

Л.И. ЗАЙЧИК
В.М. АЛИПЧЕНКОВ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ
В ТУРБУЛЕНТНОЙ
ЖИДКОСТИ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 532.5
ББК 22.253
3 17

Зайчик Л. И., Алипченков В. М. **Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 312 с. — ISBN 978-5-9221-0828-7.

Книга посвящена статистической теории и континуальному методу моделирования гидродинамики и теплообмена в дисперсных турбулентных течениях на основе кинетических уравнений для функции плотности вероятности скорости и температуры частиц дисперсной фазы. Основные теоретические проблемы, рассмотренные в книге, связаны с взаимодействием частиц с турбулентными вихрями несущей сплошной среды и столкновениями частиц друг с другом в турбулентных потоках. Особое внимание уделяется явлению аккумуляции (кластеризации) частиц в пристеночной и однородной турбулентности. В качестве примеров приложения представленных статистических моделей рассматривается поведение частиц в изотропной, однородной сдвиговой и пристеночной турбулентности.

Книга предназначена научным работникам, а также аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в области математического моделирования турбулентных течений, динамики многофазных сред и механики аэрозолей.

ISBN 978-5-9221-0828-7

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© Л. И. Зайчик, В. М. Алипченков, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	8
Глава 1. Движение и теплообмен частиц в однородной изотропной турбулентности	16
1.1. Характеристики однородной изотропной турбулентности.	16
1.2. Движение и теплообмен одиночной частицы.	27
1.3. Корреляции скорости и температуры жидкости вдоль траекторий инерционных частиц.	30
1.4. Корреляции скорости и температуры частиц в стационарной изотропной турбулентности	48
Глава 2. Движение частиц в градиентных турбулентных потоках	57
2.1. Кинетическое уравнение для одноточечной ФПВ скорости частицы	58
2.2. Уравнения для одноточечных моментов скорости частиц.	66
2.3. Алгебраические модели турбулентных напряжений	72
2.4. Граничные условия для уравнений движения дисперсной фазы	81
2.5. Вторые моменты пульсаций скорости в однородном сдвиговом потоке.	94
2.6. Движение частиц в пристеночной области	110
2.7. Движение частиц в вертикальном канале	121
2.8. Осаждение частиц в вертикальном канале	133
Глава 3. Теплообмен частиц в градиентных турбулентных потоках	143
3.1. Кинетическое уравнение для совместной ФПВ скорости и температуры частицы	143
3.2. Уравнения для одноточечных моментов температуры частиц	151
3.3. Алгебраические модели турбулентных тепловых потоков	155
3.4. Вторые моменты пульсаций скорости и температуры в однородном сдвиговом потоке.	160
Глава 4. Столкновения частиц в турбулентном потоке	166
4.1. Частота столкновений монодисперсных частиц в изотропной турбулентности.	167

4.2. Частота столкновений при совместном действии турбулентности и градиента осредненной скорости	180
4.3. Столкновения частиц в анизотропном турбулентном потоке	182
4.4. Граничные условия для дисперсной фазы с учетом столкновений частиц	190
4.5. Влияние столкновений на турбулентные напряжения частиц в однородном сдвиговом потоке	192
4.6. Влияние столкновений на движение частиц в вертикальном канале	196
Глава 5. Относительная дисперсия и кластеризация монодисперсных частиц в однородной турбулентности	204
5.1. Кинетическое уравнение для двухточечной ФПВ относительной скорости пары частиц	206
5.2. Уравнения для двухточечных моментов относительной скорости пары частиц	211
5.3. Статистические свойства стационарной суспензии частиц в изотропной турбулентности	214
5.4. Влияние эффекта аккумуляции на частоту столкновений частиц	234
5.5. Относительная дисперсия двух частиц в изотропной турбулентности	238
Глава 6. Столкновения и аккумуляция бидисперсных частиц в однородной турбулентности	248
6.1. Частота столкновений бидисперсных частиц в изотропной турбулентности	248
6.2. Частота столкновений частиц при совместном действии турбулентности и силы тяжести	255
6.3. Столкновения бидисперсных частиц в однородном анизотропном турбулентном потоке	257
6.4. Вертикальное движение бидисперсной смеси частиц	266
6.5. Уравнения для двухчастичной ФПВ и ее моментов	270
6.6. Эффект аккумуляции и его влияние на частоту столкновений бидисперсных частиц в изотропной турбулентности	277
Список литературы	282

Предисловие

Двухфазные дисперсные течения встречаются во многих природных и технических условиях и практически всегда такие течения являются турбулентными. В настоящее время двухфазные турбулентные течения представляют собой один из наиболее интенсивно развивающихся разделов механики и теплообмена. Целью данной книги является развитие теории и разработка континуального статистического метода моделирования гидродинамики и теплообмена в двухфазных дисперсных турбулентных течениях на основе кинетических уравнений для функции плотности вероятности (ФПВ) скорости и температуры частиц дисперсной фазы. Основные теоретические проблемы, рассмотренные в книге, состоят в исследовании механизмов взаимодействия частиц с турбулентными вихрями несущей сплошной среды (жидкости) и столкновений частиц друг с другом в турбулентных потоках. Особое внимание уделяется явлению аккумуляции (кластеризации) частиц в пристеночной и однородной турбулентности.

Статистический подход на основе функций распределения в фазовом пространстве является мощным инструментом построения теоретических моделей в различных областях физики: молекулярная теория газов и жидкостей (уравнение Больцмана и цепочка уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда), движение броуновских частиц (уравнение Фоккера–Планка), физика плазмы (кинетическое уравнение Власова), теория коагуляции (уравнение Смолуховского–Мюллера) и т.д. Этот метод нашел применение и для развития теории дисперсных турбулентных течений в работах И. В. Деревича, В. И. Кляцкина, Т. Эльперина, M. W. Reeks, O. Simonin, K. E. Nyland, D. C. Swailes, J. Pozorski, J.–P. Minier, R. V. R. Pandya, F. Mashayek, L. X. Zhou и авторов настоящей книги. Все эти работы опубликованы в периодической печати. Однако в известных монографиях (например, Шрайбер и др., 1987; Gorbis & Spokoyny, 1995; Crowe *et al.*, 1998; Вараксин, 2003), посвященных двухфазным турбулентным течениям, статистический метод моделирования на основе функций распределений практически не нашел отражения.

Представленная книга является первой монографией, посвященной последовательному изложению статистических моделей движения, теплообмена, дисперсии и аккумуляции частиц в турбулентной жидкости на основе функций распределения. Основу книги составляют полные авторы результаты, однако также достаточно полно отражены наиболее значительные достижения других исследователей в области построения статистических моделей дисперсных турбулентных течений.

В книге показано, как решаются различные физические задачи, связанные с движением, теплообменом, дисперсией и аккумуляцией

инерционных частиц, при помощи статистических моделей, основанных на одноточечной и двухточечной ФПВ. Одной из главных задач книги является также развитие рациональных подходов для моделирования явления аккумуляции (кластеризации) частиц в неоднородных и однородных турбулентных потоках. В качестве примеров приложения представленных статистических моделей рассматривается поведение частиц в изотропной, однородной сдвиговой и пристеночной турбулентности. Естественно, в книге нашли отражение далеко не все вопросы, связанные с двухфазными дисперсными течениями, что объясняется невозможностью в рамках одной монографии охватить все аспекты такой сложной проблемы.

Во Введении рассмотрены теоретические проблемы, основные направления и современные методы моделирования двухфазных дисперсных турбулентных течений.

Глава 1 носит вводный характер. В ней приведены характеристики однородной изотропной турбулентности и показано поведение частиц в изотропной турбулентной жидкости.

Глава 2 занимает центральное место, так в ней описывается метод построения кинетического уравнения для одноточечной (одночастичной) ФПВ распределения скорости частиц в турбулентной жидкости, моделируемой гауссовым случайным процессом. Полученное кинетическое уравнение используется для построения континуальных транспортных (дифференциальных) и алгебраических моделей для расчета гидродинамических характеристик (моментов) дисперсной фазы. В качестве примеров приложения представленных моделей рассматривается поведение частиц в однородном сдвиговом слое, пристеночной области турбулентного потока и вертикальном канале.

В главе 3 рассматривается теплообмен частиц, находящихся в градиентном турбулентном потоке. Развиваемый в данной главе статистический метод моделирования движения и теплообмена дисперсной среды основан на кинетическом уравнении для совместной ФПВ распределений скорости и температуры частиц. Представлены континуальные транспортные и алгебраические модели для расчета теплообмена в дисперсной фазе.

Излагаемый в главе 4 метод моделирования столкновений частиц в турбулентных потоках основан на предположении, что совместная ФПВ скоростей жидкости и частиц является коррелированным гауссовым распределением. Для учета анизотропии пульсаций скоростей частиц предложено обобщение известного в кинетической теории газов метода Грэда с целью учета коррелированности движения сталкивающихся частиц. Представленные статистические модели позволяют получить аналитические зависимости для частоты столкновений частиц и «столкновительных членов» в транспортных уравнениях для моментов дисперсной фазы, однако не учитывают эффект аккумуляции частиц.

