения	16
§ 1.3. Соотношения упругости. Граничные условия	17
§ 1.4. Уравнения движения, безмоментные уравнения.	20
§ 1.5. Качественный анализ спектра частот свободных колебаний.	23
§ 1.6. Уравнения движения предварительно напряженных оболочек и/или оболочек, контактирующих с упругим основанием (заполнителем)	25
§ 1.7. Двумерная модель оболочки типа Тимошенко	28
§ 1.8. О погрешности двумерных динамических уравнений теории оболочек	29
Глава 2. Локализованные формы колебаний оболочек вращения	32
§ 2.1. О формах локализованных колебаний оболочек	32
§ 2.2. Локализованные формы колебаний пластины со свободным прямолинейным краем	35
2.2.1. Изгибные колебания (36). 2.2.2. Плоскостные колебания (37).	
§ 2.3. Локализованные формы колебаний круглой пластины	38
§ 2.4. Интегралы системы уравнений колебаний оболочки вращения.	42
§ 2.5. Неоднородные формы колебаний оболочек вращения	47
§ 2.6. Локализованные вблизи края осциллирующие формы колебаний	53
§ 2.7. Алгоритм построения локализованных решений	57
§ 2.8. Формы колебаний оболочки вращения, локализованные вблизи параллели, расположенной внутри оболочки	60
§ 2.9. Формы колебаний предварительно напряженной неоднородной цилиндрической оболочки средней длины, локализованные вблизи параллели	64
2.9.1. Осесимметричные колебания (65). 2.9.2. Неосесимметричные колебания (67).	

§ 2.10. Локализованные формы осесимметричных колебаний длинной предварительно напряженной неоднородной цилиндрической оболочки, лежащей на упругом основании	69
Глава 3. Локализованные формы колебаний цилиндрических и конических оболочек	75
§ 3.1. Уравнения локализованных колебаний оболочек и граничные условия	75
§ 3.2. Низкочастотные колебания круговых цилиндрических оболочек	78
§ 3.3. Локализованные формы колебаний цилиндрических оболочек . . .	80
§ 3.4. Локализация формы колебаний цилиндрической панели в окрестности свободного или слабозакрепленного прямолинейного края	89
§ 3.5. Локализованные формы колебаний оболочек, близких к цилиндрическим	94
§ 3.6. Локализованные формы колебаний конических оболочек	100
Глава 4. Локальные параметрические колебания тонких оболочек	107
§ 4.1. Локальные параметрические колебания цилиндрических оболочек под действием периодических осевых сил	108
4.1.1. Перестройка асимптотического решения (114). 4.1.2. Влияние диссипативных сил (119). 4.1.3. Области неустойчивости (119). 4.1.4. Примеры (121).	
§ 4.2. Полубезмоментные формы локальной параметрической неустойчивости оболочек нулевой кривизны	125
4.2.1. Параметрические колебания конической оболочки (126). 4.2.2. Параметрические колебания цилиндрической оболочки под действием пульсирующего давления (133). 4.2.3. Примеры (136).	
§ 4.3. Локализованные формы параметрических колебаний оболочек, близких к цилиндрическим	138
§ 4.4. Формы параметрических колебаний цилиндрической оболочки, локализованные вблизи параллели, расположенной внутри оболочки	143
Глава 5. Волновые пакеты в цилиндрических оболочках	148
§ 5.1. Исходные идеи метода	149
§ 5.2. Волновые пакеты в некруговой цилиндрической оболочке, бегущие в окружном направлении	151
5.2.1. Постановка задачи (151). 5.2.2. Расщепление начального ВП и переход к локальной системе координат (153). 5.2.3. Сведение начально-краевой задачи к последовательности краевых задач (156). 5.2.4. Интегрирование уравнений (22) (158). 5.2.5. Ин-	

тегрирование амплитудного уравнения (163). 5.2.6. Определение постоянных интегрирования (165).	
§ 5.3. Анализ решений, построенных в виде бегущих волновых пакетов	166
5.3.1. Стационарный волновой пакет (собственные формы колебаний) (168). 5.3.2. Свойства решений системы Гамильтона (169).	
§ 5.4. Влияние геометрии оболочки на распространение волновых пакетов	176
§ 5.5. Построение решений в виде бегущих волновых пакетов, основанное на методе Маслова	188
5.5.1. Каноническая система уравнений и вспомогательные начальные условия (190). 5.5.2. Класс асимптотически эквивалентных функций (191). 5.5.3. Приближенное решение канонической системы (метод Маслова) (192). 5.5.4. Асимптотически главное приближение (196). 5.5.5. Сравнение решений, построенных разными методами (198).	
Глава 6. Влияние внешних сил на волновые пакеты, бегущие в окружном направлении в оболочках нулевой кривизны	199
§ 6.1. Классификация показателей изменчивости и динамичности внешних сил и НДС оболочки	199
§ 6.2. О влиянии внешних сил на нестационарные локализованные колебания цилиндрической оболочки средней длины	201
6.2.1. Стационарный ВП (204). 6.2.2. Влияние стационарных неоднородных усилий T_2 на динамику ВП (206). 6.2.3. Влияние неоднородных сил реакции упругого основания на динамику ВП (208). 6.2.4. Влияние нестационарных сил T_2 на динамику ВП (209).	
§ 6.3. Локализованные семейства изгибных волн в конических оболочках средней длины	212
6.3.1. Собственные формы поперечных колебаний балки с переменными характеристиками (215). 6.3.2. Алгоритм построения решения в виде бегущих ВП и расчетные соотношения (216).	
§ 6.4. Волновые пакеты в цилиндрической оболочке, сжимаемой в осевом направлении	218
6.4.1. Алгоритм построения решений в виде бегущих ВП (219). 6.4.2. Вывод разрешающих уравнений (222). 6.4.3. Анализ решения (223). 6.4.4. Примеры (225).	
Глава 7. Волновые пакеты в длинных оболочках вращения, бегущие в осевом направлении	228
§ 7.1. Уравнения движения оболочек вращения в перемещениях. Постановка задачи	228
§ 7.2. Классификация интегралов уравнений движения	231

7.2.1. Осесимметричные волны (231). 7.2.2. Неосесимметричные волны с малой изменяемостью по параллели (233). 7.2.3. Неосесимметричные волны с большой изменяемостью по параллели (234).	
§ 7.3. Построение решений в виде суперпозиции пакетов осесимметричных изгибных и тангенциальных волн	235
7.3.1. Осесимметричные пакеты изгибных волн (235). 7.3.2. Осесимметричные пакеты продольных волн (240). 7.3.3. Осесимметричные пакеты крутильных волн (241). 7.3.4. Суперпозиция ВП осесимметричных волн (242). 7.3.5. Свойства решения. Примеры (244).	
§ 7.4. Неосесимметричные ВП в оболочках вращения с малым числом волн по параллели	248
§ 7.5. Неосесимметричные ВП в оболочках вращения с большим числом волн по параллели	249
7.5.1. Неосесимметричные пакеты тангенциальных волн (249). 7.5.2. Неосесимметричные пакеты изгибных волн (251). 7.5.3. Суперпозиция решений (252). 7.5.4. Влияние геометрии оболочки на динамику ВП тангенциальных волн (255).	
§ 7.6. Волновые пакеты в длинной цилиндрической оболочке с переменными параметрами	256
7.6.1. Осесимметричные пакеты изгибных волн (257). 7.6.2. Осесимметричные пакеты продольных волн (262). 7.6.3. Осесимметричные пакеты крутильных волн (264). 7.6.4. Неосесимметричные ВП с большим числом волн по параллели (265).	
Глава 8. Двумерные волновые пакеты в оболочках произвольного очертания	269
§ 8.1. Постановка задачи о бегущих двумерных ВП	269
§ 8.2. Алгоритм построения бегущих двумерных ВП	271
8.2.1. Построение нулевого и первого приближений (272). 8.2.2. Построение второго и высшего приближений (273). 8.2.3. Решение задачи (1.1), (1.2) (275).	
§ 8.3. Влияние геометрии оболочки на динамические характеристики двумерных ВП	276
Список литературы	281

