Матросов В.М.
Козлов Р.И.
Матросова Н.И.

Теория устойчивости многокомпонентных нелинейных систем

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.93
ББК 22.161
М 34

Матросов В.М., Козлов Р.И., Матросова Н.И. **Теория устойчивости многокомпонентных нелинейных систем.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 184 с. — ISBN 978-5-9221-0854-6.

Дается систематическое изложение нового метода анализа устойчивости нелинейных сложных систем — метода векторных функций Ляпунова (ВФЛ), созданного в течение последних сорока лет и нашедшего эффективные приложения в различных областях. Наибольшее внимание уделяется способам и алгоритмам построения ВФЛ, упрощенных систем сравнения, количественных оценок отклонений и возмущений, а также параметрическому анализу и приложениям, разработанным авторами и их сотрудниками.

Для студентов технических университетов, специализирующихся по прикладной математике, теории управления, динамике и управлению летательными аппаратами.

Научное издание

МАТРОСОВ Владимир Мефодьевич
КОЗЛОВ Равиль Измайлович
МАТРОСОВА Нина Ивановна

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Редактор *О.В. Салецкая*
Оригинал-макет: *В.В. Затекин*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 05.06.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 10,6. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

ISBN 978-5-9221-0854-6

9 785922 108546

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-9221-0854-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В книге дается систематическое изложение метода анализа устойчивости сложных многокомпонентных нелинейных систем — метода векторных функций Ляпунова (ВФЛ). В течение 40 лет метод развивался в математическом аспекте, а за последние 30 лет он нашел многочисленные разнообразные применения к анализу конкретных технических (летательные аппараты, внеатмосферные астрономические обсерватории и т. д.), экономических и других систем, которые выявили его высокую эффективность. В настоящее время метод характеризуется определенной законченностью, и целесообразно подвести итоги его развития и приложений в учебном пособии.

Эта книга основана на результатах, полученных авторами учебного пособия, а также А.С. Земляковым.

Во Введении дается обзор современных подходов к анализу устойчивости многокомпонентных динамических систем, состояния метода ВФЛ в целом. В учебном пособии даны основные теоремы о различных видах устойчивости с использованием векторных функций Ляпунова, способы и алгоритмы построения ВФЛ и упрощенных систем сравнения.

Специалистов по теории управления и инженеров особенно должно заинтересовать применение метода к исследованию устойчивости и оценок для многокомпонентных нелинейных систем управления. Для специалистов в области прикладной математики будут интересны комбинация метода ВФЛ и интервального анализа.

Идея написания и план учебного пособия принадлежат В.М. Матросову.

Анализ динамических свойств систем на основе метода векторных функции Ляпунова (ВФЛ) включает следующие этапы исследования.

1. Выбор математической модели исследуемой системы и формализация определений изучаемых динамических свойств.
2. Вывод лемм и теорем сравнения.
3. Вывод теорем о динамических свойствах в ВФЛ.
4. Построение ВФЛ и системы сравнения.
5. Получение условий наличия динамического свойства, количественных оценок и приложения.

По каждому из этих этапов были разработаны методы, модели, алгоритмы; создано программное и информационное обеспечение.

Данная книга охватывает этапы 4, 5 и частично 3 для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями применительно к динамическим свойствам типа устойчивости (различных видов).

Книга предназначается для студентов и аспирантов по теории устойчивости, прикладной математике, механике, теории управления, для инженеров — разработчиков систем управления.

Введение

Метод функций Ляпунова создан великим русским математиком и механиком академиком А.М. Ляпуновым [1892] и является основным методом исследования устойчивости движения нелинейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Метод распространен на задачи анализа разнообразных динамических свойств решений дифференциальных уравнений. Он стал основным методом качественного исследования нелинейных систем.

Метод функций Ляпунова нашел глубокие и эффективные приложения к ряду проблем механики, физики, техники, теории управления, к анализу устойчивости и других динамических свойств нелинейных систем.

В сотнях публикаций предлагаются модификации теорем метода функций Ляпунова применительно к конкретным динамическим свойствам и математическим описаниям систем. Дальнейшим обобщением метода явилось его объединение с теорией дифференциальных неравенств типа Чаплыгина [1919], приведших к определенной унификации доказательств, формированию в начале 60-х годов и развитию метода сравнения с функционалом типа Ляпунова, с помощью которого легко получается большинство классических и современных теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности теории устойчивости движения.