Глава 5 посвящена статистическому описанию относительного движения двух одинаковых частиц в однородной изотропной турбулентности. Описание относительного движения частиц требует привлечения двухточечных статистических характеристик турбулентности. Представленный подход основан на кинетическом уравнении для ФПВ относительной скорости пары частиц и развивает изложенный в главах 2 и 3 одноточечный (одночастичный) статистический метод на двухточечный (двухчастичный). Явление кластеризации в однородной турбулентности интерпретируется как результат миграции частиц под действием силы турбофореза в пространстве относительного движения пары частиц. Эта сила стремится уменьшить расстояние между частицами, т.е. вызывает притяжение частиц друг к другу вследствие их взаимодействия с турбулентными вихрями.

В главе 6 рассматривается поведение бидисперсной системы, состоящей из частиц двух сортов, в однородном турбулентном потоке. Анализ бидисперсной смеси имеет принципиальное значение, так как легко обобщается на общий случай полидисперсной системы частиц. Для описания характеристик дисперсной фазы привлекаются два подхода, расширяющие представленные в 4-ой и 5-ой главах статистические модели на случай бидисперсных частиц.

В книгу вошли результаты, полученные при поддержке грантов РФФИ 97-01-00398, 99-02-17001, 02-02-16520, 05-08-01292. Издание книги поддержано грантом РФФИ 06-08-06008.

Введение

Теоретическому и экспериментальному исследованию двухфазных дисперсных турбулентных течений посвящены книги Шрайбера и др. (1987), Zhou (1993), Волкова и др. (1994), Gorbis & Spokoyny (1995), Crowe *et al.* (1998), Вараксина (2003) и обзоры Eaton & Fessler (1994), Elghobashi (1994), McLaughlin (1994), Crowe *et al.* (1996), Simonin (1996), Зайчика и Першукова (1996), Loth (2000), Sommerfeld (2000), Mashayek & Pandya (2003). В этих книгах и обзорах освещены многие вопросы, связанные с гидродинамикой и теплообменом дисперсных турбулентных течений. В настоящей книге рассматривается движение, теплообмен, дисперсия и аккумулярование небольших тяжелых частиц в турбулентном потоке без учета обратного влияния (модуляции) частиц на турбулентность. Таким образом, турбулентные характеристики сплошной среды считаются известными и не зависящими от присутствия дисперсной фазы. Частицы считаются небольшими по сравнению с пространственным масштабам турбулентности и тяжелыми, если плотность их материала много больше плотности несущей сплошной среды. Движение небольших тяжелых частиц в турбулентном потоке встречается во многих природных явлениях и технологических процессах. Распространение атмосферных аэрозолей, формирование дождевых капель, эволюция кучевых облаков и динамика песчаных бурь представляют примеры природных явлений. Примерами технологических процессов являются горение распыленного твердого и жидкого топлива, сепарация капель и аэрозолей в циклонах, пневмотранспорт угольной пыли и т.д.

Расчет двухфазного течения должен включать моделирование переноса массы, импульса и тепла для каждой из фаз, а также межфазного взаимодействия. Основные принципиальные трудности, возникающие при построении теории двухфазных дисперсных турбулентных потоков, связаны с турбулентным характером движения среды и взаимодействием частиц между собой и с ограничивающими поверхностями. Прежде всего нужно отметить, что к настоящему времени далеко от завершения даже построение теории однофазных турбулентных потоков, хотя для описания таких течений предложен целый ряд достаточно эффективных моделей и расчет многих из них не вызывает принципиальных сложностей. Несмотря на то, что первая работа по теории дисперсных турбулентных течений появилась относительно давно (Баренблатт, 1953), интенсивное развитие этой области механики и теплообмена началось только в последние 20 лет. Основные теоретические проблемы, возникающие при моделировании двухфазных дисперсных турбулентных течений по сравнению с однофазными, связаны со следующими физическими процессами: взаимодействием частиц (капель, пузырьков) с турбулентным вихрями сплошной фазы; взаимодействием

частиц друг с другом в результате столкновений; эволюцией спектра частиц по размерам вследствие горения, фазовых переходов, коагуляции или дробления; влиянием турбулентных флуктуаций на скорости гетерогенного горения и фазовых переходов; взаимодействием частиц с ограничивающей поток поверхностью и осаждением; обратным влиянием частиц на турбулентность; дисперсией, аккумулярованием и флуктуациями концентрации частиц. Как уже было сказано, в книге не будет анализироваться проблема обратного влияния частиц на турбулентность, что допустимо при небольшой массовой концентрации дисперсной фазы в потоке. Кроме того, также не будет рассматриваться эволюция спектра частиц по размерам.

Существующие методы расчета двухфазных дисперсных турбулентных течений могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся работы, основанные на *лагранжевом траекторном* описании дисперсной фазы — решении уравнений движения и энергии вдоль траекторий отдельных частиц. Учет в рамках такого подхода случайного характера движения частиц, обусловленного взаимодействием с турбулентными вихрями несущего потока, в результате интегрирования динамических стохастических уравнений типа Ланжевена вдоль индивидуальных траекторий с последующим осреднением решений по ансамблю начальных данных приводит к существенному увеличению объема вычислений, т.к. для получения статистически достоверной информации необходимо использовать достаточно представительный ансамбль реализаций. Детерминированное лагранжево описание движения и теплообмена дисперсной фазы в турбулентном потоке на основе решения уравнений только для средних величин, т.е. без учета взаимодействия со случайными полями пульсаций скорости и температуры сплошной фазы, может быть оправданным (хотя и не всегда) только для очень инерционных частиц, время релаксации которых намного больше интегрального масштаба турбулентности и которые поэтому слабо вовлекаются в турбулентное движение. С уменьшением размера частиц репрезентативное число реализаций должно возрастать, т.к. увеличивается вклад взаимодействия частиц с вихрями все меньших размеров. Трудоемкость динамического лагранжева моделирования в значительной степени увеличивается в высококонцентрированных дисперсных потоках вследствие возрастания «запутанности» траекторий из-за столкновений частиц, а также при изменении числа (рождении или исчезновении) частиц в результате коагуляции, дробления, спонтанного зародышеобразования и т.д. Лагранжев траекторный подход позволяет получать детальную информацию о взаимодействии частиц с турбулентными вихрями, со стенками и друг с другом, однако требует очень больших затрат времени при расчете сложных течений, встречающихся в природных или промышленных условиях.

Другой метод моделирования основан на *эйлеровом континуальном* описании обеих фаз — на так называемых *двухжидкостных моделях* в рамках механики взаимопроникающих гетерогенных сред.

Существенным преимуществом эйлерова континуального подхода по сравнению с лагранжевым траекторным моделированием является использование балансных уравнений одного типа для обеих фаз и соответственно единого алгоритма решения всей системы уравнений. Кроме того, описание динамики очень мелких частиц не вызывают никаких принципиальных трудностей, т.к. при стремлении массы частицы к нулю осуществляется предельный переход к задаче о турбулентной диффузии безынерционной (пассивной) примеси. И, наконец, учет столкновений и изменения числа частиц в рамках континуального подхода не приводит к такому значительному росту объема и усложнению вычислений, как при лагранжевом моделировании.

В целом, лагранжев траекторный и эйлеров континуальный методы моделирования дополняют друг друга, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки и, следовательно, свои области приложения. Лагранжев метод применим для существенно неравновесных течений (крупные инерционные частицы, разреженные дисперсные среды), а эйлеров метод справедлив в условиях, близких к равновесным (мелкие малоинерционные частицы, концентрированные дисперсные среды). Поскольку дисперсная фаза обладает одновременно свойствами континуума и дискретных частиц, ситуация с этими двумя подходами несколько напоминает известный дуализм «волна-частица» в микромире. Поэтому Pialat *et al.* (2005) предложили гибридный лагранжево-эйлеров метод, сочетающий детальность лагранжева и эффективность эйлерова подходов к описанию дисперсной фазы.

