Цыкунов А.М.

Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 681.5
ББК 32.965.9
Ц 94

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 08-08-0710

Цыкунов А.М. **Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 268 с. — ISBN 978-5-9221-1094-5.

В монографии обобщены известные методы построения адаптивных систем управления для объектов с запаздыванием и разработаны новые принципы построения адаптивных и робастных систем для различных типов объектов по выходу, когда измерению недоступны производные выходных сигналов.

Приводятся результаты по применению методов расширенной ошибки и алгоритмов высокого порядка для различных типов объектов с запаздыванием. Предложен и обоснован принцип конструирования новых алгоритмов адаптации высокого порядка. Синтезированы адаптивные системы управления для объектов с запаздывающим управлением с использованием адаптивного прогнозатора и без него. Исследуется новый принцип построения адаптивных и робастных систем управления с использованием последовательного компенсатора для различных типов динамических объектов: с запаздыванием и без запаздывания, для линейных и нелинейных. Все предлагаемые подходы теоретически обоснованы, приводятся числовые примеры и результаты их моделирования. Часть результатов ранее не публиковалась.

Книга предназначена научным работникам, инженерам, преподавателям, аспирантам и студентам, специализирующимся в области автоматического управления и прикладной математики.

Научное издание

ЦЫКУНОВ Александр Михайлович

АДАПТИВНОЕ И РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ ПО ВЫХОДУ

Редактор *О.В. Максимова*
Оригинал-макет: *Е.Н. Водоватова*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 19.03.09. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,75. Уч.-изд. л. 17. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-07-92, 72-61-75, 72-60-63; факс: (8172) 76-00-49, 72-71-11
E-mail: forma@pfpoligrafist.com

ISBN 978-5-9221-1094-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список основных обозначений

$\mathfrak{R}$ — множество вещественных чисел

$x \in \mathfrak{R}^n$ — вещественный n-мерный вектор

$\mathfrak{R}^+$ — множество неотрицательных вещественных чисел

C_h — пространство непрерывных функций на отрезке $[-h; 0]$ с нормой $\|\psi(s)\|_h = \max\limits_{-h \leqslant s \leqslant 0} |\psi(s)|$

$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ — евклидова норма вектора $x \in \mathfrak{R}^n$

L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций с нормой $\left(\int\limits_0^\infty |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty$

$P = d/dt$ — оператор дифференцирования

$H = H^T > 0$ — симметрическая положительно определенная матрица

I_n — единичная матрица порядка $n \times n$

$\lambda_i(A)$ — собственные значения квадратной матрицы A

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_n \end{bmatrix}$ — матрица в форме Фробениуса

$\|A\| = \max\limits_i (\lambda_i(A^T A))^{1/2}$ — спектральная норма матрицы A

$V(x) > 0 \, (V(x) < 0)$ — положительно определенная (отрицательно определенная) функция векторного аргумента

$V(x) \geqslant 0 \, (V(x) \leqslant 0)$ — знакопостоянная положительная (отрицательная) функция векторного аргумента

$\square$ — символ конца доказательства

Введение

Проблема управления динамическими объектами в условиях неопределенности, несмотря на свой более чем полувековой возраст, продолжает волновать исследователей и специалистов в области разработки систем регулирования. Это объясняется тем, что вместе с развитием теории управления возникают и новые требования к разрабатываемым системам, которые ранее невозможно было выполнить. Кроме того, каждый конкретный объект управления имеет свои особенности, а так как автоматизации подвергаются все более сложные и новые технические и технологические процессы, то практика в изобилии поставляет новые задачи и требования. Это подтверждается этапами развития теории управления в условиях неопределенности.

Хорошо известно, что основными подходами для синтеза систем управления, когда объект имеет неопределенность, являются теория адаптивных и робастных систем.

В первых работах по самонастраивающимся системам [10, 44, 45, 94, 103, 130, 152], а также целом ряде последующих основополагающих работах [46, 47, 55, 62, 63, 95, 109, 138] предполагалось, что измерению доступен весь вектор состояния объекта управления или необходимое количество производных входных и выходных переменных. При этом в основном исследовались линейные математические модели объектов. Естественно, что для реализации таких систем управления необходимо было иметь соответствующие измерительные устройства, которые часто отсутствовали, а во многих объектах, особенно технологических, необходимые переменные просто недоступны измерению. Эта ситуация имеет место и в настоящее время, хотя развитие вычислительной техники позволяет реализовать сложнейшие законы управления, но датчики и исполнительные устройства и сейчас играют ключевую роль при разработке систем регулирования, особенно для новых процессов. Поэтому эта проблема беспокоила исследователей с самого начала развития теории адаптивных систем. В работе [152] с помощью прямого метода Ляпунова и леммы Якубовича–Калмана был выделен класс линейных систем, для которых можно синтезировать алгоритмы настройки параметров управляющего устройства без использования производных выходных сигналов. Основополагающей работой, после публикации которой началось развитие методов и принципов построения адаптивных систем управления по выходу, является [146]. В этой работе автор предложил метод расширенной ошибки, работоспособность которого была обоснована в [148, 149]. Детальный анализ этого подхода и его модификации изложены в обзорной статье [83].

Следующий принцип построения систем управления по выходу использует адаптивные алгоритмы высокого порядка, предложенные в [147] и развитые в работах [78, 84, 126, 151]. В этих системах используются наблюдатели, оценивающие производные различных сигналов: настраиваемых параметров, ошибки, выходного сигнала, вспомогательных управляющих воздействий, в результате чего получаются различные алгоритмы. Обширная библиография по этим системам имеется в работах [78, 84].

Эффективным подходом к синтезу адаптивных систем управления по выходу является использование компенсаторов параллельного [78], который называется шунтом, и последовательного [125] типов. Замкнутые системы, в которых используется этот принцип построения, имеют существенно меньший порядок по сравнению с теми, где используются выше изложенные методы.

Одним и универсальных способов синтеза, в смысле его применения к линейным и нелинейным объектам управления, является итеративные процедуры: метод адаптивного обхода интегратора и новый класс алгоритмов высокого порядка. Анализ этих способов и библиография имеется в работах [78, 84].

Один из существенных недостатков теории адаптивных систем — это предположение о квазистационарности параметров объекта управления и очень сложная реализация для нелинейных систем.

Кроме того, у разработчиков систем управления имеется естественное желание, чтобы регулятор был с фиксированными параметрами. Решить эту проблему позволяет теория робастных систем, которая стала активно развиваться после появления работы [117]. В настоящее время разработано достаточно большое количество методов и подходов решения задачи построения робастных систем управления, среди которых можно выделить следующие основные методы: H_∞ — теорию, μ — анализ, частотные методы. Подробно с теорией робастного управления можно ознакомиться в работе [96], где имеется обширная библиография и анализ различных методов.

Однако, несмотря на довольно большое количество методов построения адаптивных и робастных систем управления, имеются объекты, для которых известные методы не применялись, например, объекты с запаздыванием разного типа: с запаздыванием по состоянию, с запаздывающим управлением, некоторые типы нелинейных систем. Кроме того, задача получения простых робастных алгоритмов управления, применимых для разных объектов: линейных, нелинейных, стационарных и нестационарных, с запаздыванием и без запаздывания, остается актуальной как в теоретическом, так и в практическом отношении.

Решение этих задач и проводится в данной работе. В первой главе приводятся кратко основные понятия и теоремы, необходимые для изучения и применения при построении адаптивных и робастных систем управления.