Но основной трудностью при применении метода функций Ляпунова к конкретным задачам, даже при таком подходе остается, как и во времена Ляпунова, трудность построения функции или функционала Ляпунова, удовлетворяющих условиям той или иной теоремы. В этой ситуации, хотя для ряда классов нелинейных систем предложены эффективные способы построения функций Ляпунова, значительный интерес представляет дальнейшее развитие метода в направлении ослабления требований к функциям Ляпунова, расширения класса используемых функций. Это может быть достигнуто при использовании в теореме нескольких функций типа Ляпунова, каждая из которых удовлетворяет менее жестким требованиям, чем в соответствующей теореме с одной функцией, что облегчает проблему их построения. С помощью такого рода теорем уже давно получен ряд интересных результатов в задачах устойчивости консервативных, диссипативных, гироскопических систем, реакторов, нелинейных систем регулирования и т. д.

С этой же целью Р. Беллманом [1962] и В.М. Матросовым [1962] была выдвинута идея векторной функции Ляпунова (ВФЛ), удовлетворяющей конечномерному дифференциальному неравенству типа Чаплыгина–Важевского; получены первые теоремы об устойчивости с ВФЛ.

Здесь наряду с исходной системой вводится вспомогательная система, которая называется системой сравнения (СС) и описывается обыкновенным конечномерным дифференциальным уравнением. С использованием аналога требований Ляпунова и условий квазимонотонности (Важевского) доказано, что полуустойчивость или асимптотическая полуустойчивость сверху (в некотором смысле) СС влечет за собой устойчивость (соответственно, асимптотическую устойчивость) исходной системы. Такие теоремы называются теперь теоремами сравнения с ВФЛ. В. Лакшмикантамом [1965] и В.М. Матросовым [1965] теоремы сравнения с ВФЛ доказаны для задач условной устойчивости, ограниченности и устойчивости относительно части переменных.

Для управляемых систем доказаны теоремы сравнения с ВФЛ для задач стабилизируемости, управляемости, экспоненциальной инвариантности и ограниченности, сближения и уклонения (В.М. Матросов, С.Н. Васильев [1978]), а также для существования оптимального управления.

К настоящему времени получены сотни теорем сравнения с ВФЛ для различных динамических свойств нелинейных дифференциальных уравнений. В условия каждой теоремы сравнения вошли модификации требований к ВФЛ, существенно зависящие от изучаемого свойства и требовавшие творческого подхода к их формулировке в каждом случае. Отвлекаясь от формулировок таких требований, результаты этих теорем для дифференциальных уравнений оказалось возможным объединить в виде основной идеи принципа сравнения: если существуют ВФЛ, удовлетворяющие подходящим условиям, то различные динамические свойства исходного уравнения вытекают из соответствующих динамических свойств системы сравнения. В такой общей интуитивной форме принцип сравнения с ВФЛ сформулирован впервые в докладе В.М. Матросова [1966], подробно изложен и подкреплен доказательствами десятков теорем сравнения с ВФЛ в цикле статей В.М. Матросова [1968, 1969].

Значительное расширение области приложимости метода сравнения с ВФЛ было достигнуто на пути его распространения на общие системы (А.А. Каянд, В. Лакшмикантам), полисистемы (Д. Башо [1967]), особенно на системы процессов, абстрактные управляемые системы и системы в среде, охватывающие большинство имеющихся в литературе аксиоматических конструкций математической теории систем, систем решений уравнений различных классов с непрерывным и дискретным временем (В.М. Матросов [1973]; В.М. Матросов, Л.Ю. Анапольский, С.Н. Васильев [1980]).

Метод сравнения с ВФЛ оказалось возможным распространить на анализ более сложных динамических и других свойств, определения которых описываются практически произвольными кванторными формулами применительно к абстрактной динамике систем, абстрактной теории управления и математической теории систем. Основные концепции этих теорий, охватывающих многие классы моделей реальных систем, позволили с полным основанием установить в них в общем виде принцип сравнения в алгоритмической форме (В.М. Матросов, С.Н. Васильев, Р.И. Козлов и др. [1981]).

Метод сравнения явился первым строгим и универсальным методом анализа различных свойств разнообразных систем, фактически независимо от их сложности, природы и формы математического описания, особенно эффективным в динамике систем и теории управления.

Использование теорем сравнения сводит задачу анализа устойчивости или других динамических свойств к построению ВФЛ, СС и существенно более простому анализу соответствующих свойств СС. Последний выполнен отдельно в достаточно общем случае дифференциальных систем Важевского Р.И. Козловым [1979], [2001].