Наиболее точная и детальная информация о структуре турбулентного двухфазного потока может быть получена на основе применения метода прямого численного моделирования (*DNS*) для несущей сплошной среды в сочетании с лагранжевым стохастическим подходом для дисперсной фазы. При прямом численном моделировании описывается весь спектр турбулентных вихрей, включая мелкомасштабные, ответственные за диссипацию энергии турбулентности. Однако *DNS* требует больших затрат времени даже при привлечении самых быстродействующих компьютеров и поэтому используется, главным образом, как численный эксперимент для тестирования или калибровки более экономичных методов расчета турбулентных течений. В методе крупных вихрей (*LES*) производится прямое моделирование только крупных вихрей, пространственный масштаб которых превышает размер численной сетки, а мелкомасштабные (подсеточные) моды оказываются вне пределов разрешимости и описываются полуэмпирическим путем. *LES* применим для моделирования поведения частиц, время динамической релаксации которых много больше временного масштаба турбулентности (Armenio *et al.*, 1999; Boivin *et al.*, 2000; Yamamoto *et al.*, 2001; Kuerten & Vreman, 2005; Fede & Simonin, 2006). Это ограничение вытекает из требования, чтобы вклад подсеточных флуктуаций (т.е. мелкомасштабной турбулентности) в статистику дисперсной фазы был пренебрежимо мал и определяющую роль играло взаимодействие

частиц с крупномасштабными энергосодержащими турбулентными вихрями. Однако даже применение *LES* для сплошной среды в сочетании с лагранжевым стохастическим подходом для дисперсной фазы все равно может оказаться слишком дорогостоящим инструментом для практических приложений. Поэтому в ряде работ (Druzhinin & Elghobashi, 1998; Ferry & Balachandar, 2001, 2005; Pandya & Mashayek, 2002a; Rani & Balachandar, 2003; Kaufman *et al.*, 2004; Moreau *et al.*, 2005) развиваются перспективные методы, основанные на использовании *DNS* и *LES* в рамках континуального двухжидкостного подхода. Эффективным базисом для развития прямых континуальных и комбинированных лагранжево-эйлеровых методов моделирования дисперсных течений представляется теоретический формализм, состоящий в разложении поля скорости частиц в турбулентном потоке на «коррелированную» и «квазиброуновскую» составляющие скорости (Simonin *et al.*, 2002; Février *et al.*, 2005).

В книге представлены континуальные модели движения, теплообмена, дисперсии и аккумуляирования частиц в турбулентных потоках, основанные на функции плотности вероятности (ФПВ). Статистический подход, базирующийся на кинетических уравнениях для плотностей вероятности распределений скоростей, температур и других представляющих интерес характеристик частиц дисперсной фазы, является наиболее последовательным методом построения континуальных моделей, т.е. вывода системы уравнений гидродинамики и теплопереноса для дисперсной фазы. Впервые такой подход для описания псевдотурбулентного течения дисперсной среды, флуктуации параметров которой обусловлены случайной конфигурацией частиц, применил, по-видимому, Buyevich (1971) на основе классического уравнения Фоккера–Планка. Введение ФПВ позволяет получить статистическое описание ансамбля частиц вместо динамического описания отдельных частиц на основе уравнений движения и теплопереноса типа Ланжевена. Естественно, при статистическом моделировании на основе ФПВ происходит некоторая потеря информации в отношении индивидуальных особенностей поведения отдельных частиц. Однако эта «неполнота» динамической информации в поведении отдельных частиц компенсируется увеличением информации о статистических закономерностях движения и теплообмена коллектива частиц (дисперсной фазы в целом). Применение статистического метода на основе кинетических уравнений позволяет единым образом описывать как взаимодействия частиц с турбулентностью, так и межчастичное взаимодействие в результате столкновений. Взаимодействие частиц с турбулентными вихрями моделируется дифференциальным оператором второго порядка (типа Фоккера–Планка), а взаимодействия частиц друг с другом при столкновениях описывается интегральным оператором (типа Больцмана). Однако для большинства практических целей решение кинетического уравнения не только очень дорого с вычислительной точки зрения, но и не является необходимым, поскольку первые несколько

моментов ФПВ достаточны для описания основных макроскопических свойств течения. Для построения замкнутой системы моментных уравнений (обрыва бесконечной цепочки уравнений для статистических моментов ФПВ) в книге привлекаются различные подходы, в том числе и классические методы Чепмена–Энскога и Грэда, на которых основаны все известные гидродинамические модели в механике сплошной среды.

При моделировании движения частиц в разреженной дисперсной среде, т.е. при небольшой объемной концентрации дисперсной фазы, основное внимание должно уделяться взаимодействию частиц с турбулентными вихрями несущего потока, поскольку роль взаимодействия частиц между собой незначительна. Однако с повышением концентрации и размера частиц возрастает вклад межчастичных взаимодействий в перенос импульса и энергии дисперсной фазы. Хаотическое движение частиц, обусловленное их взаимодействием, получило название *псевдотурбулентности* (чтобы отличить от турбулентного движения частиц, связанного с их вовлечением в турбулентное движение несущего потока). Причиной возникновения псевдотурбулентных флуктуаций может явиться как гидродинамическое взаимодействие между частицами, реализуемое посредством обмена импульсом и энергией со случайными полями скорости и давления окружающей среды (Buyevich, 1972b; Koch, 1990), так и непосредственное взаимодействие в результате столкновений. С ростом концентрации и размера частиц роль обмена импульсом и энергией между частицами в результате столкновений по сравнению с гидродинамическим взаимодействием возрастает. В концентрированных дисперсных средах определяющую роль в формировании статистических свойств системы играют межчастичные столкновения, и теоретический анализ этой проблемы подобен аналогичной кинетической проблеме в теории молекулярного движения газа (Chapman & Cowling, 1970; Lun *et al.*, 1984; Jenkins & Richman, 1985; Ding & Gidaspow, 1990). Процессы взаимодействия частиц с турбулентными вихрями и межчастичных столкновений можно считать статистически независимыми только в случае очень инерционных частиц, время динамической релаксации которых много больше характерного времени взаимодействия с турбулентными вихрями и поэтому их относительное движение некоррелировано и аналогично хаотическому движению молекул. В случае малоинерционных частиц необходимо учитывать взаимное влияние взаимодействий «частица-турбулентность» и «частица-частица».

Как уже отмечалось, вычислительные трудности лагранжева траекторного моделирования резко возрастают с увеличением концентрации дисперсной фазы. Это связано, в первую очередь, с необходимостью одновременного расчета траекторий очень большого числа частиц, участвующих в разыгрываемой ситуации. Эффективный способ преодоления этих трудностей был предложен Oesterlé & Petitjean (1991, 1993), Sommerfeld & Zivkovic (1992), Sommerfeld (1999) путем замены коллектива сталкивающихся частиц моделированием движения образцовой частицы с введением плотности вероятности соударений с

фиктивными (виртуальными) частицами. Эффективным подходом для моделирования соударений частиц является также применение метода Монте–Карло (Такака *et al.*, 1991; Fede *et al.*, 2002; Morgeau *et al.*, 2004). Однако и в этих подходах с увеличением концентрации необходимое количество расчетных траекторий для получения статистически достоверного ансамбля реализаций должно возрастать. Поэтому область применения эйлерова континуального метода моделирования расширяется с ростом концентрации дисперсной фазы, когда увеличивается частота межчастичных столкновений.

Образование *кластеров* — компактных областей со значительно повышенной концентрацией дисперсной фазы, окруженных зонами с низкой концентрацией — представляет собой одно из наиболее интересных и сложных явлений, обусловленных взаимодействием частиц с турбулентными вихрями (Squires & Eaton, 1991c). Следует различать два класса течений, в которых могут образовываться кластеры: неоднородные и однородные турбулентные потоки. Явление кластеризации (аккумуляции) тяжелых частиц в неоднородных турбулентных потоках объясняется их турбулентной миграцией (*турбофорезом*) из области с высокой интенсивностью турбулентных пульсаций скорости в зону с низкой степенью турбулентности (Carorloni *et al.*, 1975; Reeks, 1983). Однако эффект кластеризации инерционных частиц имеет место и в однородной турбулентности, где отсутствуют градиенты пульсаций скорости несущего потока и, следовательно, механизм транспорта частиц под действием турбофореза в его традиционном понимании не имеет места. Образующиеся кластерные структуры могут иметь меньшую фрактальную размерность, чем размерность физического пространства (Вес 2003, 2005). Кластеризация частиц в однородной турбулентности не учитывается в большинстве известных теоретических моделей, предложенных для расчета столкновений, дисперсии, седиментации и коагуляции частиц в турбулентных потоках. Эти модели, как правило, основаны на предположении, что частицы случайным образом равномерно распределены в пространстве, и, следовательно, эффект аккумуляции полностью игнорируется. Однако, несмотря на стохастическую природу турбулентности, распределение инерционных частиц в турбулентных потоках не является случайным и эффект аккумуляции в существенной степени обусловлен инерцией частиц при их взаимодействии с когерентными вихревыми структурами турбулентной сплошной среды.

Для иллюстрации явления аккумуляции на рис. В.1 представлены результаты прямого численного моделирования (Reade & Collins, 2000) мгновенных полей распределения частиц в однородной изотропной турбулентности при различных значениях числа Стокса St , характеризующего инерционность частиц и равного отношению времени релаксации частицы к колмогоровскому временному масштабу. Локальное повышение концентрации тяжелых частиц наблюдается в областях с малой завихренностью вследствие действия центробежной

силы и обусловлено, главным образом, взаимодействием частиц с мелкомасштабными вихревыми структурами. Поэтому наиболее явственно эффект кластеризации проявляется при совпадении времени динамической релаксации частиц и временного колмогоровского микромасштаба турбулентности.