Во второй главе обосновывается возможность применения метода расширенной ошибки для объектов с запаздыванием по состоянию и управлению. Приводятся различные принципы построения адаптивных систем управления для объектов с запаздывающим управлением:

с применением адаптивных прогнозаторов и без прогноза регулируемой переменной. Получены различные алгоритмы настройки параметров управляющего устройства.

В третьей главе рассматриваются принципы построения и исследуются различные алгоритмы настройки параметров управляющего устройства в адаптивных систем управления по выходу с использованием наблюдателей. К этому классу систем относятся и алгоритмы высокого порядка. Показано, как, используя, различные наблюдатели и алгоритмы настройки, можно получить новые алгоритмы адаптации высокого порядка. Предлагается и обосновывается работоспособность модифицированного алгоритма, который значительно проще в реализации и применим для различных типов объектов управления.

Обоснование применения последовательного компенсатора в различных задачах адаптивного управления и для различных объектов приводится в четвертой главе. Решаются задачи стабилизации и управления с эталонной моделью для линейных и нелинейных объектов, а также с запаздыванием по состоянию. Исследуются алгоритмы настройки, позволяющие компенсировать внешние возмущения.

В последней главе предлагается принцип построения робастной системы управления, которая компенсирует параметрические и внешние возмущения с заданной точностью. При этом замкнутая система управления имеет качественные показатели переходных процессов, как неявная или явная эталонная модель. Доказывается работоспособность робастных систем управления для разных классов объектов: стационарных и нестационарных, линейных и нелинейных, с запаздыванием по состоянию и без запаздывания. При этом класс неопределенности (разброс неизвестных параметров) может быть довольно большим.

Все полученные результаты сопровождаются большим количеством числовых примеров и результатами их моделирования.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данной главе излагаются основные определения и условия устойчивости и диссипативности динамических систем, а также основные методы анализа и синтеза систем управления. Наличие этих сведений облегчит чтение излагаемого материала, так как этот математический аппарат используется далее для решения задач анализа и синтеза систем управления динамическими объектами по выходу в условиях априорной неопределенности их параметров.

Отметим, что здесь и в дальнейшем будут рассматриваться системы, динамические процессы в которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями с запаздывающим аргументом. Кроме того, следует оговорить, что в этой главе излагаются только те методы анализа и синтеза систем управления, которые в дальнейшем используются при изложении основного материала.

1.1. Определения и утверждения о решениях обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in T \subset \mathfrak{R}^+, \tag{1.1}$$

где $y(t) \in Y \subset \mathfrak{R}^n$ — вектор состояния системы; $f(\cdot)$ — векторная функция, определенная на множестве $G = Y \times T \subset \mathfrak{R}^{n+1}$; y_0 — начальное состояние системы.

Определение 1.1 [12]. *Решением дифференциального уравнения* (1.1) называется векторная функция $y(t) = \varphi(t, t_0, y_0)$, определенная на некотором отрезке $[t_0; t_1]$, $t_0, t_1 \in T$, и удовлетворяющая условиям:

$\varphi(t, t_0, y_0)$ — дифференцируемая функция по переменной t;
$\varphi(t_0, t_0, y_0) = y_0$;
для всех $t \in [t_0; t_1]: \{\varphi(t, t_0, y_0), t\} \subset G$;
$\dot{\varphi}(t, t_0, y_0) = f(\varphi(t, t_0, y_0), t)$.

С геометрической точки зрения векторная функция $f(y(t), t)$ определяет векторное поле скоростей на множестве G для любого момента времени $t \in T$, а решения дифференциального уравнения $y(t) = \varphi(t, t_0, y_0)$ для различных начальных условий $\{t_0, y_0\} \in G$ называются интегральными кривыми, которые являются потоком векторного поля $f(y(t), t)$ на множестве G. При этом вектор $f(y(t), t)$ является касательным к интегральной кривой $y(t) = \varphi(t, t_0, y_0)$ в момент времени $t \in T$. В каждый момент времени точка $y(t) \in Y \subset \mathfrak{R}^n$ характеризует состояние системы, а траектория, которую описывает эта точка на множестве Y, называется фазовой траекторией при заданных начальных условиях. Совокупность фазовых траекторий при различных начальных условиях называется фазовым портретом системы, который является проекцией различных интегральных кривых, т. е. проекцией потока векторного поля $f(y(t), t)$, определенного на множестве G, на множество Y.

Важный класс непрерывных динамических систем составляют стационарные (автономные) системы, динамические процессы в которых описываются уравнением

$$\dot{y}(t) = f(y(t)),\ y(t_0) = y_0, \quad t \in T \subset \mathfrak{R}^+. \tag{1.2}$$

Основным фактом теории автономного уравнения (1.2), определяющим его специфические свойства, является следующий результат.

Теорема 1.1 [12]. *Если* $\varphi(t)$ *решение уравнения* (1.2), *то векторная функция* $\psi(t) = \varphi(t + a)$, $\psi(t) : (t_0 - a; t_1 - a) \to Y \subset \mathfrak{R}^n$, $a \in \mathfrak{R}$, *также является решением уравнения* (1.2).

Достаточные условия существования решения дифференциального уравнения (1.1) дает известная теорема Пеано.

Теорема 1.2. *Пусть* $Y \subset \mathfrak{R}^n$ и $T \in \mathfrak{R}^+$ — *открытые множества. Если векторная функция* $f(y(t), t)$ *непрерывна в области* $G = Y \times T$, *то для любых начальных условий* $\{y_0; t_0\} \in G$ *существует интервал* $(t_0; t_0 + \Delta t)$, $\Delta t > 0$, *и единственное решение* $y(t) = \varphi(t, t_0, y_0)$, $t \in (t_0; t_0 + \Delta t)$.

Интервал $(t_0; t_0 + \Delta t)$ называется интервалом Пеано.

Определение 1.2. Пусть $G = Y \times T \subset \mathfrak{R}^{n+1}$, $f(y(t), t)$ — непрерывное отображение области G в $\mathfrak{R}^n$.
Тогда: *функция* $f(y(t), t)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *в области* G *глобально*, если для любых пар $\{y_1(t), t\} \subset G$, $\{y_2(t), t\} \subset G$ выполнено условие;

$$|f(y_1(t), t) - f(y_2(t), t)| \leqslant L(t)\,|y_1(t) - y_2(t)|\,;$$

функция $f(y(t), t)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *в области* G *локально*, если для любой точки $(y_0; t_0) \in G$ найдется окрестность этой точки $\varepsilon(y_0)\,t_0)$ такая, что в этой окрестности функция $f(y(t),t)$ удовлетворяет условию Липшица глобально. Если при этом L не зависит от t, то говорят, что *функция $f(y(t),t)$ удовлетворяет условиям Липшица равномерно по t.*

Условия существования и единственности решения уравнения (1.1) даются следующим утверждением.

Теорема 1.3 [12]. *Пусть функция $f(y(t),t) : G \to \mathfrak{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по y в области G локально. Тогда:*

1. *Для любой точки $(y_0;\, t_0) \in G$ существует решение $y(t) = \varphi(t,\, t_0,\, y_0)$, определенное на отрезке Пеано*;
2. *Область G есть область единственности решения уравнения* (1.1).

Следующее утверждение [12] определяют условия, когда решений уравнения (1.1) можно продолжить вправо.