ВВЕДЕНИЕ

Исследование колебаний тонких оболочек — это обширная проблема, включающая в себя свободные колебания, вынужденные колебания, колебания оболочек, находящихся в контакте с жидкостью или газом, случайные колебания, параметрические колебания, распространение упругих волн, распространение волновых пакетов и другие. Книга посвящена одному из аспектов проблемы — локализованным колебаниям и распространяющимся локализованным волнам, называемым здесь волновыми пакетами (ВП). В основу анализа положены методы асимптотического интегрирования, базирующиеся на геометрическом малом параметре, равном относительной толщине оболочки. Целью авторов является качественный анализ и получение приближенных аналитических решений. Для иллюстрации привлекаются численные решения, в том числе решения, полученные методом конечных элементов.

Наиболее полно методы асимптотического интегрирования статических двумерных уравнений теории тонких оболочек были развиты А. Л. Гольденвейзером [27, 29]. В книгах [12, 31] методы асимптотического интегрирования были распространены на исследование спектра частот свободных колебаний оболочек. В одних случаях форма свободных колебаний занимает всю поверхность оболочки, а в других — локализуется в окрестности некоторых линий или точек. Описанию локализованных форм колебаний оболочек и посвящена эта книга. При этом используются построенные в работах [10, 14, 15, 62, 72, 94] асимптотические конструкции. В работе Н. А. Алумяэ [10] приводится асимптотическое решение уравнения свободных осесимметричных колебаний конической оболочки с точкой поворота. В монографии В. М. Бабича и В. С. Булдырева [14] построены локализованные собственные функции типа «шепчущей галереи» и «прыгающего мячика» для уравнения Гельмгольца. «Квазифронтные» решения волнового уравнения, осциллирующие в малой окрестности пространственно-временного луча и экспоненциально убывающие вне этой малой окрестности, построены В. М. Бабичем, В. С. Булдыревым и И. А. Молотковым [15]. В монографии В. П. Маслова [62] методом ВКБ построены используемые ниже локализованные решения для уравнений в частных производных с малым параметром. Комплексные ВКБ-разложения с явным видом функций эйконала предложены в работах [94] и [72] для построения

локализованных форм собственных колебаний оболочек нулевой кривизны в окрестности некоторой образующей, а также бегущих в окружном направлении пакетов изгибных волн.

Аналитическое построение частот и форм свободных колебаний оболочек представляет в общем случае неразрешимую задачу. Даже существенно более простая задача о поперечных колебаниях мембраны (которая сводится к задаче Дирихле для двумерного уравнения Гельмгольца) в общем случае не имеет аналитического решения. Аналитическое решение может быть построено лишь для областей, которые допускают разделение переменных (это, в частности, круг, эллипс, прямоугольник, некоторые треугольники). Ряд задач о свободных колебаниях оболочек также допускает разделение переменных. Укажем на оболочки вращения, у которых отделяется окружная координата, и на некруговые цилиндрические оболочки с шарнирно опертыми криволинейными краями, у которых отделяется продольная координата. После разделения переменных задача сводится к существенно более простой одномерной краевой задаче. Это задача содержит малый параметр при производных, и для ее решения можно использовать методы асимптотического интегрирования.

Локализованными здесь называем формы колебаний, которые сосредоточены в малых окрестностях некоторых фиксированных (называемых здесь наиболее слабыми) или подвижных линий или точек на срединной поверхности и экспоненциально затухающих при удалении от этих линий или точек. Один или оба размера области локализации формы малы по сравнению с размерами всей срединной поверхности, поэтому для построения локализованных форм колебаний используются методы асимптотического интегрирования.

Для выпуклой оболочки локализованная форма колебаний в окрестности линии, лежащей вдали от краев оболочки, аналогична форме типа «прыгающего мячика» для уравнения Гельмгольца (например, формы колебаний вытянутого эллипсоида вращения, локализованные вблизи диаметра). Форму свободных колебаний, локализованную в окрестности края оболочки, можно сравнить с формой типа «шепчущей галереи» для уравнения Гельмгольца. Однако в случае оболочки асимптотическая структура формы свободных колебаний существенно сложнее, чем для мембраны, и зависит от граничных условий на этом крае. Для некоторых (называемых слабыми) вариантов граничных условий имеет место снижение частоты колебаний. Для выпуклой оболочки (например, для оболочки в форме эллипсоида) возможна локализация формы колебаний в окрестности наиболее слабой точки.

Для оболочек нулевой гауссовой кривизны возможна локализация формы собственных колебаний в окрестности образующей. При построении используется прием асимптотического разделения переменных, в результате двумерная краевая задача сводится к последовательности одномерных краевых задач. Здесь также следует различать локализацию внутри оболочки (например, в задаче о колебаниях оболочки в форме эллиптического цилиндра) и в окрестности одного из ее прямолинейных краев. В первом случае имеем асимптотически кратные частоты собственных колебаний, когда четырем формам колебаний отвечают частоты, очень мало отличающиеся друг от друга. Свободные колебания оболочки в форме прямого кругового цилиндра охватывают всю срединную поверхность. Локализация возможна лишь при нарушении симметрии (цилиндр некруговой и/или края косо). Локализация в окрестности края имеет место лишь для некоторых (слабых) закреплений этого края. Обнаружено 6 вариантов слабого закрепления.

Для оболочек отрицательной гауссовой кривизны форма собственных колебаний имеет тенденцию распространяться вдоль характеристик. Отражаясь от краев оболочки, форма заполняет всю срединную поверхность, поэтому локализованных форм колебаний у таких оболочек не обнаружено. Оболочки отрицательной гауссовой кривизны далее не рассматриваются.

Во многих случаях локализованным формам колебаний соответствуют наименьшие частоты либо частоты из нижней части спектра. Задача о свободных колебаниях оболочки с математической точки зрения близка к задаче о бифуркации безмоментного напряженного состояния при потере устойчивости, ибо в обоих случаях решается линейная краевая задача на собственные значения. Поэтому в ряде случаев методы решения и получающиеся результаты в задаче о колебаниях оказываются аналогичными соответствующим методам и результатам для устойчивости [98, 135]. Основное различие заключается в том, что в задачах устойчивости (в отличие от задач свободных колебаний) интерес представляет лишь наименьшее собственное значение.