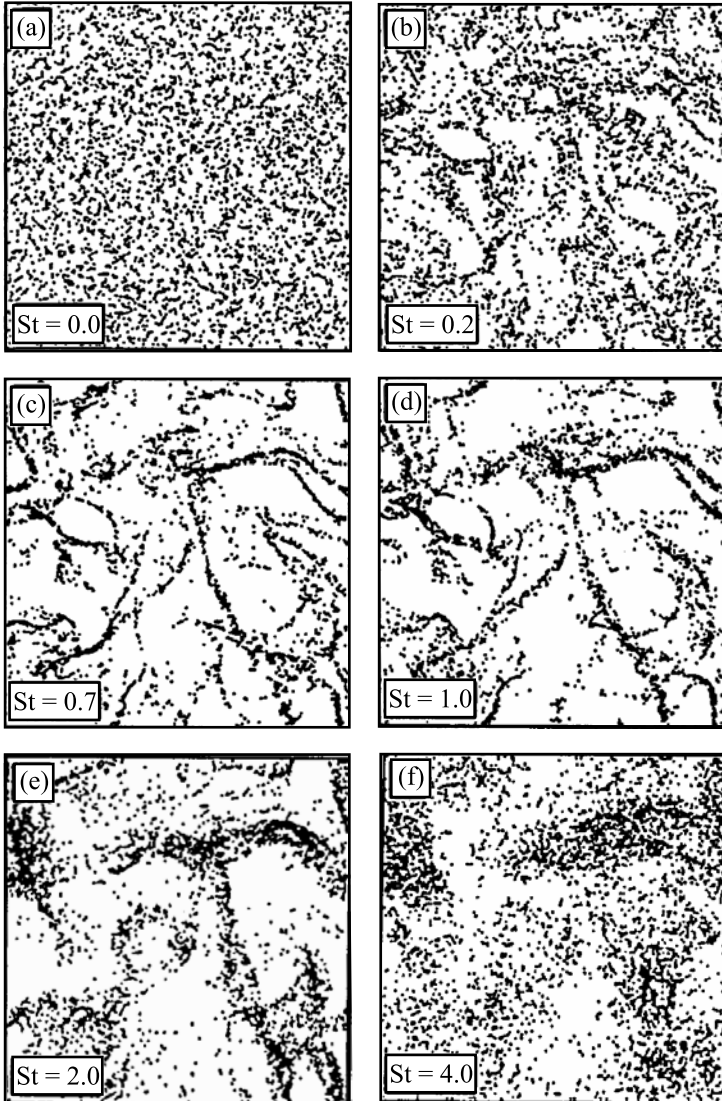


Рис. 1. Эффект аккумуляции частиц в однородной изотропной турбулентности (Reade & Collins, 2000)

Явления аккумуляции и образования кластеров инерционных частиц в результате турбулентных флуктуаций концентрации играют важную роль в самых различных физических процессах: от горения твердого и жидкого топлива (Takeuchi & Douhara, 2005) до формирования планет из туманности (Cuzzi *et al.*, 2001). Особенно существенную роль эффект аккумуляции частиц играет в атмосферных процессах при больших числах Рейнольдса. По-видимому, только учет этого эффекта при расчете скорости коагуляции позволяет объяснить феномен быстрого роста капель в дождевых облаках (Pinsky & Khain, 1997; Falkovich *et al.*, 2002), а также отклонение от экспоненциального закона *Beer-Lambert* для затухания излучения в запыленной среде (Shaw *et al.*, 2002). Поэтому одной из главных задач книги является развитие рациональных подходов для описания аккумуляции частиц в неоднородных и однородных турбулентных потоках. В частности, как показано в Marchioli & Soldati (2002) и других работах, аккумуляция (*segregation*) инерционных частиц в пристеночных течениях возникает благодаря их взаимодействию с когерентными вихревыми структурами. Следовательно, интересно выяснить, могут ли континуальные модели воспроизвести и эффективным образом учесть эффекты взаимодействия частиц с когерентными структурами.

Основная цель данной книги состоит в том, чтобы показать, как решаются различные физические задачи, связанные с движением инерционных частиц, при помощи статистических моделей, основанных на *одноточечной* и *двухточечной* ФПВ. Следует отметить, что существует целый ряд явлений (например, аккумуляция и повышение скорости седиментации частиц в однородной турбулентности, влияние частиц на диссипацию турбулентной энергии), которые в принципе не могут быть описаны на основе традиционных одноточечных эйлеровых моделей. Очевидно, что с ростом инерционности увеличивается размер области, о которой частица сохраняет «память» в результате взаимодействия с турбулентной жидкостью. Поэтому применение двухточечных моделей для описания статистики инерционных частиц даже более актуально, чем в теории однофазной турбулентности. В качестве главного критерия адекватности представленных моделей принимаются согласие с известными из литературы результатами численного моделирования на основе *DNS* или *LES* для сплошной фазы в сочетании с лагранжевым траекторным методом для дисперсной фазы. Такой подход дает мощный инструмент для верификации моделей, поскольку численные эксперименты в отличие от физических позволяют выделить исследуемое явление в «чистом» виде без влияния усложняющих и искажающих факторов.

Глава 1

ДВИЖЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Наиболее простым и изученным типом турбулентного течения является статистически однородная изотропная стационарная турбулентность в несжимаемой жидкости. Поэтому предлагаемые новые модели турбулентного переноса импульса и тепла, прежде всего, должны апробироваться на изотропной турбулентности. Очевидно, что применительно к крупномасштабным вихревым структурам понятие изотропной турбулентности представляет собой математическую идеализацию, так как такие течения практически не встречаются в природных условиях или технических устройствах. Однако хорошо известно, что поля мелкомасштабных флуктуаций скорости и температуры при больших числах Рейнольдса могут считаться практически однородными и изотропными, т.е. рассматриваться в рамках понятия локально изотропной турбулентности (Монин и Яглом, 1967). Мелкомасштабные вихревые структуры ответственны за диссипацию турбулентной энергии, а также играют решающую роль в явлении аккумуляции (*кластеризации*) частиц в турбулентном потоке. Таким образом, исследование изотропной турбулентности имеет фундаментальное значение как в однофазных, так и в двухфазных течениях.

1.1. Характеристики однородной изотропной турбулентности

В настоящем разделе будут представлены некоторые характеристики однородной изотропной стационарной турбулентности в несжимаемой жидкости, необходимые в дальнейшем для описания статистического поведения частиц. При этом нам потребуются как *лагранжевы*, так и *эйлеровы* характеристики турбулентности.

Лагранжевы корреляции отражают связь между скоростями и другими характеристиками турбулентности в точках, расположенных вдоль траекторий движения элементов сплошной среды (жидких частиц). Так, лагранжев одночастичный (одноточечный) корреляционный

момент пульсаций скорости сплошной среды (жидкости) определяется соотношением

$$B_L{}_{ij}(\tau) = \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{R}(t - \tau), t - \tau) \mid \mathbf{R}(t) = \mathbf{x} \rangle = \langle u'_i u'_j \rangle \Psi_L(\tau), \quad \langle u'_i u'_j \rangle = u'^2 \delta_{ij}, \quad (1.1.1)$$

где \mathbf{R} — вектор траектории жидкой частицы, $\Psi_L(\tau)$ — лагранжева автокорреляционная функция, $\langle u'_i u'_j \rangle$ — рейнольдсовы турбулентные напряжения в сплошной среде, $u'^2 \equiv \langle u'_n u'_n \rangle / 3$ — интенсивность пульсаций скорости жидкости. Здесь и в дальнейшем угловые скобки обозначают осреднение по ансамблю реализаций турбулентных полей скорости и температуры сплошной среды.

Тензор турбулентной диффузии жидких частиц выражается через лагранжев корреляционный момент как

$$D_{ij}(\tau) = \int_0^\tau B_L{}_{ij}(\xi) d\xi,$$

откуда асимптотическое выражение при больших временах имеет вид

$$D_{ij} = D_t \delta_{ij}, \quad D_t = u'^2 T_L, \quad (1.1.2)$$

где D_t — коэффициент турбулентной диффузии безынерционной примеси, $T_L \equiv \int_0^\infty \Psi_L(\tau) d\tau$ — лагранжев интегральный временной масштаб.

Наиболее часто используемой в литературе аппроксимацией для автокорреляционной функции является экспоненциальная зависимость

$$\Psi_L(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{T_L}\right). \quad (1.1.3)$$

Формула (1.1.3) хорошо описывает экспериментальные данные и результаты прямого численного моделирования при относительно больших числах Рейнольдса за исключение области малых значений τ . Поведение автокорреляционной функции (1.1.3) в окрестности $\tau = 0$ является некорректным, поскольку $\Psi'_L(0) \neq 0$.