Теорема 1.4. *Для того чтобы решение $y(t) = \varphi(t,\, t_0,\, y_0)$, $t \in [t_0;\, t_1)$, было продолжимо вправо, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{t\to t_1-0} \varphi(y(t),t) = \eta$ и при этом $(\eta;\, t_1) \in G$.*

Простые достаточные условия существования решений уравнения (1.1) устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 1.5. *Пусть $Y = \mathfrak{R}^n$, $T = [t_0;\, \infty)$. Если в области G функция $f(y(t),t)$ непрерывна, локально липшицева по y и ограничена для всех $t \in T$, то для любых начальных условий $(y_0;\, t_0) \in G$ уравнение* (1.1) *имеет единственное решение на интервале $[t_0;\, \infty)$.*

Несколько другие условия приводятся в следующей теореме.

Теорема 1.6. *Пусть $Y = \mathfrak{R}^n$, $T = [t_0;\, \infty)$. Если в области G функция $f(y(t),t)$ непрерывна и удовлетворяет условиям Липшица по y глобально, равномерно по t, то для любых начальных условий $(y_0;\, t_0) \in G$ уравнение* (1.1) *имеет единственное решение на интервале $[t_0;\, \infty)$.*

Особое место в теории систем занимают линейные дифференциальные уравнения

$$\dot{y}(t) = A(t)\,y(t) + g(t), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1.3}$$

Здесь $y(t) \in \mathfrak{R}^n$, $t \in T = [t_0;\, t_1)$, $A(t)$ — матрица порядка $n \times n$, элементы которой являются непрерывными функциями времени, $A_{ij}(t) : T \to \mathfrak{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $g(t) : T \to \mathfrak{R}^n$ — непрерывная векторная функция.

Теорема 1.7. *Функция* $y(t) = \Phi(t)C$ *является общим решением однородного уравнения*

$$\dot{y}(t) = A(t)\,y(t) \tag{1.4}$$

для всех $t \in T$, *если матричная функция* $\Phi(t)$ *является решением матричного уравнения* $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, *а ее векторы-столбцы* $\Phi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ *являются линейно-независимыми и каждый из них является частным решением уравнения* (1.4). *При этом для любых начальных условий* $(y_0;\ t_0) \in T \times \mathfrak{R}^n$ *решение уравнения* (1.4) *имеет вид*

$$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\,y_0.$$

Матричная функция $\Phi(t)$ называется фундаментальной матрицей решений однородного уравнения (1.4), C — вектор произвольных постоянных коэффициентов. Если матрица $A(t) = A$ является постоянной числовой матрицей, то $\Phi(t) = \mathrm{e}^{At}$ и она называется матричной экспонентой. Тогда решение уравнения (1.4) принимает вид

$$y(t) = \mathrm{e}^{At}\,y_0.$$

Теорема 1.8 [102]. *Если* $\Phi(t)$ — *фундаментальная матрица решений однородного уравнения* (1.4) *для любых* $t \in T$, то функция

$$y(t) = \Phi(t)\,C + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,g(s)\,ds \tag{1.5}$$

является общим решением неоднородного уравнения (1.3), *а при любых начальных условиях* $(y_0;\ t_0) \in T \times \mathfrak{R}^n$ *функция*

$$y(t) = H(t, t_0)\,y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, s)\,g(s)\,ds \tag{1.6}$$

является решением уравнения (1.3), *где* $H(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ *является решением матричного уравнения*

$$\dot{H}(t,\, t_0) = A(t)\,H(t,\, t_0), \quad H(t_0,\, t_0) = I_n.$$

В частном случае, когда $A(t) = A$ — числовая матрица, решения (1.5) и (1.6) принимают вид

$$y(t) = \mathrm{e}^{At}\,C + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-s)}\,g(s)\,ds, \quad y(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\,y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-s)}\,g(s)\,ds.$$

1.2. Определения и утверждения о решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием

Достаточно большой класс непрерывных систем описывается дифференциальными разностными уравнениями

$$\dot y(t) = f_1(y(t),\, y(t-h),\, t), \tag{1.7}$$

$$\dot y(t) = f_2(y(t),\, y(t-h),\, \dot y(t-h),\, t), \quad y(s) = \psi(s), \quad s \in [-h;\, 0]. \tag{1.8}$$

Здесь $y(t) \in Y \subset \mathfrak{R}^n$, $t \in T = [t_0;\, t_1)$, $\psi(s) \in C_h$ — начальная непрерывная функция на отрезке $[-h;\, 0]$, C_h — пространство непрерывных функций с нормой $\|\psi(s)\|_h = \max\limits_{-h \leqslant s \leqslant 0} |\psi(s)|$, f_i — непрерывные векторные функции, $f_1 : G \to \mathfrak{R}^n$, $G = Q \times Y$, $Q = T \times C_h$.

Уравнение (1.7) называют уравнением с запаздывающим аргументом или просто с запаздыванием, а (1.8) уравнением с запаздыванием нейтрального типа.

Уравнения с запаздыванием исследовались в работах [1, 2, 11, 31, 48, 52, 57–60, 65, 66, 79].

Определение 1.3. Функции $y(t) = \varphi_1(\psi(s),\, t)$, $y(t) = \varphi_2(\psi(s),\, \dot\psi(s),\, t)$ являются *решениями уравнений* (1.7) *и* (1.8) соответственно, $\varphi_i : Q \to Y$, $i = 1,\, 2$, если выполнены условия:

1. Функции $\varphi_1(\psi(s),\, t)$, $\varphi_2(\psi(s),\, \dot\psi(s),\, t)$ дифференцируемы по t;
2. $\dot\varphi_1(\psi(s),\, t) = f_1(y(t_0),\, \psi(t_0 - h),\, t)$;
3. $\varphi_1(\psi(s),\, t_0) = \psi(s)$;
4. $\dot\varphi_2(\psi(s),\, \dot\psi(s)\, t) = f_2(y(t_0),\, \psi(t_0 - h),\, \dot\psi(t_0 - h)\, t)$;
5. $\varphi_2(\psi(s),\, \dot\psi(s)\, t_0) = \psi(s)$.

Также как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, вектор $y(t)$ называют вектором фазовых координат. Однако его значение в каждый момент времени зависит от предыстории, поэтому полным вектором состояния уравнений (1.7), (1.8) являются отрезки траекторий $y_t = y_t(s) = y(t + s)$, $s \in [-h;\, 0]$.

Векторные поля скоростей, которые определяют функции $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, также зависят от предыстории. Интегральные кривые $\varphi_1(\psi(s),\, t)$, $\varphi_2(\psi(s),\, \dot\psi(s),\, t)$ являются потоком векторных полей, порождаемых функциями $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ на множестве G, которое, в общем случае, является функциональным. Следует отметить еще одну особенность уравнений с запаздывающим аргументом [60]. Интегральные кривые уравнения (1.7) имеют разрыв первой производной в точке $t = t_0$, даже в том случае, когда функции $\psi(t)$, $f_1(t)$ дифференцируемы бесконечное число раз при любых t, а в точке $t = t_0 + h$ имеется разрыв второй производной, в точке $t = t_0 + 2h$ разрыв третьей производной и так далее. Происходит процесс сглаживания. В некоторых уравнениях разрыв первой производной наблюдается в нескольких точках $t = t_0 + kh$,

$k=0,\,1,\ldots$. Например, $\dot z(t)=z(t-h)$, $\psi(s)=0$, $s\in[-h;\,0)$, $\psi(0)=1$, где $z(t)$ — скалярная переменная. Очевидно, что в точках $t=t_0+kh$, $k=0,\,1,\ldots$, первая производная имеет разрывы. Процесс сглаживания характерен только для уравнения (1.7). Уравнения с запаздыванием нейтрального типа такого свойства не имеют. Поэтому условия 2, 4 определения 1.3 должны выполняться слева и справа от точек $t=t_0+kh$, $k=0,\,1,\ldots$. Непрерывно дифференцируемые решения уравнений (1.7), (1.8) существуют только для некоторых типов уравнений, когда начальные условия удовлетворяют условиям «склейки» [60]:

$$\dot\varphi_1(\psi(s),\,t_0)=f_1(y(t_0),\,\psi(t_0-h),\,t_0),$$
$$\dot\varphi_2(\psi(s),\,\dot\psi(s)\,t_0)=f_2(y(t_0),\,\psi(t_0-h),\,\dot\psi(t_0-h)\,t_0).$$

Здесь не рассмотрены уравнения с переменным и распределенным запаздыванием, с которыми можно ознакомиться в [102].