Задача о параметрических колебаниях тонкой оболочки в линейной постановке в ряде случаев может быть сведена к исследованию ее движения в окрестности динамического напряженно-деформированного состояния (НДС), характеризующегося наличием периодических по времени мембранных усилий [21]. При наличии на поверхности оболочки наиболее слабой линии или точки, обусловленной геометрией оболочки, возможна локализация параметрически возбуждаемых колебаний в окрестности этой линии или точки. Иногда локализация параметрических колебаний возникает вследствие неоднородности нагружения оболочки. Так, например, круговая цилиндрическая оболочка

под действием периодических неоднородных по окружной координате осевых сил допускает формы параметрических колебаний, локализованные в окрестности наиболее загруженной образующей. Теоретически параметрическая неустойчивость возникает в том случае, когда отношение частоты нагружения к частоте собственных колебаний оказывается равным или близким к одному из следующих значений [82, 140]: $2/1$, $2/2$, $2/3$, $2/4$, ... Однако практически наблюдаемы обычно лишь случаи, когда это отношение равно 2 или 1, реже — $2/3$. Здесь рассматриваются локализованные параметрические колебания, когда оболочка подвержена действию периодических внешних сил с частотой пульсации, близкой к удвоенной частоте собственных колебаний. Исследуется случай слабого параметрического резонанса, когда динамическая составляющая внешних сил мала по сравнению со статической. Для построения локализованных решений уравнений используется метод, развитый в работах [62, 94] в сочетании с методом многих масштабов по времени. При этом формы конструируемых локализованных параметрических колебаний с точностью до амплитуд (зависящих от «медленного» времени) совпадают с формами собственных колебаний.

Значительное место отводится построению нестационарных форм колебаний, сосредоточенных в окрестности некоторых подвижных линий или точек на поверхности оболочек и называемых здесь волновыми пакетами (ВП) с центрами на этих линиях или точках. Для их конструкции используются как метод В.П. Маслова [62], так и метод [67, 72], в основу которого положено введение движущегося центра ВП и представление функции эйконала в ВКБ-разложении в виде ряда по степеням локальной координаты, связанной с подвижным центром ВП.

Исследуются три вида локализованных нестационарных волновых процессов: (а) пакеты изгибно-плоскостных волн, бегущих в окружном направлении в оболочках нулевой кривизны, (б) пакеты волн с центрами на подвижных окружностях, бегущих в осевом направлении в длинных оболочках вращения и (в) двумерные ВП с центром на подвижной точке, распространяющиеся по поверхности оболочки произвольного очертания. При этом при построении ВП, бегущих в окружном направлении в цилиндрических и конических оболочках, двумерная краевая задача сводится к последовательности одномерных краевых задач на подвижной образующей, являющейся центром ВП. Как частный случай, конструируемое нестационарное решение вырождается в стационарное решение, совпадающий с собственной формой колебаний цилиндрической оболочки в окрестности слабой образующей [94]. При исследовании ВП, бегущих в осевом направлении в оболочках вращения,

производится расщепление исходных уравнений движения в перемещениях на уравнения, описывающие осесимметричные и неосесимметричные изгибные, продольные и крутильные волны с малой и большой изменчивостью в окружном направлении. Во многих случаях проводится анализ влияния геометрических параметров оболочки, физических характеристик упругого материала, а также динамических внешних сил на характер бегущих локализованных колебаний.

Объектом исследования будут тонкие оболочки как постоянной, так и переменной толщины, изготовленные из линейно упругого изотропного однородного (или неоднородного) материала. Срединная поверхность предполагается гладкой (или кусочно гладкой), оболочки с ребрами не рассматриваются. Главным образом, рассматриваются классические двумерные уравнения теории оболочек, получающиеся из трехмерных уравнений теории упругости в результате использования гипотез Кирхгофа–Лява. Кратко рассматриваются уравнения типа Тимошенко, учитывающие сдвиг и инерцию вращения поперечных волокон. Исследуются малые колебания, поэтому рассматриваются только линейные краевые задачи и начально-краевые задачи.

Используются различные варианты асимптотических разложений по дробным степеням малого параметра — относительной толщины оболочки. Ограничиваемся построением одного или двух первых приближений, что достаточно как для качественного анализа, так в ряде случаев и для хорошей численной оценки результата. При этом требуем, чтобы построенное решение с заданной точностью по отношению к малому параметру удовлетворяло исходной системе уравнений. Погрешность построенного приближенного решения по отношению к точному решению не обсуждается. Иными словами, строятся формальные асимптотические разложения.

В первой главе содержатся исходные соотношения и разрешающие уравнения теории тонких упругих изотропных оболочек. Приводится качественный анализ спектра частот собственных колебаний оболочек. Во второй и третьей главах рассматриваются стационарные задачи о свободных колебаниях оболочек, локализованных вблизи линий или точек. Квазистационарные задачи о параметрических колебаниях оболочек, возбуждаемых в окрестности «слабых» линий, рассмотрены в гл. 4. Главы 5–8 посвящены нестационарным задачам о бегущих по поверхности оболочки волновых пакетах. Главы 1–3 (кроме § 2.10) написаны П. Е. Товстиком, главы 4–8, а также § 2.10 — Г. И. Михасевым.

Принята трехзначная нумерация формул, при которой указываются номер главы, номер параграфа и номер формулы. При ссылках на формулу из того же параграфа указывается только номер формулы, а при

ссылках на формулу из другого параграфа той же главы указывается номер параграфа и номер формулы. Используется двухзначная нумерация рисунков и таблиц, при которой указывается номер главы и номер рисунка или таблицы.

Приведенная в конце книги библиография не претендует на полноту. Упоминаются лишь те работы, которые имеют непосредственное отношение к излагаемому материалу.

Большую помощь при написании книги оказали авторам их ученики, И. В. Авдошка и С. П. Кунцевич, результаты которых составили содержание отдельных параграфов. С. П. Кунцевич проделал существенную техническую работу при оформлении иллюстративного материала. К названным лицам авторы испытывают чувство большой благодарности.

Глава 1

УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Для тонкой оболочки в соответствии с гипотезами Кирхгофа–Лява трехмерные уравнения движения тела сводятся к двумерным уравнениям движения срединной поверхности. Уравнения, описывающие это движение, складываются из трех групп соотношений:

- из геометрических соотношений, устанавливающих связь тангенциальных и изгибных деформаций срединной поверхности с перемещениями точек на срединной поверхности,
- из уравнений равновесия элемента срединной поверхности,
- и, наконец, из соотношений упругости (или определяющих соотношений), связывающих усилия и моменты с деформациями срединной поверхности.

Первые две группы соотношений не зависят от принятой модели оболочки: как для модели Кирхгофа–Лява, так и для модели Тимошенко эти соотношения одни и те же.

В этой главе приводятся указанные соотношения и уравнения, с их выводом и подробным обсуждением можно ознакомиться по монографиям [27, 29, 37, 84, 105, 106, 120] и многим другим.

§ 1.1. Геометрические соотношения

На срединной поверхности оболочки введем ортогональную систему криволинейных координат α, β (иногда обозначаемых через α_1, α_2), совпадающих с линиями кривизны. Произвольная точка M поверхности определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$. Введем местную ортогональную систему координат с ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ (см. рис. 1.1), где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, & \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, & \mathbf{n} &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \\ A &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right|, & B &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right|. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Криволинейные координаты выбираем (если это возможно) таким образом, чтобы орт \mathbf{n} был внутренней нормалью к оболочке.