После подстановки в теорему сравнения достаточных условий наличия свойства СС, выраженных в терминах правой части, некоторого упрощения требований, наложенных на ВФЛ, центр тяжести исследований по методу ВФЛ переносится на разработку способов, алгоритмов построения ВФЛ, СС и количественных оценок, на приложения метода, что и является предметом этой книги применительно к нелинейным системам, описываемым дифференциальными уравнениями.

Для построения ВФЛ и СС можно использовать некоторые классические результаты А.М. Ляпунова [1892].

Прикладная значимость метода ВФЛ вскрыта блестящей работой Ф.Н. Бейли [1965], в которой была предложена идея исследования устойчивости сложных нелинейных систем на основе их декомпозиции и последующего оценочного агрегирования с применением ВФЛ. Благодаря исследованиям Д.Д. Шильяка [1971, 1972, 1973], Л.Т. Груйича [1972, 1973, 1974], В.М. Матросова с сотрудниками [1972, 1973, 1975], это направление выросло в теорию устойчивости сложных (крупномасштабных) динамических систем. Ее изложение дано в книгах А.Н. Мишела, Р.К. Миллера [1977], В.Д. Фурасова [1977, 1982], Д.Д. Шильяка [1978], Л.Т. Груйича, А.А. Мартынюка, М. Риббенс-Павеллы [1984], Р.З. Абдуллина, Л.Ю. Анапольского, А.А. Воронова и др. [1987].

Итерационные процессы улучшения декомпозиции и построения ВФЛ и СС — новая группа способов построения ВФЛ, СС и оценок, разработанная к настоящему времени. Каждая группа способов построения ВФЛ и СС имеет наивысшую эффективность для своей области приложений. Все они описываются в этой книге. Выполненные приложения метода ВФЛ показали его высокую эффективность, преимущества перед другими известными методами анализа устойчивости нелинейных систем.

Таким образом, сделан существенный шаг в исследовании разнообразных свойств решений дифференциальных уравнений без их интегрирования. Разработан общий, метод анализа свойств решений нелинейных сложных систем (см. В.М. Матросов [2001]).

В гл. 1 излагаются классические и современные результаты теории устойчивости движения, метода сравнения и методов исследования сложных динамических систем.

В гл. 2 приводятся основные определения и теоремы метода векторных функций Ляпунова (ВФЛ) для различных типов устойчивости.

Глава 3 посвящена описанию способов и алгоритмов построения ВФЛ, систем сравнения и количественных оценок. В том числе подробно рассматриваются способ декомпозиции-агрегирования, получивший наибольшее распространение в задачах устойчивости сложных многокомпанентных динамических систем, и конечный итерационный процесс улучшения ВФЛ, СС и декомпозиции системы, показавший наибольшую эффективность в ряде приложений.

В гл. 4 подробно излагается новый способ построения ВФЛ с компонентами из модулей линейных форм, СС и количественных оценок для систем с возмущениями, также оказавшийся весьма эффективным в программной реализации и приложениях.

Глава 5 посвящена применению метода ВФЛ для исследования критических случаев в теории устойчивости.

В гл. 6 рассмотрены приложения метода ВФЛ к исследованию динамических орбитальных телескопов и некоторых экономических систем.

Учебное пособие позволит читателю составить представление о современном состоянии метода ВФЛ — нового общего и эффективного метода анализа различных динамических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений и сложных динамических систем, применение которого привело к решению ряда важных прикладных задач.

Наиболее актуальными задачами в дальнейшем развитии и в приложениях метода является разработка алгоритмов построения ВФЛ и СС для анализа свойств, отличных от устойчивости, для нелинейных систем с разрывными нелинейностями; их программная реализация; решение новых задач исследования современных технических, социально-экономических и других систем.

Глава 1

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ. МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В последние десятилетия при исследовании многокомпонентных систем возродился интерес к методу функций Ляпунова, но при этом из средства, в основном, доказательства математических теорем и утверждений метод Ляпунова превратился в мощный вычислительный аппарат анализа динамических систем с различными свойствами. С помощью функций Ляпунова удается не только проверять устойчивость, но и оценивать заданную степень устойчивости, находить мажоранты и миноранты переходных процессов, строить системы сравнения, производить агрегирование и определять допустимые параметры связи, при которых получается устойчивой (или имеет заданную степень устойчивости) многокомпонентная система.

В гл. 1 даются краткие сведения о классической теории устойчивости, о дифференциальных неравенствах, о функциях Ляпунова для оценки решений в системах управления. Рассмотрены основные понятия теории многокомпонентных динамических систем и основные этапы их исследования: декомпозиция, анализ изолированных подсистем, агрегирование на основе построения систем сравнения.