Условия существования и единственности решения уравнений (1.7), (1.8) даются теоремой [60].

Теорема 1.9. *Если векторные функции* $f_1(t,\,y(t),\,y(t-h))$, $f_2(t,\,y(t),\,y(t-h),\,\dot y(t-h))$ *непрерывны в области* G *и удовлетворяют условиям Липшица локально по всем аргументам, начиная со второго, при этом константа Липшица в условиях по* $\dot y(t-h)$ *меньше единицы, то для любых* $\psi(s)\in C_h$ *существует число* $\delta>0$ *такое, что решения уравнений* (1.7), (1.8) *существуют на отрезке* $[\,t_0;\,t_0+\delta)$ *и это решение единственное.*

Естественно, что для каждого из уравнений (1.7), (1.8) величина δ будет разная.

Рассмотрим частный случай уравнения (1.7):

$$\dot y(t)=A(t)\,y(t)+D(t)\,y(t-h),\quad y(s)=\psi(s),\quad s\in[-h;\,0\,],\qquad(1.9)$$

где $y(t)\in\mathfrak{R}^n$, $\psi(s)\in C_h$, $A(t)$, $D(t)$ — матричные функции соответствующего порядка, элементами которых являются непрерывные функции.

Теорема 1.10 [102]. *Векторная функция*

$$y(t)=H(t,\,t_0)\,\psi(t_0)+\int\limits_{t_0-h}^{t_0}H(t,\,s)\,D(s)\,\psi(s)\,ds\qquad(1.10)$$

является решением уравнения (1.9), *если матричная функция* $H(t,\,s)$ *с линейно независимыми столбцами является решением матричного уравнения*

$$\dot H(t,\,s)=A(t)\,H(t,\,s)+D(t)\,H(t-h,\,s),\qquad H(t,\,t)=I_n.$$

Из (1.10) следует, что множество векторов $y(t)$, которые определяются в соответствии с формулой (1.10), и всех возможных начальных функций $\psi(s)$, $s \in [t_0 - h; t_0]$, для всех значений $t \in T$ является пространством состояний линейного уравнения (1.9).

1.3. Устойчивость и диссипативность динамических систем

Устойчивость — это свойство системы приходить в некоторое устойчивое состояние или близкое к нему из различных начальных состояний. Под диссипативностью понимается свойство системы приходить в некоторую окрестность установившегося состояния из различных начальных состояний и оставаться в этой окрестности при наличии постоянно действующих возмущений.

Строгое определение устойчивости решений дифференциальных уравнений было дано Ляпуновым, которому в основном и следуют в теории систем. Вопросы устойчивости динамических систем отражены в работах [3, 7, 9, 25, 27, 30, 42, 60, 74, 76, 81].

1.3.1. Устойчивость и диссипативность обыкновенных динамических систем. Пусть для дифференциального уравнения (1.1), которым описываются динамические процессы в некоторой динамической системе, имеется частное решение $y_*(t, y_0) \in Y$. Это решение обычно называют невозмущенным движением системы. Оно может быть просто фиксированным значением, т. е. константой или решением некоторого уравнения

$$\dot{y}_*(t) = f_*(y_*(t), t).$$

Формируется вектор отклонений $x(t) = y(t) - y_*(t)$ и составляется уравнение возмущенного движения относительно траектории $y_*(t, y_0)$:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t), \quad F(0, t) = 0. \tag{1.11}$$

Задача исследования устойчивости решения уравнения (1.1) относительно решения $y_*(t, y_0)$ сводится к задаче исследования устойчивости тривиального решения $x(t) = 0$ уравнения возмущенного движения (1.11).

Определение 1.4. *Невозмущенное движение* $y_*(t, y_0) \in Y$, $t \geqslant t_0$ *системы* (1.1) или *тривиальное решение* $x(t) = 0$ *возмущенного движения* (1.11) называется *устойчивым по Ляпунову в области* Y, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для всех начальных условий возмущенного движения (1.11), удовлетворяющих условию $|x(t_0)| < \delta(\varepsilon, t_0)$ справедливо неравенство $|x(t)| < \varepsilon$.

Если величина δ не зависит от ε, то говорят, что *невозмущенное движение равномерно устойчиво по Ляпунову в области* Y. В случае, когда $Y = \mathfrak{R}^n$, *невозмущенное движение* называют *устойчивым в целом*.

Определение 1.5. *Невозмущенное движение* $y_*(t,\, y_0) \in Y$ *системы* (1.1) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого $t_0 \in [0;\, \infty)$ существует число $\mu(t_0) > 0$ такое, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих условию $|x(t_0)| < \mu(t_0)$, существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. При этом область $|x(t_0)| < \mu(t_0)$ является областью асимптотической устойчивости тривиального решения $x(t) = 0$ уравнения возмущенного движения, а область Y — областью асимптотической устойчивости невозмущенного движения. Если $Y = \mathfrak{R}^n$, то *невозмущенное движение* называют *асимптотически устойчивым в целом*.

В практических задачах теории систем удобнее пользоваться понятием устойчивости и асимптотической устойчивости тривиального решения возмущенного движения.

Определение 1.6. *Система* (1.17) называется *диссипативной*, если существуют области $\Omega \subset \mathfrak{R}^n,\ \Omega_x \subset \mathfrak{R}^n,\ \Omega_0 \subseteq \Omega,\ \Omega_x \subseteq \Omega$ такие, что для любых $t_0 > 0,\ x(t_0) \in \Omega_0$, где Ω_0 — область начальных значений, в которой выполнено условие $|x(t_0)| < \mu(t_0),\ \mu(t_0) > 0$, и для любых $t \geqslant t_0,\ x(t) \in \Omega$, где Ω — область диссипативности, в которой выполнено условие $|x(t)| < M,\ M > 0$, и существует момент времени t_1 такой, что при $t \geqslant t_1$ всегда выполнено условие $x(t) \in \Omega_x$, где Ω_x является предельным множеством или областью притяжения.

Особо следует отметить, что в нелинейных системах область Ω зависит от выбора области начальных значений Ω_0. Если $\Omega = \mathfrak{R}^n$, то систему называют диссипативной в целом.

1.3.2. Устойчивость и диссипативность систем с запаздыванием. Определения устойчивости и диссипативности для систем с запаздыванием мало чем отличаются от аналогичных определений для обыкновенных динамических систем. Они являются естественным перенесением приведенных определений на уравнения с запаздыванием, которые были предложены в работе [67]. Исследование устойчивости систем с запаздыванием отражены в работах [11, 24, 28, 29, 31, 42, 48, 50, 52, 53, 57–60, 99].