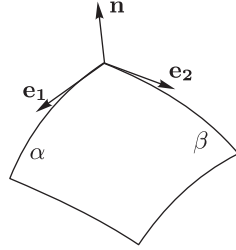


Рис. 1.1. Криволинейные координаты

Первая и вторая квадратичные формы поверхности таковы:

$$I = ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2, \quad II = \frac{A^2}{R_1} d\alpha^2 + \frac{B^2}{R_2} d\beta^2, \quad (1.1.2)$$

где ds — длина дуги на поверхности, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, для главных кривизн используем обозначения $k_1 = R_1^{-1}$, $k_2 = R_2^{-1}$.

Величины A , B , R_1 и R_2 являются в общем случае функциями α и β и удовлетворяют соотношениям Кодацци–Гаусса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta}, & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \right) &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) &= -\frac{AB}{R_1 R_2}. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

В частности, для оболочек вращения в качестве криволинейных координат удобно взять длину дуги образующей s и угол в окружном направлении φ . Тогда $A = 1$, а функции B , R_1 и R_2 зависят только от s , причем имеют место соотношения

$$\begin{aligned} B &= R_2 \sin \theta, & \frac{1}{R_1} &= \frac{d\theta}{ds}, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R_2} \right) &= \frac{1}{B} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{dB}{ds}, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

где θ — угол между осью вращения и нормалью (см. рис. 1.2).

Формулы дифференцирования ортов имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{e}_2 + \frac{A}{R_1} \mathbf{n}, & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha} &= \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{n}, & \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} &= -\frac{A}{R_1} \mathbf{e}_1, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \beta} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \mathbf{e}_1 + \frac{B}{R_2} \mathbf{n}, & \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \beta} &= \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \mathbf{n}, & \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} &= -\frac{B}{R_2} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Рассмотрим теперь малую деформацию поверхности. Пусть после деформации точка M заняла положение M^* , определяемое радиус-вектором \mathbf{r}^* . Положим

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{n}, \quad (1.1.6)$$

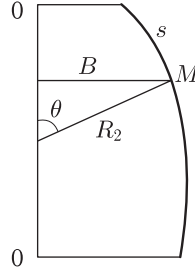


Рис. 1.2. Оболочка вращения

где \mathbf{u} — вектор перемещения, а u_1 , u_2 и w — его проекции на орты до деформации (иногда обозначаемые ниже через u , v , w или через u_1 , u_2 , u_3). В рассматриваемых ниже линейных задачах можно не делать различия при проектировании на орты до и после деформации.

С использованием деривационных формул (5) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha} &= (1 + \varepsilon_1) \mathbf{e}_1 + \omega_1 \mathbf{e}_2 - \gamma_1 \mathbf{n}, \\ \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \beta} &= (1 + \varepsilon_2) \mathbf{e}_2 + \omega_2 \mathbf{e}_1 - \gamma_2 \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u_2 - \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_1 - \frac{w}{R_2}, \\ \omega_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u_1, & \omega_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_2, \\ \gamma_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u_1}{R_1}, & \gamma_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{u_2}{R_2}. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Здесь ε_1 и ε_2 — деформации растяжения в направлениях координат α и β , ω_1 и ω_2 — углы поворота ортов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 в проекции на касательную плоскость, γ_1 и γ_2 — углы поворота нормали \mathbf{n} . Величины ε_1 , ε_2 и $\omega = \omega_1 + \omega_2$ суть тангенциальные деформации, причем

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{A} \right) \quad (1.1.9)$$

— угол сдвига в касательной плоскости.

Деформации изгиба κ_1 , κ_2 и кручения τ определяются формулами

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_2, & \kappa_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_1, \\ \tau &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_2 + \frac{\omega_1}{R_2} = -\frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_1 + \frac{\omega_2}{R_1}. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

В силу формул (8) оба выражения для кручения τ эквивалентны, поэтому формулу для кручения можно представить также в виде

$$2\tau = -\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\gamma_2}{B} \right) - \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\gamma_1}{A} \right) + \frac{\omega_1}{R_2} + \frac{\omega_2}{R_1}. \quad (1.1.11)$$

§ 1.2. Уравнения движения

Уравнения движения оболочки в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(B\mathbf{F}_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(A\mathbf{F}_2)}{\partial \beta} + AB\mathbf{q} &= 0, \\ \frac{\partial(B\mathbf{G}_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(A\mathbf{G}_2)}{\partial \beta} + AB(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{F}_2) + AB\mathbf{m} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Здесь \mathbf{F}_1 и \mathbf{G}_1 (\mathbf{F}_2 и \mathbf{G}_2) — отнесенные к единице длины усилия и моменты внутренних напряжений, действующие на линиях $\alpha = \text{const}$ ($\beta = \text{const}$) (см. рис. 1.3), \mathbf{q} и \mathbf{m} — плотности сил инерции и моментов

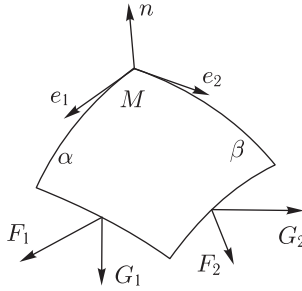


Рис. 1.3. Усилия и моменты

сил инерции, отнесенные к единице площади срединной поверхности. Разложения этих векторов по ортам имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= T_1 \mathbf{e}_1 + S_1 \mathbf{e}_2 + Q_1 \mathbf{n}, & \mathbf{G}_1 &= H_1 \mathbf{e}_1 - M_1 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}_2 &= T_2 \mathbf{e}_1 + S_2 \mathbf{e}_2 + Q_2 \mathbf{n}, & \mathbf{G}_2 &= M_2 \mathbf{e}_1 - H_2 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{q} &= -\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \mathbf{e}_1 - \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \mathbf{e}_2 - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \mathbf{n}, \\ \mathbf{m} &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2} \mathbf{e}_1 - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

где ρ и h — плотность материала и толщина оболочки.

Вид уравнений (1) не зависит от принятой двумерной модели оболочки, а именно от того, принята модель Кирхгофа–Лява или модель Тимошенко, учитывающая сдвиг (см. § 1.7). Различие этих моделей проявляется в обсуждаемых ниже соотношениях упругости (в опреде-

ляющих соотношениях). Отметим лишь, что для модели Кирхгофа–Лява целесообразно считать $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ во втором уравнении (1), ибо инерция вращения поперечных волокон имеет тот же асимптотический порядок малости (см. § 1.8), что и влияние сдвига, а учет влияния инерции вращения следует проводить лишь в модели Тимошенко, учитывающей сдвиг.

С помощью формул (1.5) находим проекции уравнений (1) на орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(BT_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2 + \frac{\partial(AS_2)}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}S_1 - AB\frac{Q_1}{R_1} - AB\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial(AT_2)}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}T_1 + \frac{\partial(BS_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}S_2 - AB\frac{Q_2}{R_2} - AB\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial(BQ_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AQ_2)}{\partial\beta} + AB\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right) - AB\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial(BH_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}H_2 + \frac{\partial(AM_2)}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_1 + ABQ_2 - AB\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial(AH_2)}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}H_1 + \frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2 + ABQ_1 - AB\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} &= 0, \\
AB(S_1 - S_2) + AB\left(\frac{H_1}{R_1} - \frac{H_2}{R_2}\right) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

При корректном выборе соотношений упругости шестое уравнение равновесия (3) должно тождественно выполняться.