§ 1. Классическая теория устойчивости движения

В классической теории устойчивости движения А.М. Ляпунова [1892] рассматриваются отклонения $x(t)$ в текущие моменты времени (t) от невозмущенного движения, предполагаемого заданным как решение уравнений движения. Уравнения движения системы тогда записываются в этих отклонениях в форме, допускающей нулевое решение, и называются уравнениями возмущенного движения.

1. Уравнения возмущенного движения. Пусть дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(t, x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots n,$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x). \tag{1.1}$$

Здесь x рассматривается как точка вещественного n-мерного пространства R^n с нормой $||x|| = |x^1| + \ldots + |x^n|$ или евклидова пространства E^n с нормой $||x|| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$, а также x и $X(t, x)$ — как векторы-столбцы

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X(t, x) = \begin{pmatrix} X^1(t, x^1, \ldots, x^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^n(t, x^1, \ldots, x^n) \end{pmatrix}.$$

Предполагается $X(t, 0) \equiv 0$, т. е. система (1.1) допускает невозмущенное движение $x = 0$.

Вещественные функции $X^i(t, x^1, \ldots, x^n)$ определены, непрерывны в области $\Gamma = \{(t, x) : ||x|| < \eta, t \geqslant 0\}$ $(\eta = \text{const} > 0$ или $\eta = +\infty)$ и имеют в ней непрерывные частные производные по $x^1, \ldots, x^n$, которые ограничены в каждой замкнутой области

$$\overline{\Gamma}_0 \underline{\underline{\Delta}} \{(t, x) \in \Gamma : t \geqslant 0, \quad ||x|| \leqslant \eta_0\}, \quad 0 < \eta_0 < \eta.$$

Это обеспечивает существование, единственность и нелокальную продолжимость решений системы, непрерывную зависимость их от начальных данных (и времени t) в области Γ.

Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений, при $\eta = +\infty$ предполагается продолжимость решений для всех $t \in T \underline{\underline{\Delta}} [0, +\infty)$ так, что возмущенные движения описываются вектор-функцией $x(t, t_0, x_0)$, определенной и непрерывной при $(t_0, x_0) \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma, t \in [t_0, \tau), t_0 < \tau \leqslant +\infty$ (т. е. на T или до тех пор, пока $||x|| < \eta$), непрерывно дифференцируемой по t (в случае $\eta = +\infty$ решения $x(t, t_0, x_0)$ определены и непрерывны при всех $t \geqslant t_0$). Считается, что $t_0 \in T_0$, $T_0 = T = [0, +\infty)$.

Здесь и в дальнейшем (без оговорок) строчными греческими буквами обозначаются положительные числа, а прописными греческими буквами — множества. Все функции предполагаются конечными и однозначными. Область $H \underline{\underline{\Delta}} (x \in R^n : ||x|| < \eta)$. Областью $H_0 \subset H$ называется открытое связное множество в R^n, его замыкание $\overline{H}_0$ — замкнутой областью, а $\overline{H} \setminus H_0$ — границей области H_0. В дальнейшем предполагается $\overline{H}_0 \subset H$,

ет функция $w(x)$, удовлетворяющая условию $|v(t,x)| \leqslant w(x)$ при $(t,x) \in \Gamma$, $v(t,0) = 0$, $\quad w(0) = 0$.

Определение 4. Функция $v(t,x)$ допускает бесконечно большой низший предел в Γ, если существует функция $w(x)$, для которой $v(t,x) \geqslant w(x)$ при $(t,x) \in \Gamma$ и

$$\lim_{\|x\| \to \eta} w(x) = +\infty. \tag{1.2}$$

Определение 5. Производная $\dot{v}(t,x)$ называется определенно положительной в области $v > 0$, если для любого $\alpha > 0$ существует $\beta(\alpha) > 0$ такое, что $\dot{v}(t,x) > \beta(\alpha)$ при $(t,x) \in B(v > \alpha)$, т. е. если существует вещественная неубывающая функция $b(r)$, $\quad b(0) = 0$, $\quad b(r) > 0$ при $r > 0$, называемая функцией класса Хана, такая, что

$$\dot{v}(t,x) \geqslant b(v(t,x)) \quad \text{при} \quad (t,x) \in B(v \geqslant 0). \tag{1.3}$$

3. Устойчивость. Вводятся следующие определения.

Устойчивость (St) (А.М. Ляпунов [1892]): для любых $\varepsilon \in (0,\eta), t_0 \in T_0$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что решения $x(t,t_0,x_0)$ определены и удовлетворяют условию $\|x(t,t_0,\mathrm{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0, +\infty), \|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$.