Предположим, что $y_*(t,\, \psi(s))$ является частным решением уравнения (1.7) или некоторого другого уравнения, относительно которого необходимо исследовать устойчивость решений уравнения (1.7). Составим уравнение возмущенного движения, определив вектор отклонений $x(t) = y(t) - y_*(t)$:

$$\dot{x}(t) = F(x(t),\, x(t-h),\, t), \quad x(s) = \psi_x(s), \quad s \in [-h;\, 0]. \tag{1.12}$$

Будем предполагать, что векторная функция $F(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.9 и $F(0,\, 0,\, t) = 0$, $x(t) \in X \subset \mathfrak{R}^n$.

Определение 1.7. *Возмущенное движение* $x(t,\, \psi_x(s))$ *системы* (1.12) называется *устойчивым по Ляпунову в области* $\Omega = C_h \times X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon,\, \psi_x(s)) > 0$ такое, что из условия $\|\psi_x(s)\|_h < \delta(\varepsilon,\, \psi(s))$, $s \in [-h; 0]$, следует $|x(t,\, \psi_x(s))| < \varepsilon$. Если $\Omega = C_h \times \mathfrak{R}^n$, то *возмущенное движение* $x(t,\, \psi_x(s))$ *устойчиво в целом*, а в случае, когда величина δ не зависит от ε, *возмущенное движение* $x(t,\, \psi_x(s))$ *устойчиво равномерно по* x. Если δ не зависит от $\psi_x(s)$, то *устойчиво равномерно по начальным данным*.

Определение 1.8. *Возмущенное движение* $x(t,\, \psi_x(s))$ *системы* (1.12) называется *асимптотически устойчивым в области* $\Omega = C_h \times X$ *при* $t \to \infty$, если оно устойчиво по Ляпунову и выполнено условие $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Если $\Omega = C_h \times \mathfrak{R}^n$, то *возмущенное движение* $x(t,\, \psi_x(s))$ *асимптотически устойчиво в целом*.

Важным понятием в теории систем является понятие экспоненциальной устойчивости.

Определение 1.9. *Возмущенное движение* $x(t,\, \psi_x(s))$ *системы* (1.12) называется *экспоненциально устойчивым в области* $\Omega = C_h \times X$ *с параметрами* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, если для любых начальных условий из области Ω справедливо неравенство

$$|x(t,\, \psi_x(s)| \leqslant \alpha \|\psi_x(s)\|_h \, \mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)} \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Для линейных систем (1.9) экспоненциальная устойчивость эквивалентна асимптотической устойчивости, равномерной по начальным условиям, а переходной процесс мажорируется некоторой затухающей экспонентой с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Определение 1.10. *Система* (1.12) называется *диссипативной*, если существуют области $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$, $\Omega_x \subset \mathfrak{R}^n$, $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $\Omega_x \subseteq \Omega$ такие, что для любых $t_0 \geqslant 0$ и для всех начальных данных $\psi_x(s) \in \Omega_0$ существует момент времени t_1 такой, что при $t \geqslant t_1$, $x(t,\, \psi_x(s)) \in \Omega_x$. При этом, для любых $t \geqslant t_0$ $x(t,\, \psi_x(s)) \in \Omega$, т.е. решение не выходит за пределы области Ω, в которой $|x(t,\, \psi_x(s))| < \mu(\psi_x(s))$, $\mu(\psi_x(s)) > 0$. Тогда область Ω *называется областью диссипативности, а* Ω_x *областью притяжения*.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию данного определения. Пусть заданы: область начальных условий $\Omega_0 = \{\psi_x(s) : \psi_x(s) \in C_h,\, s \in [-h; 0],\, \|\psi_x(s)\|_h < \delta\}$, область диссипативности $\Omega = \{x(t),\, \psi_x(s),\, t : \psi_x(s) \in C_h,\ \ s \in [-h; 0],\, \|\psi_x(s)\|_h < \delta,\, |x(t)| < \mu,\, t_0 \leqslant t < t_1\}$ и область притяжения $\Omega_x = \{x(t),\, t : |x(t)| <$

$< \varepsilon,\ t \geqslant t_1\}$. Это означает, что на отрезке $[t_0 - h;\ t_0]$ в трубке радиуса δ, построенной вдоль решения $y_*(t, \psi(s))$, находится начальная функция $\psi(s)$. На отрезке времени $[t_0;\ t_1)$ траектории системы (1.12) не выходят за пределы трубки радиуса μ, а начиная с момента времени t_1, траектории входят в трубку радиуса ε и больше из нее не выходят.

1.4. Условия устойчивости и диссипативности динамических систем

Одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости движения является прямой метод (второй метод) Ляпунова. Идея этого метода в применении к обыкновенным дифференциальным уравнениям заключается в том, что составляется уравнение возмущенного движения и подбирается функция Ляпунова так, чтобы она отражала обобщенное расстояние от траектории системы до начала координат. Если вдоль траектории возмущенного движения системы такая функция не будет возрастать, то невозмущенное движение системы, относительно которого было составлено уравнение возмущенного движения, устойчиво. Если функция Ляпунова убывает и стремится к нулю, то невозмущенное движение системы асимптотически устойчиво.

Для уравнений с запаздывающим аргументом прямой перенос второго метода Ляпунова нельзя рассматривать как общий метод исследования устойчивости [67]. Основным недостатком при этом является то, что теоремы Ляпунова для систем с запаздыванием не имеют обращения [60, 67]. Однако в ряде случаев использование функций Ляпунова для систем с запаздыванием оказывается достаточно эффективно [99].

В работах Н. Н. Красовского [64–67] было предложено вместо функций использовать обладающие аналогичными свойствами функционалы. Идея оказалась очень плодотворной, и этот подход стал одним из основных при анализе устойчивости и синтезе систем управления для систем с запаздывающим аргументом.

1.4.1. Второй метод Ляпунова для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Будем рассматривать функции $V(x(t))$ и $V(x(t), t)$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) они должны быть непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по x и t в некоторой области $X \subset \Re^n$, содержащей начало координат; 2) $V(0) = 0$, $V(0, t) = 0$.

Определение 1.11. *Функции $V(x(t))$ и $V(x(t), t)$* называются *положительно определенными*, если существует функция $W(x) > 0$ для любых $x \neq 0$, $W(0) = 0$ такая, что $V(x) > 0$, $V(x(t), t) \geqslant W(x)$, и называются *отрицательно определенными*, если $V(x) < 0$, $V(x(t), t) \leqslant -W(x)$.

Определение 1.12. Говорят, что *функции* $V(x(t))$ и $V(x(t),\, t)$ *имеют бесконечно малый высший предел в области* X *при* $|x| \to 0$, если $V(x) \to 0$, $V(x(t),\, t) \to 0$ при $|x| \to 0$.

Определение 1.13. Будем говорить, что *функции* $V(x(t))$ и $V(x(t),\, t)$ *имеют бесконечно большой низший предел в области* X *при* $|x| \to \infty$, если $V(x) \to \infty$, $V(x(t),\, t) \to \infty$ при $|x| \to \infty$.

Сформулируем основные теоремы прямого метода Ляпунова, которые являются основой при исследовании устойчивости непрерывных систем, динамические процессы в которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, а также при синтезе систем управления для такого класса объектов управления.