§ 1.3. Соотношения упругости. Граничные условия

Пусть оболочка изготовлена из линейно упругого однородного изотропного материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Основываясь на гипотезах Кирхгофа–Лява о сохранении прямой нормали к срединной поверхности при деформации оболочки, В. В. Новожилов и Л. И. Балабух предложили простейший вариант соотношений упругости, связывающих усилия и моменты с деформациями срединной поверхности оболочки и удовлетворяющих шестому уравнению равновесия (2.3) (см. [84]):

$$\begin{aligned}
T_1 &= K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), & T_2 &= K(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \\
S_1 &= \frac{K(1-\nu)}{2}\left(\omega + \frac{h^2\tau}{6R_2}\right), & S_2 &= \frac{K(1-\nu)}{2}\left(\omega + \frac{h^2\tau}{6R_1}\right), \\
M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), & M_2 &= D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\
H_1 = H_2 = H &= D(1-\nu)\tau, & K &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Формулы для усилий сдвига S_1 и S_2 можно записать в виде

$$S_1 = S + \frac{H}{R_2}, \quad S_2 = S + \frac{H}{R_1}, \quad (1.3.2)$$

где вспомогательная функция S равна

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2}\omega = Gh\omega, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.3.3)$$

G — модуль сдвига. Вторые слагаемые в формулах (2) малы и при построении первых членов асимптотических разложений приближенно можно считать

$$S_1 \simeq S_2 \simeq S. \quad (1.3.4)$$

В то же время использование формул (4) делает краевую задачу теории оболочек несамосопряженной. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Запишем функцию Лагранжа L деформированной оболочки (с учетом гипотез Кирхгофа–Лява и без учета инерции вращения поперечных волокон) в виде

$$\begin{aligned} L &= T - \Pi, \\ T &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho h (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{w}^2) AB d\alpha d\beta, \\ \Pi &= \iint_{\Omega} (\Pi_\varepsilon + \Pi_\kappa) AB d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

где Ω — область изменения криволинейных координат, T и Π — кинетическая и потенциальная энергии, точкой обозначена производная по времени, а через Π_ε и Π_κ обозначены плотности потенциальных энергий растяжения и изгиба оболочки,

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon &= \frac{1}{2} K \left(\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\nu}{2}\omega^2 \right), \\ \Pi_\kappa &= \frac{1}{2} D (\kappa_1^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1-\nu)\tau^2). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Потенциальная энергия (5) в силу формул (1.8), (1.9) и (1.10) зависит от перемещений u_1 , u_2 , w и их производных. Варьирование функционала (5) по перемещениям приводит (после интегрирования по частям) к первым трем уравнениям (2.3), в которых перерезывающие усилия Q_1 и Q_2 подставлены из четвертого и пятого уравнений. При этом усилия и моменты выражаются через деформации срединной поверхности по формулам (1). Одновременно получаем естественные граничные условия.

Пусть $\alpha = \alpha_0$ — часть границы Γ области Ω . Соответствующие слагаемые, получающиеся при варьировании функционала (5), можно записать в виде

$$T_1 \delta u_1 + S_1^* \delta u_2 + Q_1^* \delta w + M_1 \delta \gamma_1 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \quad (1.3.7)$$

где

$$S_1^* = S_1 + \frac{H}{R_2} = S + \frac{2H}{R_2}, \quad Q_1^* = Q_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial H}{\partial \beta}. \quad (1.3.8)$$

Будем рассматривать лишь варианты граничных условий, при которых на краю обращаются в нуль обобщенные перемещения u_1, u_2, w, γ_1 (а следовательно, и их вариации) или соответствующие им обобщенные усилия T_1, S_1^*, Q_1^*, M_1 :

$$\begin{aligned} u_1 = 0 & \quad (1) \quad \text{или} \quad T_1 = 0 & \quad (0), \\ u_2 = 0 & \quad (1) \quad \text{или} \quad S_1^* = 0 & \quad (0), \\ w = 0 & \quad (1) \quad \text{или} \quad Q_1^* = 0 & \quad (0), \\ \gamma_1 = 0 & \quad (1) \quad \text{или} \quad M_1 = 0 & \quad (0). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

В результате получаем 16 вариантов граничных условий, которые для краткости будем иногда обозначать четырехзначными числами из единиц и нулей, расположенных в том же порядке, что и в формулах (9). Единицы ставим, если обращается в нуль обобщенное перемещение, а нуль — усилие. Например, жесткозакрепленный край $u_1 = u_2 = w = \gamma_1 = 0$ имеет обозначение 1111, шарнирно опертый край $T_1 = u_2 = w = M_1 = 0$ — обозначение 0110, свободный край $T_1 = u_2 = w = M_1 = 0$ — обозначение 0000. Другие варианты граничных условий не рассматриваем.

Приведем формулировку граничных условий на краю, не совпадающем с координатной линией (см. рис. 1.4). Пусть \mathbf{t} — единичный

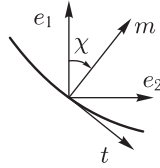


Рис. 1.4. Косой край

вектор, касательный к краю, а \mathbf{m} — единичная нормаль к краю, лежащая в касательной плоскости и направленная внутрь оболочки, χ — угол между векторами \mathbf{m} и \mathbf{e}_1 . В этом случае в качестве обобщенных

перемещений возьмем

$$\begin{aligned} u_m &= u_1 \cos \chi + u_2 \sin \chi, & u_t &= -u_1 \sin \chi + u_2 \cos \chi, \\ w, \quad \gamma_m &= \gamma_1 \cos \chi + \gamma_2 \sin \chi. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Соответствующие им обобщенные усилия T_m, S_t, Q_m, M_m равны (см. [19])

$$\begin{aligned} T_m &= T_1 \cos^2 \chi + (S_1 + S_2) \sin \chi \cos \chi + T_2 \sin^2 \chi - \\ &\quad - H_{mt} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin \chi \cos \chi, \\ S_t &= (T_2 - T_1) \sin \chi \cos \chi + S_1 \cos^2 \chi - S_2 \sin^2 \chi + \\ &\quad + H_{mt} \left(\frac{\sin^2 \chi}{R_1} + \frac{\cos^2 \chi}{R_2} \right), \\ Q_m &= \left(Q_1 - \frac{1}{B} \frac{\partial H_{mt}}{\partial \beta} \right) \cos \chi + \left(Q_2 - \frac{1}{A} \frac{\partial H_{mt}}{\partial \alpha} \right) \sin \chi, \\ M_m &= M_1 \cos^2 \chi + 2H \sin \chi \cos \chi + M_2 \sin^2 \chi, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

где

$$H_{mt} = H (\cos^2 \chi - \sin^2 \chi) + (M_2 - M_1) \sin \chi \cos \chi. \quad (1.3.12)$$