Устойчивость, равномерная по t_0 (USt) (К.П. Персидский [1936]): в определении устойчивости положительное число $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать не зависящим от t_0.

Классическими являются теорема Ляпунова об устойчивости движения с обращением К.П. Персидского [1937] и теорема Персидского. [1936–1937, 1938] о равномерной устойчивости с обращением Н.Н. Красовского [1955, 1956] и Я. Курцвейля [1955], которые приводятся здесь в единой формулировке.

Теорема 1.1. *Для устойчивости* (*соответственно устойчивости, равномерной по* t_0) *невозмущенного движения* $x = 0$ *системы* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области существовала определенно-положительная* (*соответственно и допускающая бесконечно малый высший предел*) *функция* $v(t,x)$, *производная которой в силу уравнений возмущенного движения* (1.1) *постоянно отрицательна* $(\dot{v}(t,x) \leqslant 0)$.

Невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1), не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым* (А.М. Ляпунов). Это означает, что существуют $t_0^* \in T_0$ и $\varepsilon^* > 0$, для которых при любом $0 < \delta < \varepsilon^*$ существуют $x_0^* \in H_0 : \|x_0^*\| < \delta$ и $t^* \in T :\ t_0^* < t^* < +\infty$ такие, что решение $x(t,t_0^*,x_0^*)$ системы

(1.1) определено на $[t_0^*, t^*]$ и $||x(t^*, t_0^*, x_0^*)|| = \varepsilon^*$, $||x(t, t_0^*, x_0^*)|| < \varepsilon^*$ при $t \in [t_0, t^*)$.

Классическими являются теоремы Ляпунова о неустойчивости, первая из которых необратима, как показано Н.Н. Красовским [1958] для произвольной системы (1.1), а обращение второй доказано Н.Н. Красовским [1954, 1956] и И. Вркочем [1955]. Они приводятся здесь в единой формулировке.

Теорема 1.2. *Для неустойчивости невозмущенного движения* $x = 0$ *системы* (1.1) *достаточно* (*соответственно необходимо и достаточно*), *чтобы в некоторой области* Γ_0^1 *существовала функция* $v(t, x)$, *допускающая бесконечно малый высший предел* (*соответственно ограниченная*) *и при любом* $t_0 \in T^0$ *принимающая положительные значения в некоторых точках сколь угодно малой окрестности начала координат* $x = 0$, *производная которой в силу системы* (1.1) $\dot{v}(t, x)$ *определенно-положительна* (*соответственно удовлетворяет неравенству* $\dot{v}(t, x) \geqslant \lambda v(t, x)$, *где* λ — *некоторое положительное число*),$(t, x) \in \Gamma_0^1$.

Н.Г. Четаевым [1946] доказана теорема о неустойчивости.

Теорема 1.3. *Для неустойчивости решения* $x = 0$ *системы* (1.1) *в области* H *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $v(t, x)$, *ограниченная в области* $v > 0$, *существующая при любом* $t > 0$ *в сколь угодно малой окрестности начала координат* $x = 0$, *производная которой* $\dot{v}(t, x)$ *в силу системы* (1.1) *определенно-положительна в области* $v > 0$.

4. Асимптотическая устойчивость. Вводятся следующие определения. Невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) называется *асимптотически устойчивым* ($AsSt$) (А.М.Ляпунов [1892]), если оно устойчиво и для всякого $t_0 \in T_0$ существует $\pi(t_0) \in (0, \eta)$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} ||x(t, t_0, x_0)|| = 0 \quad \text{при} \quad ||x_0|| < \pi(t_0). \tag{1.4}$$

Асимптотическая устойчивость, равномерная по (t_0, x_0) ($UAsSt$) (И.Г. Малкин [1954]): имеется устойчивость, равномерная по t_0, и выполняется предыдущее определение с $\pi(t_0)$, не зависящим от t_0, причем предел в (1.4) является равномерным по t_0 и $x_0 \in \pi$.

Пусть задана область $A \subseteq H$ и фиксировано $t_0 \in T_0$. Множество $\Pi_{t_0} \subseteq A$ называется областью притяжения невозмущенного движения для t_0, если при $x_0 \in \Pi_{t_0}$ решения $x(t, t_0, x_0)$ определены на полуоси $[t_0, +\infty)$ и удовлетворяют условиям $x(t, t_0, x_0) \in A$, $\lim ||x(t, t_0, x_0)|| = 0$ при $t \to +\infty$.