Теорема 1.11 (Теорема Ляпунова об устойчивости). *Если для уравнения возмущенного движения* (1.11) *в некоторой области* $X \subset \Re^n$ *существует положительно определенная функция* $V(x(t),\, t)$ *такая, что ее полная производная по времени*

$$\frac{dV(x,\, t)}{dt} = \left(\frac{\partial V(x,\, t)}{\partial x}\right)^T \cdot F(x(t),\; t) + \frac{\partial V(x,\, t)}{\partial t}, \tag{1.13}$$

вычисленная на траекториях системы (1.11), *знакоотрицательна, то невозмущенное движение системы* (1.1) *устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 1.12 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если для уравнения возмущенного движения* (1.11) *в некоторой области* $X \subset \Re^n$ *существует положительно определенная функция* $V(x(t),\, t)$, *имеющая бесконечно малый высший предел при* $|x| \to 0$, *а ее полная производная по времени* (1.15) *в силу уравнений* (1.11) *является отрицательно определенной, то невозмущенное движение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.13 (теорема Барабашина–Красовского). *Если в условиях теоремы* 1.12 *множество* X *совпадает со всем пространством* $\Re^n$, *а функция Ляпунова* $V(x(t),\, t)$ *допускает бесконечно большой низший предел при* $|x| \to \infty$, *то невозмущенное движение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Теорема 1.14 (теорема Красовского Н. Н.). *Пусть в уравнении возмущенного движения* (1.11) *векторная функция* $F(x(t),\, t)$ *непрерывно дифференцируема для любых* $x \in \Re^n$. *Тогда для экспоненциальной устойчивости тривиального решения* $x = 0$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция Ляпунова* $V(x(t),\, t)$, *удовлетворяющая условиям*:

$$k_1 |x|^2 \leqslant V(x(t), t) \leqslant k_2 |x|^2, \quad \dot{V}(x(t), t) \leqslant -k_3 |x|,$$
$$\left| \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} \right| \leqslant k_4 |x|,$$

где $k_i > 0, \; i = 1, \ldots, 4, \;\; k_2 > k_1$.

Замечание 1.1. Если в уравнении (1.11) функция $F(x(t), t) = F(x(t))$, т. е. система является стационарной, то и функцию Ляпунова можно брать не зависящей от t. В этом случае в правой части (1.15) будет отсутствовать частная производная по времени.

Для анализа систем часто используется хорошо известная лемма Барбалата.

Лемма 1.1. *Если скалярная функция* $\varphi(t)$ *равномерно непрерывна при* $t \geqslant 0$ *и существует конечный предел* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \varphi(s)\, ds$, *то выполнено условие* $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

Эта лемма позволяет доказать следующее утверждение, широко используемое в теории адаптивных систем.

Пусть имеется система, динамические процессы в которой описываются уравнениями

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), y(t)), \quad \dot{y}(t) = f_2(x(t)), \tag{1.14}$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $y(t) \in \mathfrak{R}^m$, векторные функции f_1, f_2 локально липшицевы.

Теорема 1.15. *Если векторные функции* f_1, f_2 *локально липшицевы, и существует положительно определенная функция Ляпунова* $V(z(t))$, $z(t) = \mathrm{col}\,(x(t), y(t))$, *допускающая бесконечно малый высший предел при* $|z(t)| \to 0$, *такая, что полная производная от нее по времени, вычисленная на траекториях системы* (1.16), *удовлетворяет условию*

$$\dot{V}(z(t)) \leqslant -k|x(t)|^2, \quad k > 0, \tag{1.15}$$

то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, *а вектор* $y(t)$ *ограничен.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 1.11, из условия (1.17) следует, что тривиальное решение $z(t) = 0$ уравнений (1.14) устойчиво, а, следовательно, векторы $x(t)$, $y(t)$ ограничены. Тогда из (1.14) следует ограниченность производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, так как функции $f_1(x(t), y(t))$, $f_2(x(t), y(t))$ локально липшицевы. Из (1.15) следует, что функция $V(z(t))$ не возрастающая, а снизу ограничена нулем, так как $V(z(t)) > 0$. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} V(z(t))$.

Тогда из (1.15) получаем $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}|x(s)|^2\,ds \leqslant \frac{1}{k}\left(V(z(t_0)) - V(z(t))\right)$, а так как векторы $x(t)$, $\dot{x}(t)$ ограничены, то функция $|x(t)|^2$ равномерно непрерывна при $t \geqslant t_0$. Тогда в соответствии с леммой 1.1 выполнено условие $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, и $x \in L_2$. Так как функция $f_2(x)$ удовлетворяет условиям Липшица, то $f_2(x) \in L_2$. Тогда из второго уравнения (1.14) следует ограниченность $y(t)$. □

Теорема 1.16 (теорема Ляпунова о неустойчивости). *Если для уравнения возмущенного движения* (1.11) *в некоторой области* $X \subset \mathfrak{R}^n$ *существует знакопостоянная функция* $V(x(t),\, t)$, *имеющая бесконечно малый высший предел при* $|x| \to 0$, *а ее полная производная по времени* (1.15) *в силу уравнений* (1.11) *является знакопостоянной одного знака с функцией* $V(x(t),\, t)$, *то невозмущенное движение системы* (1.1) *неустойчиво.*

Теорема 1.17 [68]. *Пусть для системы* (1.11) *в некоторой области* $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ *существует положительно определенная функция Ляпунова* $V(x(t), t)$, *допускающая бесконечно малый предел при* $|x| \to 0$, *и задано число* $\mu_1 > 0$ *такое, что область* Ω_x, *определяемая неравенством* $\inf\limits_{t>t_0} V(x(t),\, t) \leqslant \mu_1$, *содержится в области* Ω, *которая задана неравенством* $\sup\limits_{t>t_0} V(x(t),\, t) \leqslant \mu_2,\ \ \mu_2 > \mu_1$. *Тогда, если в области* $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_x$ *выполнены условия одной из теорем* 1.12–1.14, *то область* Ω *является областью диссипативности, а область* Ω_x *областью притяжения. Если* $\Omega = \mathfrak{R}^n$, *то система* (1.11) *диссипативна в целом.*

1.4.2. Второй метод Ляпунова для систем с запаздыванием. Материал данного раздела является результатом работ [56–60, 64–67].

Пусть возмущенное движение системы описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t,\, x(t),\, x(t-h_1), \ldots, x(t-h_k)), \\ x(s) &= \psi(s), \quad s \in [-h;\, 0], \end{aligned} \tag{1.16}$$

где $x(t) \in X \subset \mathfrak{R}^n$, $\psi(s) \in C_h$ — непрерывная начальная векторная функция, $h = \max\{h_1, \ldots, h_k\}$, непрерывная векторная функция $F(\cdot)$ удовлетворяет условиям Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

В соответствии с [67] вводится отрезок траектории $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-h;\, 0]$. Для каждого $t \geqslant t_0$ на векторных функциях $x_t(s)$ определяется функционал Ляпунова–Красовского $V(x_t(s),\, t)$.

Определение 1.14. *Функционал* $V(x_t(s),\, t)$ называется *положительно определенным*, если существует функция $W(x(t))$, удовлетворяющая условиям: $W(x(t)) > 0$, при $x(t) \neq 0$, $W(0) = 0$ такая, что

$V(x_t(s), t) \geqslant W(x(t))$. Если $V(x_t(s), t) \leqslant -W(x(t))$, то *функционал* $V(x_t(s), t)$ называется *отрицательно определенным.*

Определение 1.15. Говорят, что *функционал* $V(x_t(s), t)$ *допускает бесконечно малый высший предел*, если существует функция $W(x(t)) > 0$, при $x(t) \neq 0$, $W(0) = 0$ такая, что $V(x_t(s), t) \leqslant W(x(t))$, и *функционал* $V(x_t(s), t)$ *допускает бесконечно большой низший предел*, если $V(x_t(s), t) \geqslant W(x(t))$.