Как и для края $\alpha = \alpha_0$, рассматриваем варианты граничных условий, при которых обращаются в нуль обобщенные перемещения (10) или соответствующие им обобщенные усилия (11):

$$\begin{aligned} u_m &= 0 & (1) & \text{ или } T_m = 0 & (0), \\ u_t &= 0 & (1) & \text{ или } S_t^* = 0 & (0), \\ w &= 0 & (1) & \text{ или } Q_m^* = 0 & (0), \\ \gamma_m &= 0 & (1) & \text{ или } M_m = 0 & (0). \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

§ 1.4. Уравнения движения, безмоментные уравнения

Пренебрежем в четвертом и пятом уравнениях (2.3) силами инерции вращательного движения. Тогда систему (2.3) можно привести к трем дифференциальным уравнениям в перемещениях вида

$$\sum_{j=1}^3 (\mu^4 N_{ij} u_j + L_{ij} u_j) - \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.4.1)$$

Здесь N_{ij} и L_{ij} — линейные дифференциальные операторы по отношению к переменным α и β . Удобно систему (1) считать приведенной к безразмерному виду, при котором все линейные размеры

h , $Ad\alpha$, $Bd\beta$, R_1 , R_2 отнесены к характерному размеру R срединной поверхности, усилия T_k , S_k , Q_k отнесены к Eh , моменты M_k , H отнесены к EhR . Безразмерную толщину, которую считаем основным малым параметром, обозначаем через h_* , а для остальных величин после перехода к безразмерному виду сохраняем прежние обозначения. В системе (1) $\mu > 0$ — малый параметр, а $\omega_0 > 0$ — характерная частота колебаний, к которой ниже будем относить частоту свободных колебаний ω , причем

$$\mu^4 = \frac{h_*^2}{12(1-\nu^2)}, \quad h_* = \frac{h}{R}, \quad \omega_0^2 = \frac{E}{R^2 \rho}. \quad (1.4.2)$$

Имея ввиду исследовать спектр свободных колебаний, проводим в системе (1) разделение переменных:

$$\mathbf{U}(\alpha, \beta, t) = \mathbf{U}(\alpha, \beta)e^{i\omega t}, \quad \mathbf{U} = \{u_1, u_2, u_3\}. \quad (1.4.3)$$

Тогда приходим к краевой задаче, состоящей из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^3 (\mu^4 N_{ij} u_j + L_{ij} u_j) + \lambda u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{R^2 \rho \omega^2}{E} \quad (1.4.4)$$

и четырех граничных условий на каждом из краев оболочки.

Для граничных условий, описанных в § 1.3, указанная краевая задача является самосопряженной (см. [12, 31]). Она имеет вещественный неотрицательный дискретный спектр с точкой сгущения на бесконечности.

Частоты и формы свободных колебаний могут быть найдены также из вариационной задачи

$$\lambda = \min_{u_1, u_2, u_3} \frac{\Pi'_\varepsilon + \mu^4 \Pi'_\kappa}{T'}, \quad (1.4.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi'_\varepsilon &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{1}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \omega^2 \right) AB \, d\alpha \, d\beta, \\ \Pi'_\kappa &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\kappa_1^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1-\nu)\tau^2) AB \, d\alpha \, d\beta, \\ T' &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) AB \, d\alpha \, d\beta, \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

а перемещения u_1 , u_2 , u_3 удовлетворяют геометрическим граничным условиям, т. е. ограничениям, наложенным на обобщенные перемещения. Силовые граничные условия являются естественными для функционала (5).

Система уравнений (4) имеет восьмой порядок и является сингулярно возмущенной. При $\mu = 0$ эта система вырождается в безмоментную систему

$$\sum_{j=1}^3 L_{ij} u_j + \lambda u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.4.7)$$

имеющую четвертый порядок. При этом вместо четырех граничных условий на каждом краю оболочки должны быть заданы два (тангенциальных) граничных условия, которые накладывают ограничения на тангенциальные перемещения u_1, u_2 или усилия T_1, T_2, S .

Спектр безмоментной краевой задачи (7) существенно сложнее, чем спектр полной задачи (4) (см. [12, 31]). Он содержит участок непрерывного спектра $\lambda \in \Omega$, где Ω — множество значений функции

$$\Omega(\theta, \alpha, \beta) = (1 - \nu^2) \left(\frac{\sin^2 \theta}{R_1(\alpha, \beta)} + \frac{\cos^2 \theta}{R_2(\alpha, \beta)} \right) \quad (1.4.8)$$

при $0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \{\alpha, \beta\} \in G$.

Вне отрезка Ω спектр безмоментной задачи дискретен, причем концы отрезка Ω могут быть точками сгущения дискретного спектра. Как и для полной задачи, $\lambda = \infty$ является точкой сгущения спектра.

Явный вид дифференциальных операторов L_{ij} и N_{ij} приведен в [12]. Ниже записаны операторы $L'_{ij} = (1 - \nu^2)L_{ij}$ и N_{33} , используемые при дальнейшем изложении:

$$\begin{aligned} L'_{11} u_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial(Bu_1)}{\partial \alpha} \right) + \frac{1 - \nu}{2B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial(Au_1)}{\partial \beta} \right) + \frac{1 - \nu}{R_1 R_2} u_3, \\ L'_{12} u_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial(Au_2)}{\partial \beta} \right) - \frac{1 - \nu}{2B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial(Bu_2)}{\partial \alpha} \right), \\ L'_{13} u_3 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_3 \right) + \frac{1 - \nu}{AR_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha}, \\ L'_{31} u_1 &= \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial(Bu_1)}{\partial \alpha} - \frac{1 - \nu}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{Bu_1}{R_2} \right), \\ L'_{33} u_3 &= -\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) u_3, \\ N_{33} &= \Delta \Delta w + N_{33}^* w, \quad \Delta w = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Формулы для остальных операторов L'_{ij} получаются из приведенных в (9) циклической перестановкой $(1, 2; \alpha, \beta; A, B)$. Через Δ обозначен оператор Лапласа в криволинейных координатах. Оператор N_{33}^* имеет второй порядок, а операторы N_{ij} при $i + j < 6$ имеют порядок не выше третьего. Эти операторы в дальнейших выкладках не участвуют.

§ 1.5. Качественный анализ спектра частот свободных колебаний

При качественном анализе системы (4.4) опираемся на относительную тонкостенность оболочки, которая описывается малым параметром $h_* = h/R$. При этом считаем, что других малых или больших параметров, кроме параметра частоты λ , эта система не содержит. В частности, рассматриваем оболочки средней длины, т. е. предполагаем, что оболочка не является слишком длинной или слишком короткой. В работах [26, 31] приводится полная классификация интегралов системы уравнений малых свободных колебаний тонких оболочек и вытекающий из нее качественный анализ спектра частот и форм колебаний.

В основу анализа положены введенные в [27] понятия о показателе изменчивости p и показателях интенсивности функций, причем

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|, \left| \frac{\partial F}{\partial \beta} \right| \right\} \sim h_*^{-p} F. \quad (1.5.1)$$

Также вводится параметр $r < 1$, фиксирующий асимптотический порядок безразмерной частоты колебаний, по формулам

$$\lambda \sim h_*^{-2r}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} \sim h_*^{-r}. \quad (1.5.2)$$

Длина L волны деформации на срединной поверхности оболочки связана с параметром p соотношением $L \sim Rh_*^p$. Двумерные модели теории оболочек можно использовать лишь при условии $L \gg h$, которое эквивалентно ограничению $p < 1$. При $p = 1$ длина волны деформации становится соизмеримой с толщиной оболочки.