В изотропной турбулентности лагранжев интегральный масштаб T_L может быть выражен через кинетическую энергию турбулентности $k \equiv \langle u'_n u'_n \rangle / 2$ и скорость ее диссипации $\varepsilon \equiv \nu \langle \partial u'_n / \partial x_k \cdot \partial u'_n / \partial x_k \rangle$ при помощи соотношения $T_L = 4k / 3C_0 \varepsilon$, где C_0 — величина, получившая название постоянной Колмогорова. Величина C_0 зависит от числа Рейнольдса при конечных его значениях, однако является универсальной константой в пределе больших чисел Рейнольдса $C_{0\infty}$. Данные прямого численного моделирования, приведенные на рис. 1.1.1, свиде-

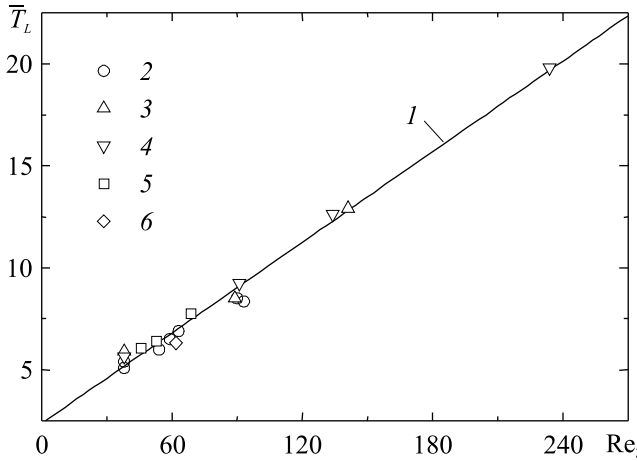


Рис. 1.1.1. Зависимость лагранжева интегрального масштаба от числа Рейнольдса: 1 — (1.1.4), 2 — Yeung & Pope (1989), 3 — Yeung (1997), 4 — Yeung (2001), 5 — Février *et al.* (2001), 6 — Mazzitelli & Lohse (2004)

тельствует, что постоянная Колмогорова может быть аппроксимирована зависимостью

$$C_0 = \frac{C_{0\infty} \text{Re}_\lambda}{\text{Re}_\lambda + C_1}, \quad C_{0\infty} = 7, \quad C_1 = 32,$$

а лагранжев интегральный масштаб турбулентности, отнесенный к колмогоровскому временному микромасштабу, описан линейной зависимостью от числа Рейнольдса (рис. 1.1.1)

$$\bar{T}_L = \frac{T_L}{\tau_k} = \frac{2(\text{Re}_\lambda + C_1)}{15^{1/2} C_{0\infty}}. \quad (1.1.4)$$

Асимптотическое значение постоянной Колмогорова при $\text{Re}_\lambda \rightarrow \infty$ в соответствии с Sawford (1991) выбрано равным 7. Здесь $\text{Re}_\lambda \equiv (15u'^4/\varepsilon\nu)^{1/2}$ — число Рейнольдса, основанное на тейлоровом пространственном микромасштабе; $\tau_k \equiv (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ — колмогоровский временной масштаб; ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

С целью описания Ψ_L во всем диапазоне изменения τ , включая окрестность $\tau = 0$, может быть привлечена двухмасштабная би-экспоненциальная аппроксимация (Sawford, 1991)

$$\Psi_L(\tau) = \frac{1}{2\Re} \left[(1 + \Re) \exp\left(-\frac{2\tau}{(1 + \Re)T_L}\right) - (1 - \Re) \exp\left(-\frac{2\tau}{(1 - \Re)T_L}\right) \right],$$

$$\Re = (1 - 2z^2)^{1/2}, \quad z = \frac{\tau T}{T_L}, \quad (1.1.5)$$

где τ_T — тейлоров временной дифференциальный масштаб. Отметим, что при $2z^2 > 1$ (1.1.5) представляется в виде

$$\Psi_L(\tau) = \frac{1}{\aleph} \exp\left(-\frac{\tau}{z^2 T_L}\right) \left[\aleph \cos\left(\frac{\aleph \tau}{z^2 T_L}\right) + \sin\left(\frac{\aleph \tau}{z^2 T_L}\right) \right],$$

$$\aleph = (2z^2 - 1)^{1/2}.$$

Тейлоров временной масштаб определяется выражением

$$\tau_T = \left(\frac{2\text{Re}_\lambda}{15^{1/2} a_0}\right)^{1/2} \tau_k. \quad (1.1.6)$$

Величина a_0 в (1.1.6) представляет собой амплитуду флуктуаций ускорения в изотропной турбулентности согласно соотношению $\langle a_i a_j \rangle = a_0 \varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2} \delta_{ij}$. В соответствии с данными прямого численного моделирования (Yeung & Pope, 1989; Vedula & Yeung, 1999; Goton & Fukayama, 2001) для малых и умеренных чисел Рейнольдса, экспериментальными данными Voth *et al.* (2002) для осевой и поперечной компонент флуктуаций ускорения и результатами экспериментов (Voth *et al.*, 1998) при относительно больших числах Рейнольдса (в диапазоне от 900 до 2000) зависимость a_0 от Re_λ аппроксимируется формулой (рис. 1.1.2)

$$a_0 = \frac{a_{01} + a_{0\infty} \text{Re}_\lambda}{a_{02} + \text{Re}_\lambda}, \quad a_{01} = 11, \quad a_{02} = 205, \quad a_{0\infty} = 7. \quad (1.1.7)$$

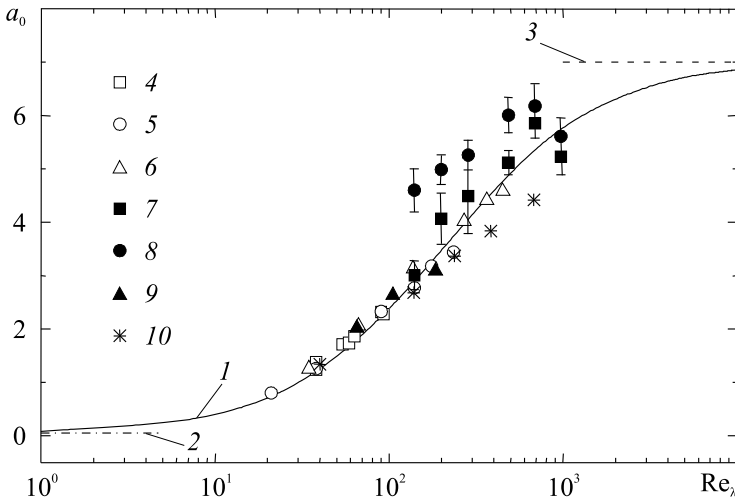


Рис. 1.1.2. Зависимость a_0 от числа Рейнольдса: 1 — (1.1.7); 2 — $a_0 = 0,052$ (Vedula & Yeung, 1999); 3 — $a_0 = 7$ (Voth *et al.*, 1998); 4 — Yeung & Pope (1989); 5 — Vedula & Yeung (1999); 6 — Goton & Fukayama (2001); 7 — осевая компонента (Voth *et al.*, 2002); 8 — поперечная компонента (Voth *et al.*, 2002); 9 — Вес *et al.* (2006); 10 — Yeung *et al.* (2006)

Эйлеровы корреляции выражают связь между параметрами турбулентной среды в фиксированных точках пространства. Так, эйлеров пространственно-временной корреляционный момент пульсаций скорости жидкости определяется как

$$B_{E\ ij}(\mathbf{r}, \tau) = \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t - \tau) \rangle.$$

Здесь и в дальнейшем эйлеровы корреляции определяются в системе координат, движущейся со средней скоростью среды. Общепринятым допущением является представление пространственно-временного корреляционного момента второго порядка в виде произведения пространственной и временной корреляций

$$\begin{aligned} B_{E\ ij}(\mathbf{r}, \tau) &= B_{ij}(\mathbf{r}) \Psi_E(\tau), \\ B_{ij}(\mathbf{r}) &= \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) \rangle, \quad B_{ij}(0) = u'^2 \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

где $B_{ij}(\mathbf{r})$ — эйлеров двухточечный одновременной корреляционный момент, а $\Psi_E(\tau)$ — эйлерова временная одноточечная автокорреляционная функция пульсаций скорости.