Так как производные от интегральных кривых имеют разрывы, то под полной производной по времени от функционала $V(x_t(s), t)$ понимается правое верхнее производное число функционала на траекториях системы (1.16):

$$\frac{dV(x_t(s), t)}{dt} = \overline{\lim_{\Delta t \to 0}} \sup_{t \geqslant t_0} \frac{\Delta V(x_t(s), t)}{\Delta t}.$$

Теорема 1.18. *Тривиальное решение уравнения возмущенного движения* (1.16) *устойчиво в области* $G = C_h \times X \subset C_h \times \mathfrak{R}^n$, *если существует непрерывный положительно определенный функционал* $V(x_t(s), t)$, *производная от которого вдоль интегральных кривых уравнения* (1.16) *не положительна при* $t \leqslant t_0$.

Теорема 1.19 (первая теорема Н. Н. Красовского). *Тривиальное решение уравнения* (1.16) *асимптотически устойчиво в области* $G = C_h \times X \subset C_h \times \mathfrak{R}^n$, *если существует непрерывный положительно определенный функционал* $V(x_t(s), t)$, *допускающий бесконечно малый высший предел такой, что полная производная от него, вычисленная вдоль интегральных кривых* $x(t, \psi(s))$ *уравнения* (1.16) *является отрицательно определенной. Если при этом* $X = \mathfrak{R}^n$, *то тривиальное решение устойчиво в целом.*

Теорема 1.20 (вторая теорема Н. Н. Красовского). *Тривиальное решение уравнения* (1.16) *асимптотически устойчиво в области* $G = C_h \times X \subset C_h \times \mathfrak{R}^n$ *тогда и только тогда, если существует непрерывный положительно определенный функционал* $V(x_t(s), t)$, *удовлетворяющий в области* G *условиям*:

$$W(|x(t)|) \leqslant V(x_t(s), t) \leqslant W_1(|x(t)|) + W_2(\|x(s)\|_h),$$
$$\frac{dV(x_t(s), t)}{dt} \leqslant -W_3(|x(t)|),$$

где $W(r)$, $W_1(r)$, $W_2(r)$ — *положительно определенные монотонно возрастающие функции при* $r > 0$, $W(0) = W_1(0) = W_2(0) = 0$, $W_3(r)$ — *непрерывная положительно определенная функция при* $r > 0$.

Теорема 1.21 (теорема Н. Н. Красовского об экспоненциальной устойчивости). *Тривиальное решение уравнения* (1.16) *экспоненциально устойчиво в области* $G = C_h \times X \subset C_h \times \mathfrak{R}^n$ *тогда и только тогда, если существует непрерывный положительно определенный функционал* $V(x_t(s),\, t)$, *удовлетворяющий в области* G *условиям*:

$$k_1 \|x_t(s)\|_h \leqslant V(x_t(s),\, t) \leqslant k_2 \|x_t(s)\|_h, \quad \frac{dV(x_t(s),\, t)}{dt} \leqslant -k_3 \|x_t(s)\|_h,$$
$$|V(x_t(s),\, t) - V(\overline{x}_t(s),\, t)| \leqslant k_4 \left\|x_t(s) - \overline{x}_t(s)\right\|_h.$$

Последнее соотношение можно заменить на следующее неравенство:

$$\frac{dV(x_t(s),\, t)}{dx(t)} \leqslant -k_5 \left\|x_t(s)\right\|_h,$$

где $k_i > 0,\ i = 1, \ldots, 5,\ k_2 > k_1$.

Второй метод Ляпунова для систем с запаздыванием нейтрального типа был развит в работах [57, 60], которым и следует дальнейшее изложение.

Будем рассматривать системы, возмущенное движение которых описывается уравнением

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(x(t) - D(t,\, x(t-h))\right) = F(t,\, x(t),\, x(t-h)), \\ x(s) = \psi(s), \quad s \in [-h;\, 0\,], \end{gathered} \tag{1.17}$$

где $x(t) \in C[-h;\, t_1]$, $C[-h;\, t_1]$ — пространство n-мерных непрерывных функций, функция $Z(t,\, x(t),\, x(t-h)) = x(t) - D(t,\, x(t-h))$ имеет непрерывные производные для любых $t \in [t_0;\, t_1)$, $F(t,\, x(t),\, x(t-h))$ — непрерывная векторная функция своих аргументов.

Для исследования устойчивости систем вида (1.17) большую роль играют разностные неравенства

$$\begin{gathered} |Z(t,\, x(t),\, x_t(s))| = |x(t) - D(t,\, x_t(s))| \leqslant f(t), \\ x(s) = \psi(s), \quad s \in [-h;\, 0\,], \quad D(t,\, 0) = 0, \end{gathered} \tag{1.18}$$

где $x(t) \in X \subset \mathfrak{R}^n$, $f(t)$ — неотрицательная непрерывная функция. Обозначим через $x(t,\, \psi(s))$ решение неравенства (1.18).

Определение 1.16. *Тривиальное решение* $x(t) = 0$ *неравенства* (1.18) называется:

1. f — *устойчивым*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при начальных условиях $\|\psi(s)\|_h \leqslant \delta(\varepsilon)$ и правой части такой, что $\sup\limits_{t \geqslant t_0} f(t) \leqslant \delta(\varepsilon)$, будет выполняться условие $|x(t,\, \psi(s))| \leqslant \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$;

2. *асимптотически f-устойчивым*, если оно f-устойчиво и $\lim\limits_{t\to\infty} x(t,\, \psi(s)) = 0$ для всех $\psi(s) \in C_h$ и всякой правой части $f(t)$ такой, что $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$;
3. *f-ограниченным*, если каждой ограниченной функции $f(t)$ отвечает ограниченное решение $x(t,\, \psi(s))$.

Рассмотрим положительно определенный функционал $V(t,\, x_t(s),\, Z(t,\, x_t(s)))$ — непрерывный и дифференцируемый по совокупности своих аргументов.

Теорема 1.22. *Если существует функционал* $V(t, x_t(s), Z(t, x_t(s)))$, *удовлетворяющий выше перечисленным требованиям, такой что выполнены условия*:

$$W_1\left(|Z(t,\, x_t(s))|\right) \leqslant V(t,\, x_t(s),\ Z(t,\, x_t(s))) \leqslant W_2\left(\|x_t(0)\|_h\right),$$

$$\frac{dV\big(t,\, x_t(s),\ Z(t,\, x_t(s))\big)}{dt} < 0,$$

а тривиальное решение разностного неравенства (1.18) *f-устойчиво, то тривиальное решение уравнения* (1.17) *устойчиво, где* $W_1(0) = W_2(0) = 0,\ W_1(r) > 0,\ W_2(r) > 0,\ r > 0$.