В ряде случаев оказывается удобным вводить различные показатели изменчивости p_1 и p_2 в направлениях α и β по формулам

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \sim h_*^{-p_1} F, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} \sim h_*^{-p_2} F, \quad p = \max\{p_1, p_2\}. \quad (1.5.3)$$

В этом случае p_1 и p_2 называем частными показателями изменчивости, а p — общим.

Показатели изменчивости позволяют сравнить порядки отдельных слагаемых в уравнениях §§ 1.2–1.4 и найти непротиворечивые значения параметров p , r исходя из требования, чтобы не менее двух слагаемых в каждом уравнении имели максимальный порядок. Возможные соотношения между параметрами p и r показаны линиями на рис. 1.5, которые соответствуют четырем основным классам интегралов системы (4.4) (см. табл. 1.1).

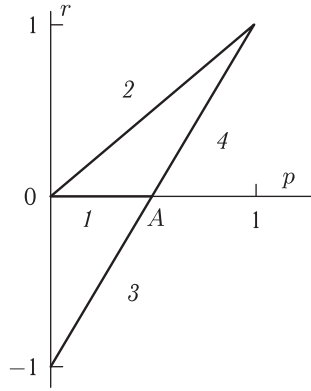


Рис. 1.5. Асимптотический портрет частот свободных колебаний

Таблица 1.1

Классификация интегралов

(1)	Квазипоперечные интегралы с малой изменчивостью	$0 \leq p < 1/2$,	$r = 0$,	$w_* \gg u_*$,
(2)	Квазитангенциальные интегралы	$0 \leq p < 1$,	$r = p$,	$w_* \ll u_*$,
(3)	Интегралы релейевского типа	$0 \leq p < 1/2$,	$r = -1 + 2p$,	$w_* \gg u_*$,
(4)	Квазипоперечные интегралы с большой изменчивостью	$1/2 \leq p < 1$,	$r = -1 + 2p$,	$w_* \gg u_*$.

В табл. 1.1 в виде сильных неравенств указаны соотношения между нормальными прогибами $u_3 = w$ и проекциями u_1, u_2 перемещений на тангенциальные направления, причем

$$w_* = \max\{|w|\}, \quad u_* = \max\{|u_1|, |u_2|\}. \quad (1.5.4)$$

Эти неравенства имеют место лишь при $p > 0$. При $p = 0$ для интегралов классов (1), (2) и (3) сильные неравенства в табл. 1.1 следует заменить на $w_* \sim u_*$, т. е. нормальный прогиб и тангенциальные перемещения имеют один асимптотический порядок.

Каждому из этих классов отвечает своя упрощенная система. Интегралы классов (1) и (2) удовлетворяют динамической безмоментной системе уравнений четвертого порядка.

Интегралы релейевского типа (3) удовлетворяют динамическим уравнениям чисто моментного напряженного состояния [29]. При этом (точно или приближенно) выполняются условия $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \omega = 0$ нерастяжимости срединной поверхности. Эти интегралы порождают сверхнизкие частоты колебаний.

Интегралы (4) класса (при $p > 1/2$) в главных членах удовлетворяют системе уравнений поперечных колебаний пластинки.

Отметим, что особого рассмотрения заслуживают случаи $p = 0$ и $p = 1/2$. При $p = r = 0$ раздельное построение интегралов (1) и (2) классов оказывается невозможным, а при $p = 1/2, r = 0$ не разделяются интегралы (1), (3) и (4) классов.

Для анализа последнего случая может быть использована система уравнений технической теории оболочек:

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta_R \Phi = 0, \quad \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi - \Delta_R w = 0, \quad (1.5.5)$$

где Δ — оператор Лапласа в криволинейных координатах (4.9), Δ_R — оператор второго порядка, зависящий от кривизны оболочки,

$$\Delta_R w = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{AR_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{BR_1} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right), \quad (1.5.6)$$

а неизвестная функция усилий Φ связана с тангенциальными усилиями соотношениями:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \\ T_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \\ S &= -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Система уравнений (5) с определенной (указанной ниже) погрешностью может быть использована для построения интегралов классов (1), (3) и (4) не только при $p = 1/2, r = 0$, но и в более широкой области.

Каждый из четырех классов интегралов, указанных в табл. 1.1, порождает соответствующий спектр частот свободных колебаний. При этом возможно появление «внутренних резонансов», когда оказываются равными (или близкими) частоты, порожденные интегралами различных классов. В этом случае построение форм колебаний усложняется.

§ 1.6. Уравнения движения предварительно напряженных оболочек и/или оболочек, контактирующих с упругим основанием (заполнителем)

В последующих главах рассматриваются свободные и параметрические колебания и волновые движения предварительно напряженной оболочки. Ограничимся случаем, когда начальные усилия являются безмоментными. При наличии начальных усилий в системы уравнений

(2.3), (4.1), (4.7) и (5.5) необходимо включить дополнительные слагаемые. При этом можно ограничиться добавлением слагаемого [98]

$$\Delta_T w = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{BT_1^\circ}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + S^\circ \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{AT_2^\circ}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + S^\circ \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right) \quad (1.6.1)$$

в третье уравнение движения. Отбрасывание дополнительных слагаемых, связанных с начальными усилиями, в первых двух уравнениях движения приводит к погрешности, имеющей порядок погрешности исходных уравнений.

В частности, часто используемая в дальнейшем система уравнений технической теории оболочек (5.5) при наличии начальных усилий принимает вид

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w - \Delta_T w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta_R \Phi &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi - \Delta_R w &= 0, \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

где оператор Δ_R имеет вид (5.6).

В формулах (1) $T_1^\circ, T_2^\circ, S^\circ$ — безмоментные (мембранные) начальные усилия, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BT_1^\circ)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2^\circ + \frac{\partial(A^2 S^\circ)}{A \partial \beta} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u_1^\circ}{\partial t^2} + q_1^\circ &= 0, \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(AT_2^\circ)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1^\circ + \frac{\partial(B^2 S^\circ)}{B \partial \alpha} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u_2^\circ}{\partial t^2} + q_1^\circ &= 0, \\ \frac{T_1^\circ}{R_1} + \frac{T_2^\circ}{R_2} - \rho h \frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial t^2} + q_n^\circ &= 0 \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

для оболочки, находящейся под действием заданной поверхностной нагрузки интенсивности $\mathbf{q}^\circ = q_1^\circ \mathbf{e}_2 + q_2^\circ \mathbf{e}_2 + q_n^\circ \mathbf{n}$ и краевой нагрузки. Здесь проекции полных перемещений u_i являются суммами проекций начальных перемещений u_i° , вызванных действием нагрузки \mathbf{q}° и краевой нагрузки, и дополнительных перемещений \hat{u}_i :

$$u_i = u_i^\circ + \hat{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.6.4)$$

Однако начальными перемещениями будем пренебрегать, считая, что метрика и кривизна исходной и деформированной оболочек совпадают. По образному выражению Алфутова [11], «оболочка напряжена, но не деформирована». Поэтому в дальнейшем считаем $\hat{u}_i = u_i$.