В однородной изотропной турбулентности любой тензор второго ранга может быть представлен в виде (Монин и Яглом, 1967)

$$M_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = M_{nn}(r, \tau) \delta_{ij} + [M_{ll}(r, \tau) - M_{nn}(r, \tau)] \frac{r_i r_j}{r^2}, \quad (1.1.9)$$

где M_{ll} и M_{nn} — продольная и поперечная по отношению к вектору \mathbf{r} компоненты тензора, $r \equiv |\mathbf{r}|$ — расстояние между двумя точками. Для *соленоидального* (бездивергентного) изотропного поля, которым является поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в несжимаемой жидкости, справедливо следующее соотношение между продольной и поперечной компонентами

$$M_{nn}(r, \tau) = M_{ll}(r, \tau) + \frac{r}{2} \frac{\partial M_{ll}(r, \tau)}{\partial r}. \quad (1.1.10)$$

В соответствии с (1.1.9) и (1.1.10) $B_{ij}(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\begin{aligned} B_{ij}(\mathbf{r}) &= u'^2 \left\{ G(r) \delta_{ij} + [F(r) - G(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} \right\}, \\ G(r) &= F(r) + \frac{r}{2} \frac{dF(r)}{dr}, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

где $F(r)$ и $G(r)$ — продольная и поперечная пространственные эйлеровы корреляционные функции.

Простейшими широко распространенными аппроксимациями эйлеровых пространственной и временной корреляционных функций являются экспоненциальные зависимости

$$F(r) = \exp\left(-\frac{r}{L}\right), \quad \Psi_E(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{T_E}\right), \quad (1.1.12)$$

характеризуемые интегральными пространственным и временным масштабами L и T_E . Соответствующая аппроксимации (1.1.12) поперечная пространственная корреляционная функция имеет вид

$$G(r) = \left(1 - \frac{r}{2L}\right) \exp\left(-\frac{r}{L}\right). \quad (1.1.13)$$

Как следует из (1.1.13), поперечная корреляционная функция становится отрицательной при больших значениях r . Этот «отрицательный хвост» возникает из требования сохранения массы согласно уравнению неразрывности.

Кроме корреляционных моментов, для описания турбулентных полей полезно ввести также так называемые структурные функции, характеризующие пространственные и временные инкременты (разности) скоростей или температур. Эйлера пространственная структурная функция второго порядка определяется соотношением

$$S_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \Delta u'_i(\mathbf{r}) \Delta u'_j(\mathbf{r}) \rangle = \langle (u'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u'_i(\mathbf{x}, t)) \times \\ \times (u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u'_j(\mathbf{x}, t)) \rangle = 2 \langle (u'_i u'_j) - B_{ij}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.1.14)$$

Для описания дисперсии пары жидких частиц вводятся лагранжевы двухчастичные (двухточечные) корреляционный момент и структурная функция

$$\mathbb{B}_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = \langle u'_i(\mathbf{R}_1(t), t) u'_j(\mathbf{R}_2(t - \tau), t - \tau) \rangle, \\ \mathbf{R}_1(t) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{R}_2(t) = \mathbf{x} + \mathbf{r}, \\ \mathbb{S}_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = \langle (u'_i(\mathbf{R}_2(t), t) - u'_i(\mathbf{R}_1(t), t)) (u'_j(\mathbf{R}_2(t - \tau), t - \tau) - \\ - u'_j(\mathbf{R}_1(t - \tau), t - \tau)) \rangle = 2 (B_{Lij}(\tau) - \mathbb{B}_{Lij}(\mathbf{r}, \tau)).$$

Лагранжев двухточечный корреляционный момент связан с лагранжевым одноточечным и эйлеровым двухточечным корреляционными моментами очевидными соотношениями

$$\mathbb{B}_{Lij}(\mathbf{0}, \tau) = B_{Lij}(\tau), \quad \mathbb{B}_{Lij}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = B_{ij}(\mathbf{r}). \quad (1.1.15)$$

Тензор относительной диффузии двух частиц сплошной среды может быть представлен как интеграл от лагранжевых двухточечных корреляций (Lundgren, 1981)

$$D_{ij}^r(\mathbf{r}, \tau) = 2 \int_0^\tau [B_{Lij}(\tau_1) - \mathbb{B}_{Lij}(\mathbf{r}, \tau_1)] d\tau_1 = \int_0^\tau \mathbb{S}_{Lij}(\mathbf{r}, \tau_1) d\tau_1. \quad (1.1.16)$$

Лагранжев двухточечный корреляционный момент представляется в виде (Алипченков и Зайчик, 2003; Zaichik & Alipchenkov, 2003)

$$\mathbb{B}_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = B_{Lij}(\tau) + [B_{ij}(\mathbf{r}) - B_{ij}(\mathbf{0})] \Psi_{Lr}(\tau|r), \quad (1.1.17)$$

где $\Psi_{Lr}(\tau|r)$ — лагранжева автокорреляционная функция, характеризующая относительное движение двух частиц, находящихся первоначально

чально на расстоянии r . Видно, что с учетом $\Psi_{Lr}(0) = 1$ выражение (1.1.17) удовлетворяет соотношениям (1.1.15).

Аппроксимация (1.1.17) приводит к представлению лагранжевой двухточечной структурной функции пульсаций скоростей в виде произведения

$$\mathbb{S}_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = S_{ij}(\mathbf{r}) \Psi_{Lr}(\tau|r), \quad (1.1.18)$$

откуда следует, что $\Psi_{Lr}(\tau|r)$ является лагранжевой автокорреляционной функцией инкремента пульсаций скоростей жидких частиц, отделенных расстоянием r .

Подстановка (1.1.18) в (1.1.16) приводит к следующей формуле для тензора относительной диффузии при больших временах:

$$D_{ij}^r(\mathbf{r}) = S_{ij}(\mathbf{r}) T_{Lr}, \quad (1.1.19)$$

где $T_{Lr} \equiv \int_0^{\infty} \Psi_{Lr}(\tau) d\tau$ — интегральный двухточечный временной масштаб, характеризующий инкремент пульсаций скоростей двух жидких частиц.

По аналогии с (1.1.3) автокорреляционная функция инкремента пульсаций скоростей может быть аппроксимирована экспоненциальной зависимостью

$$\Psi_{Lr}(\tau|r) = \exp\left(-\frac{\tau}{T_{Lr}}\right), \quad (1.1.20)$$

или подобно (1.1.5) описана двухмасштабной би-экспоненциальной зависимостью

$$\Psi_{Lr}(\tau) = \frac{1}{2\Re_r} \left[(1 + \Re_r) \exp\left(-\frac{2\tau}{(1 + \Re_r) T_L}\right) - (1 - \Re_r) \exp\left(-\frac{2\tau}{(1 - \Re_r) T_L}\right) \right], \quad (1.1.21)$$

$$\Re_r = (1 - 2z_r^2)^{1/2}, \quad z_r = \frac{\tau T_r}{T_{Lr}},$$

где τT_r — тейлоров временной дифференциальный масштаб относительной скорости двух жидких частиц.

Рассмотрим поведение структурной функции S_{ij} , коэффициента относительной диффузии D_{ij}^r и интегрального временного масштаба инкремента пульсаций скоростей T_{Lr} в вязком, инерционном и внешнем пространственных интервалах. Анализ проводится в рамках гипотез подобия Колмогорова для мелкомасштабной турбулентности (Монин и Яглом, 1967). Эти гипотезы устанавливают универсальность мелкомасштабной турбулентности, т.е. подразумевают независимость характеристик турбулентности в вязком и инерционном интервалах при больших числах Рейнольдса от крупномасштабных вихревых структур. Данное допущение справедливо только при пренебрежении перемежаемостью

турбулентности, обусловленной флуктуациями скорости диссипации турбулентной энергии (Монин и Яглом, 1967; Кузнецов и Сабельников, 1986; Поре, 2000).

В вязком интервале ($r \leq \eta$, где $\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ — колмогоровский пространственный микромасштаб) первые члены разложения в ряд Тейлора эйлеровых продольной и поперечной структурных функций имеют вид (Монин и Яглом, 1967)

$$S_{ll} = \frac{\varepsilon r^2}{15\nu}, \quad S_{nn} = \frac{2\varepsilon r^2}{15\nu}. \quad (1.1.22)$$

При малых r разность пульсаций скоростей в двух точках может быть представлена как линейная функция от вектора, соединяющего эти точки

$$\Delta u'_i(\mathbf{r}, \tau) = u'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \tau) - u'_i(\mathbf{x}, \tau) = \gamma_{ij}(\tau) r_j, \quad (1.1.23)$$

где $\gamma_{ij} \equiv \partial u'_i / \partial x_j$ — градиент пульсаций скорости. В изотропном линейном поле корреляционные функции тензоров деформации и вращения представляются в виде (Girimaji & Pore, 1990; Brunk *et al.*, 1998)