Теорема 1.23. *Если существует функционал* $V(t, x_t(s), Z(t, x_t(s)))$, *удовлетворяющий неравенствам*: $W_1(|Z(t, x_t(s))|) \leqslant V(t, x_t(s), Z(t, x_t(s))) \leqslant W_2(\|x_t(0)\|_h)$, $dV(t, x_t(s), Z(t, x_t(s)))/dt < -W_3(|Z(t, x_t(s))|)$, $W_3(r) > 0$, $r > 0$, *а тривиальное решение разностного неравенства* (1.18) *асимптотически f-устойчиво, то тривиальное решение уравнения* (1.17) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.24. *Если векторная функция* $D(t,\, x(t-h))$ *удовлетворяет условию Липшица с константой меньше единицы и существует функционал* $V(t, x_t(s),\, Z(t, x_t(s)))$, *удовлетворяющий неравенствам*: $W_1(|Z(t, x_t(s)|) \leqslant V(t, x_t(s),\, Z(t, x_t(s)) \leqslant W_2(\|x_t(0)\|_h)$, $dV(t, x_t(s), Z(t, x_t(s)))/dt < -W_4\left(|x(t)|\right)$, $W_4(r) > 0$, $r > 0$, *то тривиальное решение уравнения* (1.17) *асимптотически устойчиво.*

1.5. Абсолютная устойчивость нелинейных систем

В настоящее время наиболее исследованным классом нелинейных систем с точки зрения наличия конструктивных критериев устойчивости являются системы, математические модели которых можно преобразовать к встречно-параллельному соединению двух подсистем (блоков). Одна подсистема, при этом, описывается линейными дифференциальными уравнениями, а вторая — нелинейными.

Под абсолютной устойчивостью системы понимается ее асимптотическая устойчивость для некоторого класса нелинейных блоков при фиксированной линейной части. Основные результаты по исследованию устойчивости таких систем получены с помощью частотных методов в виде частотных критериев [136], которые широко используются и для синтеза систем управления.

1.5.1. Линейные блоки. Линейный блок рассматривается как абстрактный объект [73, 136], вход и выход которого характеризуются векторными функциями времени. В настоящей работе будем рассматривать линейные блоки, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с запаздывающими аргументами.

Математическая модель линейного блока может быть задана уравнением в пространстве состояний

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Lx(t) + Ku(t). \tag{1.19}$$

Здесь $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ — вектор состояния линейного блока; $y(t) \in \mathfrak{R}^k$ — вектор выхода; $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ — вектор входных сигналов; A, B, L, K — числовые матрицы соответствующих порядков. Может быть задана передаточная матрица линейного блока (1.19):

$$W(\lambda) = L(\lambda I_n - A)^{-1}B + K. \tag{1.20}$$

Часто матрица K является нулевой, т. е. она отсутствует в (1.19) и (1.20).

Линейные блоки с запаздывающим аргументом описываются уравнением

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{k_1} A_i x(t-h_i)+\sum_{j=0}^{k_2} B_j u(t-\tau_j), \quad y(t)=\sum_{r=0}^{k3} L_r x(t-\eta_r), \\ x(s) = \psi(s), \quad s \in [-h; 0], \quad u(z) = \varphi(z), \quad z \in [-\tau; 0],\end{gathered} \tag{1.21}$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $y(t) \in \mathfrak{R}^k$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $h = \max\{h_0, \ldots, h_{k_1}, \eta_0, \ldots, \eta_{k_3}\}$, $\tau = \max\{\tau_0, \ldots, \tau_{k_2}\}$, $\psi(s)$, $\varphi(z)$ — непрерывные ограниченные начальные функции. Передаточная матрица имеет вид

$$W(\lambda) = \sum_{r=0}^{k3} L_r \,\mathrm{e}^{-\lambda\eta_r} \left(\lambda I_n - \sum_{i=0}^{k_1} A_i \,\mathrm{e}^{-\lambda h_i}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{k_2} B_j \,\mathrm{e}^{-\lambda\tau_j}.$$

Полагая нулевыми различные сочетания числовых матриц и времен запаздывания, получим описание различных линейных блоков с запаздыванием.

Выделим два основных типа линейных блоков с запаздыванием:

1. Если $B_j = 0$, $j = 1, \ldots, k_2$, $\tau_0 = 0$, $L_r = 0$, $r = 1, \ldots, k_3$, $\eta_0 = 0$, то блок будем называть линейным блоком с запаздыванием по состоянию;
2. Если $A_i = 0$, $i = 1, \ldots, k_1$, $h_0 = 0$, $\tau_j \neq 0$, $j = 0, \ldots, k_2$, $L_r = 0$, $r = 1, \ldots, k_3$, $\eta_0 = 0$, то блок будем называть линейным блоком с запаздыванием по управлению.

Хорошо известно, что необходимыми и достаточными условиями устойчивости уравнений (1.19) и (1.21) при $u(t) = 0$ является условие [52] $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, где λ_i — корни характеристического уравнения $\det(\lambda I_n - A) = 0$ для уравнения (1.19) и корни характеристического квазиполинома $\det\left(\lambda I_n - \sum\limits_{i=0}^{k_1} A_i\,\mathrm{e}^{-\lambda h_i}\right) = 0$ для уравнения (1.21).

Для простоты рассмотрим линейные блоки двух типов

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Lx(t), \tag{1.22}$$

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h) + Bu(t), \\ y(t) = Lx(t), \quad x(s) = \psi(s), \quad s \in [-h;\,0], \end{gathered} \tag{1.23}$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $y(t) \in \mathfrak{R}^k$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, с передаточными матрицами

$$\begin{gathered} W(\lambda) = L(\lambda I_n - A)^{-1}B = \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}, \\ \beta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A), \quad \alpha(\lambda) = (\lambda I_n - A)^{+}, \end{gathered} \tag{1.24}$$

$$\begin{gathered} W(\lambda) = L(\lambda I_n - A - De^{-\lambda h})^{-1}B = \frac{\alpha(\lambda, \mathrm{e}^{-\lambda h})}{\beta(\lambda, \mathrm{e}^{-\lambda h})}, \\ \beta(\lambda, \mathrm{e}^{-\lambda h}) = \det(\lambda I_n - A - D\,\mathrm{e}^{-\lambda h}), \end{gathered} \tag{1.25}$$

$$\alpha(\lambda, \mathrm{e}^{-\lambda h}) = (\lambda I_n - A - D\,\mathrm{e}^{-\lambda h})^{+},$$

где $(\lambda I_n - A)^{+}$, $(\lambda I_n - A - D\,\mathrm{e}^{-\lambda h})^{+}$ — транспонированные матрицы алгебраических дополнений матриц $(\lambda I_n - A)$, $(\lambda I_n - A - D\,\mathrm{e}^{-\lambda h})$, соответственно.

Следует отметить, что для эквивалентности математических описаний (1.22) и (1.24), а также (1.23) и (1.25), требуется, чтобы все элементы передаточных матриц имели один и тот же знаменатель, равный $\beta(\lambda)$ или $\beta(\lambda, \mathrm{e}^{-\lambda h})$, соответственно, и при этом $\deg\beta(\lambda) = n$, $\deg\beta(\lambda, \mathrm{e}^{-\lambda h}) = n$. В противном случае, при переходе от описания в пространстве состояний к передаточным матрицам может быть потеряна неуправляемая часть системы, а при сокращении составляющих, содержащие корни с положительной вещественной частью, можно получить описание с совершенно другими свойствами.

Рассмотрим это на простейшем примере.

***Пример* 1.1.** Пусть имеется описание системы в виде

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) - u(t), \quad y(t) = x_1(t), \quad W(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1}.$$

Если осуществить сокращение, то получим $W(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda + 1}$, откуда видно, что имея неминимально-фазовую, неустойчивую систему, в резуль-