При статическом нагружении слагаемые в системе (3), содержащие производные по времени, должны быть опущены. Вопрос о существовании безмоментного напряженного состояния обсуждается в работах [29, 84]. Основными условиями его существования являются

отсутствие изгибаний срединной поверхности и малая изменяемость поверхностной и краевой нагрузки.

При наличии статических начальных усилий система уравнений малых колебаний типа (4.4) по-прежнему является самосопряженной и имеет вещественный дискретный спектр. Однако при достаточно больших начальных усилиях сжатия появляются отрицательные собственные значения, что говорит о неустойчивости положения равновесия. Ниже предполагается, что начальные усилия меньше критических значений, выше которых имеет место неустойчивость.

В динамическом случае составляющие нагрузки \mathbf{q}° являются функциями криволинейных координат α, β и времени t . Предполагается, что данная нагрузка, имеющая небольшую изменяемость по координатам и времени, вызывает в оболочке безмоментное НДС, характеризующееся мембранными усилиями $T_1^\circ, T_2^\circ, S^\circ(\alpha, \beta, t)$. Эти усилия могут быть найдены из системы уравнений (3), причем медленная изменяемость по времени означает, что характерный масштаб изменения нагрузки по времени (в случае периодической по времени нагрузки — это ее период) должен быть существенно больше наименьшего периода свободных колебаний системы (3). Фактически начальное нагружение считается квазистатическим.

В ряде последующих глав рассматриваются оболочки, лежащие на упругом изотропном однородном основании или содержащие упругий изотропный однородный наполнитель. Простейшей моделью для описания реакции основания является модель Винклера, согласно которой реакция основания q_n пропорциональна прогибу w :

$$q_n = -c_f w, \quad (1.6.5)$$

причем коэффициент c_f зависит только от упругих свойств основания. Нагрузку (5) следует добавить в третье уравнение равновесия. В частности, техническая система уравнений вместо (5.5) или (2) примет вид

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w + c_f w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta_R \Phi &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi - \Delta_R w &= 0. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Подробный анализ реакции упругого основания содержится в работах [45, 100, 101]. Этот анализ показал, что коэффициент c_f зависит от характера волнообразования на поверхности оболочки. Пусть прогиб оболочки является двояко-периодической функцией координат: $w = w_0 \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2$. Тогда в предположении, что между основанием и оболочкой имеется жесткий контакт, имеем

$$c_f = \frac{2E_f(1-\nu_f)k}{(1+\nu_f)(3-4\nu_f)}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad (1.6.7)$$

где E_f и ν_f — модуль Юнга и коэффициент Пуассона заполнителя. Формула (7) получена для бесконечной пластины, лежащей на упругом полупространстве, поэтому область ее применимости ограничена рядом условий: она применима вдали от краев оболочки, основание должно быть достаточно глубоким ($H > L/2$, $L = 2\pi/k$, где H — глубина основания, L — характерная длина волны [45]), кривизна оболочки не учитывается, поэтому должно быть выполнено условие $L \ll R$. Кроме того, следует иметь в виду, что при данном подходе не учитываются силы инерции, появляющиеся при движении основания.

§ 1.7. Двумерная модель оболочки типа Тимошенко

При использовании модели Кирхгофа–Лява по перемещениям u_1 , u_2 , w точек срединной поверхности однозначно определяются перемещения точек оболочки как трехмерного тела. Точки, лежавшие на нормали к срединной поверхности до деформации, после деформации остаются на нормали к деформированной срединной поверхности. Модель типа Тимошенко наделяет элемент оболочки двумя дополнительными степенями свободы. В соответствии с этой моделью нормальное до деформации волокно после деформации остается прямолинейным, но не перпендикулярным к срединной поверхности. При этом следует различать углы поворота нормали к срединной поверхности γ_1 , γ_2 , которые выражаются через перемещения по тем же формулам (1.8), и углы поворота нормального волокна ϕ_1 , ϕ_2 , которые являются дополнительными неизвестными функциями.

Уравнения равновесия элемента оболочки имеют тот же вид (2.3) с той лишь разницей, что в четвертом и пятом уравнениях в инерционных членах вместо углов γ_1 , γ_2 следует взять углы ϕ_1 , ϕ_2 . Различие проявляется также в определяющих соотношениях. Формулы для тангенциальных усилий и моментов имеют тот же вид (3.1), что и для оболочки Кирхгофа–Лява, однако здесь вместо изменения кривизны и кручения срединной поверхности κ_1 , κ_2 , τ , вычисляемых по формулам (1.10), (1.11), берем величины

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \phi_2, & \kappa_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \phi_1, \\ 2\tau &= -\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\phi_2}{B} \right) - \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\phi_1}{A} \right) + \frac{\omega_1}{R_2} + \frac{\omega_2}{R_1}. \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Перерезывающие усилия Q_1 и Q_2 в модели Тимошенко определяются по формулам (в модели Кирхгофа–Лява усилия Q_1 и Q_2 определяются из четвертого и пятого уравнений (2.3))

$$Q_1 = K_\delta \delta_1, \quad Q_2 = K_\delta \delta_2, \quad K_\delta = kGh, \quad k = \frac{5}{6}, \quad (1.7.2)$$

где

$$\delta_1 = \phi_1 - \gamma_1, \quad \delta_2 = \phi_2 - \gamma_2 \quad (1.7.3)$$

— углы сдвига, k — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряжений сдвига по толщине оболочки.

Получающаяся система уравнений имеет десятый порядок. На каждом из краев оболочки следует задать пять граничных условий. Вместо условий (3.9) на краю $\alpha = \alpha_0$ будем задавать условия

$$\begin{aligned} u_1 = 0 \quad \text{или} \quad T_1 = 0, \\ u_2 = 0 \quad \text{или} \quad S_1^* = 0, \\ w = 0 \quad \text{или} \quad Q_1 = 0, \\ \phi_1 = 0 \quad \text{или} \quad M_1 = 0, \\ \phi_2 = 0 \quad \text{или} \quad H = 0, \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

где S_1^* имеет тот же вид (3.8).

Кинетическая и потенциальная энергии, входящие в функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, имеют теперь вид

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\rho h (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2) + \frac{\rho h^3}{12} (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) \right) AB \, d\alpha \, d\beta, \\ \Pi = \iint_{\Omega} (\Pi_\varepsilon + \Pi_\kappa + \Pi_\delta) AB \, d\alpha \, d\beta, \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

где точкой обозначена производная по времени, Π_ε и Π_κ имеют прежние значения, а плотность потенциальной энергии сдвига равна

$$\Pi_\delta = \frac{1}{2} K_\delta (\delta_1^2 + \delta_2^2). \quad (1.7.6)$$

Уравнения движения (2.3) получаются при варьировании функционала Лагранжа, а силовые граничные условия (3) являются естественными для этого функционала.

§ 1.8. О погрешности двумерных динамических уравнений теории оболочек

В работе [85] установлено, что погрешность Δ гипотез Кирхгофа–Лява в задачах статики имеет порядок относительной толщины оболочки, т. е.

$$\Delta \sim h_*. \quad (1.8.1)$$

Последующие исследования [27, 116] подтвердили эту оценку для напряженных состояний оболочки с не слишком большой изменчивостью, для которых показатель изменчивости $p \leq 1/2$ (см. форму-