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ik}(\mathbf{x}, t) \sigma_{jn}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{\varepsilon}{20\nu} \left(\delta_{ij} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{jn} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\sigma}\right), \\ \sigma_{ij} &= \frac{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}{2}, \\ \langle \omega_{ik}(\mathbf{x}, t) \omega_{jn}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{\varepsilon}{12\nu} (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{jk}) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\omega}\right), \\ \omega_{ij} &= \frac{\gamma_{ij} - \gamma_{ji}}{2}. \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Как видно из (1.1.24), корреляционные функции деформации и вращения убывают экспоненциально с характерными временами τ_σ и τ_ω , пропорциональными колмогоровскому масштабу τ_k . Выражения для лагранжевых двухточечных корреляционных функций получаются из (1.1.23) и (1.1.24) в предположении, что распределения вектора расстояния между точками r_i и тензора градиента пульсаций скоростей γ_{ij} статистически независимы

$$\begin{aligned} S_{Lll} &= \frac{\varepsilon r^2}{15\nu} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\sigma}\right), \\ S_{Lnn} &= \frac{\varepsilon r^2}{4\nu} \left[\frac{1}{5} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\sigma}\right) + \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\omega}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

После подстановки (1.1.25) в (1.1.16) продольная и поперечная компоненты коэффициента относительной диффузии двух элементов сплошной среды принимает вид (Brunk *et al.*, 1997)

$$D_{ll}^r = \frac{\varepsilon \tau_\sigma r^2}{15\nu}, \quad D_{nn}^r = \frac{\varepsilon}{4\nu} \left(\frac{\tau_\sigma}{5} + \frac{\tau_\omega}{3} \right) r^2. \quad (1.1.26)$$

При $\tau_\omega = \tau_\sigma$ (1.1.26) согласуется с коэффициентом относительной диффузии, полученным для вязкого интервала в Lundgren (1981). С другой стороны, из (1.1.19) и (1.1.22) следует

$$D_{ll}^r = \frac{\varepsilon T_{Lr} r^2}{15\nu}, \quad D_{nn}^r = \frac{2\varepsilon T_{Lr} r^2}{15\nu}. \quad (1.1.27)$$

Из сопоставления (1.1.26) и (1.1.27) видно, что эти выражения совпадают при $T_{Lr} = \tau_\omega = \tau_\sigma$. Следовательно, в вязком интервале интегральный временной масштаб инкремента пульсаций скоростей T_{Lr} определяется как

$$T_{Lr} = \tau_\sigma = A_1 \tau_k. \quad (1.1.28)$$

Lundgren (1981) для постоянной A_1 теоретически получил значение $\sqrt{5}$, что хорошо согласуется со значением 2,3, определенным на основе прямого численного моделирования Girimaji & Pope (1990).

Далее рассмотрим поведение характеристик турбулентности сплошной среды в инерционном интервале ($\eta \ll r \ll L$), где влияние вязкости отсутствует и детали крупномасштабной конвекции не играют роли. Известные гипотезы подобия Колмогорова приводят к следующему автомодельному представлению для структурных функций второго порядка:

$$S_{ll} = C(\varepsilon r)^{2/3}, \quad S_{nn} = \frac{4}{3}C(\varepsilon r)^{2/3}, \quad (1.1.29)$$

где $C \approx 2,0$ согласно Монин и Яглом (1967), Sreenivasan (1995).

Из соображений размерностей в инерционном интервале можно сконструировать только один масштаб времени $\varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$, так что временной масштаб T_{Lr} должен быть принят равным

$$T_{Lr} = A_2 \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}, \quad A_2 = \text{const.} \quad (1.1.30)$$

Для определения постоянной A_2 привлечем соотношения для эйлеровой структурной функции третьего порядка. В изотропной турбулентности любой тензор третьего ранга может быть представлен в виде (Монин и Яглом, 1967)

$$M_{ijk}(\mathbf{r}, \tau) = [M_{lll}(r, \tau) - 3M_{lnn}(r, \tau)] \frac{r_i r_j r_k}{r^3} + M_{lnn}(r, \tau) \left[\frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right].$$

Для солеидального изотропного поля справедливо соотношение

$$M_{lnn}(r, \tau) = \frac{1}{6} \left[M_{lll}(r, \tau) + r \frac{\partial M_{lll}(r, \tau)}{\partial r} \right],$$

свидетельствующее, что тензор третьего ранга $M_{ijk}(\mathbf{r}, \tau)$ определяется одной продольной компонентой $M_{lll}(r, \tau)$.

Структурные функции третьего порядка могут быть приближенно выражены через структурные функции второго порядка при помо-

щи следующих соотношений (Зайчик и Алипченков, 2004; Zaichik & Alipchenkov, 2005):

$$S_{ijk} = \langle \Delta u'_i \Delta u'_j \Delta u'_k \rangle = -\frac{T_{Lr}}{3} \left(S_{in} \frac{\partial S_{jk}}{\partial r_n} + S_{jn} \frac{\partial S_{ik}}{\partial r_n} + S_{kn} \frac{\partial S_{ij}}{\partial r_n} \right). \quad (1.1.31)$$

Согласно (1.1.31) продольная структурная функция третьего порядка пульсаций скоростей сплошной среды равна

$$S_{lll} = -T_{Lr} S_{ll} \frac{dS_{ll}}{dr}. \quad (1.1.32)$$

С учетом (1.1.29) и (1.1.30) из (1.1.32) следует

$$S_{lll} = -\frac{2}{3} A_2 C^2 \varepsilon r. \quad (1.1.33)$$

Тогда, принимая во внимание известное соотношение Колмогорова для инерционного интервала (Монин и Яглом, 1967)

$$S_{lll} = -\frac{4}{5} \varepsilon r, \quad (1.1.34)$$

из сравнения (1.1.33) и (1.1.34) получаем $2A_2 C^2/3 = 4/5$, откуда $A_2 = 0,3$ при $C = 2,0$.

При больших расстояниях между двумя точками пульсации скоростей в этих точках статистически независимы. Следовательно, во внешнем интервале ($r > L$) корреляционные функции обращаются в нуль, а структурные функции равны

$$S_{ll} = S_{nn} = 2u'^2. \quad (1.1.35)$$

Кроме того, при больших r двухточечный временной масштаб переходит в обычный лагранжев интегральный временной масштаб

$$T_{Lr} = T_L, \quad (1.1.36)$$

а тензор относительной (бинарной) диффузии определяется соотношением

$$D_{ij}^r = 2u'^2 T_L \delta_{ij}, \quad (1.1.37)$$

т.е. равняется удвоенному тензору турбулентной диффузии одиночных жидких частиц (1.1.2).

Для непрерывного описания продольной структурной функции пульсаций скорости во всем диапазоне изменения расстояния между двумя точками r может быть использована аппроксимация Vorgan & Yeung (2004), объединяющая соотношения (1.1.22), (1.1.29) и (1.1.35) для вязкого, инерционного и внешнего пространственных интервалов

$$S_{ll} = 2u'^2 \left[1 - \exp \left(-\frac{\bar{r}}{(15C)^{3/4}} \right) \right]^{4/3} \left(\frac{15^3 \bar{r}^4}{15^3 \bar{r}^4 + (2\text{Re}_\lambda/C)^6} \right)^{1/6}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\eta}. \quad (1.1.38)$$

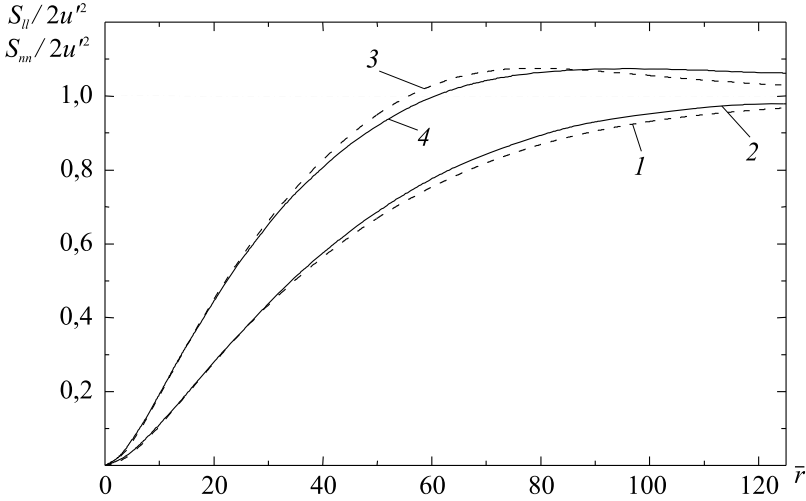


Рис. 1.1.3. Продольная (1, 2) и поперечная (3, 4) эйлеровы структурные функции второго порядка: 1 – (1.1.38); 3 – (1.1.38) и (1.1.39); 2, 4 – Ten Cate *et al.* (2004)

Поперечная структурная функция выражается через продольную в соответствии с (1.1.10) как

$$S_{nn} = S_{ii} + \frac{r}{2} \frac{\partial S_{ii}}{\partial r}. \quad (1.1.39)$$

На рис. 1.1.3 представлены пространственная и поперечная структурные функции, построенные согласно (1.1.38) и (1.1.39) при $C = 2$ и $\text{Re}_\lambda = 61$. Для сравнения также приведены структурные функции, полученные Ten Cate *et al.* (2004) в результате прямого численного моделирования с использованием *решеточного больцмановского (lattice-Boltzmann)* метода. Очевидно, что продольная структурная функция с увеличением расстояния между двумя точками монотонно стремится к удвоенному значению интенсивности пульсаций скорости. Стремление поперечной структурной функции к $2u'^2$ имеет немонотонный характер, т. е. S_{nn} имеет максимум, что отражает наличие отрицательной петли в распределении поперечной пространственной корреляционной функции $G(r)$.

Интегральный временной масштаб инкремента пульсаций скоростей может быть определен из аналогичной (1.1.38) аппроксимации, интерполирующей соотношения (1.1.28), (1.1.30) и (1.1.36) для характерных интервалов

$$T_{Lr} = T_L \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{3/2} \bar{r} \right) \right]^{-2/3} \left(\frac{\bar{r}^4}{\bar{r}^4 + (\bar{T}_L/A_2)^6} \right)^{1/6}, \quad \bar{T}_L = \frac{T_L}{\tau_k}. \quad (1.1.40)$$

Тейлоров временной микромасштаб инкремента пульсаций скоростей τ_{Tr} находится из допущения, что отношение между макро- и микромасштабами не зависит от расстояния r , т.е.

$$\tau_{Tr} = \frac{\tau_T T_{Lr}}{T_L}. \quad (1.1.41)$$

Лагранжев одночастичный корреляционный момент пульсаций температуры сплошной среды определяется как

$$B_{Lt}(\tau) = \langle \vartheta'(\mathbf{x}, t) \vartheta'(\mathbf{R}(t - \tau), t - \tau) | \mathbf{R}(t) = \mathbf{x} \rangle = \langle \vartheta'^2 \rangle \Psi_{Lt}(\tau), \quad (1.1.42)$$

где $\Psi_{Lt}(\tau)$ — лагранжева автокорреляционная функция пульсаций температуры, $\langle \vartheta'^2 \rangle$ — интенсивность пульсаций температуры в турбулентной жидкости.

Эйлеров пространственно-временной корреляционный момент пульсаций температуры, аналогично (1.1.8), представляется в виде произведения пространственной и временной корреляций

$$B_{Et}(\mathbf{r}, t) = \langle \vartheta'(\mathbf{x}, t) \vartheta'(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t - \tau) \rangle = \langle \vartheta'^2 \rangle F_t(\mathbf{r}) \Psi_{Et}(\tau), \quad (1.1.43)$$

где $F_t(\mathbf{r})$ — эйлерова двухточечная одновременная корреляционная функция пульсаций температуры, $\Psi_{Et}(\tau)$ — эйлерова временная одноточечная автокорреляционная функция пульсаций температуры. Аналогично (1.1.12) эйлеровы пространственная и временная корреляционные функции часто аппроксимируются экспоненциальными зависимостями

$$F_t(r) = \exp\left(-\frac{r}{L_t}\right), \quad \Psi_{Et}(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{T_{Et}}\right) \quad (1.1.44)$$

с соответствующими интегральными пространственным и временным масштабами L_t и T_{Et} .

1.2. Движение и теплообмен одиночной частицы

Настоящая книга посвящена анализу поведения небольших твердых сферических частиц в турбулентном потоке. Плотность частиц считается много большей плотности несущей сплошной среды (жидкости), а размер не превышает пространственный колмогоровский микромасштаб. В этом случае уравнения движения для частиц и несущей жидкости могут быть представлены в приближении точечных сил, приложенных к центрам масс отдельных частиц (Boivin *et al.*, 1998; Burton & Eaton, 2005). Кроме того, при рассматриваемых условиях поведение частиц в турбулентной среде определяется, в первую очередь, силой гидродинамического сопротивления. Эта сила оказывается, как правило, главной причиной, приводящей частицы в движение и определяющей тормозящее или ускоряющее обратное воздействие частиц на поток. Так как плотность сплошной среды ρ_f много меньше плотности

материала частиц ρ_p , то силы, обусловленные нестационарностью или неоднородностью движения (*присоединенной массой*, ускорением или замедлением несущего потока — *вытесненной массой* — и эффектом памяти — *силой Бассэ*) могут не приниматься во внимание (Махеву & Райли, 1983; Michaelides, 2003). Тщательное исследование влияния этих сил на турбулентное движение частиц в широком диапазоне отношения плотностей $2,65 \leq \rho_p/\rho_f \leq 2650$ выполнили Argenio & Fiorotto (2001), используя прямое численное моделирование. В результате было получено, что во всем рассмотренном диапазоне ρ_p/ρ_f вклад эффекта присоединенной массы в баланс сил, действующих на частицу, несущественен; при этом вклад, обусловленный ускорением несущего потока и эффектом памяти, может быть довольно значительным. Однако, как показано Argenio & Fiorotto (2001), влияние всех трех сил на дисперсию частиц в турбулентном потоке по сравнению с силой сопротивления пренебрежимо мало и может не учитываться даже при $\rho_p/\rho_f = O(1)$. Эффекты, связанные с вращением частиц и существенные при анализе движения относительно крупных частиц, в настоящей книге также не рассматриваются.

Таким образом, движение одиночной тяжелой частицы описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{R}_p}{dt} = \mathbf{v}_p, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}_p, t) - \mathbf{v}_p}{\tau_p} + \mathbf{F}, \quad (1.2.2)$$

где \mathbf{R}_p и \mathbf{v}_p — координата и скорость частицы, $\mathbf{u}(\mathbf{R}_p, t)$ — скорость жидкости в точке $\mathbf{x} = \mathbf{R}_p(t)$.

Первый член в правой части уравнения (1.2.2) определяет силу гидродинамического сопротивления движению частицы в вязкой жидкости. Величина τ_p обозначает время динамической релаксации частицы

$$\tau_p = \frac{\tau_{p0}}{\varphi(\text{Re}_p)}, \quad \tau_{p0} = \frac{\rho_p d_p^2}{18\rho_f\nu}, \quad (1.2.3)$$

где τ_{p0} — время релаксации в стоксовом приближении ($\text{Re}_p \rightarrow 0$), d_p — диаметр частицы, $\text{Re}_p \equiv d_p|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|/\nu$ — число Рейнольдса обтекания частицы.

Зависимость $\varphi(\text{Re}_p)$ в (1.2.3) характеризует влияние сил инерции на гидродинамическое сопротивление частицы. Для определения этой зависимости в литературе предложено большое количество формул, аппроксимирующих стандартную кривую сопротивления для сферической частицы. Наибольшее распространение получила аппроксимация Шиллера–Неймана (Clift *et al.*, 1978)

$$\varphi(\text{Re}_p) = \begin{cases} 1 + 0,15\text{Re}_p^{0,687} & \text{при } \text{Re}_p \leq 10^3 \\ 0,11\text{Re}_p/6 & \text{при } \text{Re}_p > 10^3 \end{cases}. \quad (1.2.4)$$

Если размер частицы намного меньше пространственного масштаба турбулентности, влияние пульсаций скорости на ее гидродинамическое сопротивление, естественно, отсутствует. Bagchi & Balachandrar (2003) выполнили прямое численное моделирование эффекта турбулентности обтекающего потока на сопротивление относительно крупных частиц, диаметр которых в 1,5–10 раз превышает колмогоровский пространственный масштаб. Было установлено, что турбулентные пульсации не оказывают существенного влияния на осредненную силу сопротивления, описываемую стандартной корреляцией (1.2.4). Однако точность аппроксимации (1.2.4) применительно к предсказанию мгновенной силы сопротивления с увеличением размера частицы снижается. Этот результат свидетельствует о необходимости выполнения условия $d_p < \eta$ при анализе взаимодействия частиц с турбулентными вихрями сплошной среды в рамках приближения точечных сил. Кроме того, в случае крупной частицы при больших числах Рейнолдса обтекания важную роль играют эффекты взаимодействия образующегося за частицей следа с турбулентностью окружающей среды (Wu & Faeth, 1994a,b; Pan & Banerjee, 1997; Bagchi & Balachandrar, 2004; Legendre *et al.*, 2006); однако анализ этих эффектов выходит за рамки данной книги.

Второй член в правой части (1.2.2) обозначает силы различной физической природы, например, силу тяжести. В пристеночных потоках, для которых характерны большие градиенты всех параметров течения, существенную роль может играть *подъемная сила* (*сила Сэффмэна*), обусловленная сдвигом скорости (Saffman, 1965, 1968). Однако с ростом отношения плотностей дисперсной и сплошной фаз ρ_p/ρ_f роль подъемной силы уменьшается. В неизотермическом потоке вблизи нагреваемой или охлаждаемой поверхности значительное влияние на движение мелких (субмикронных) частиц может оказывать сила *термофореза*, направленная в сторону более холодной среды. Таким образом, под символом \mathbf{F} в дальнейшем будем понимать не только внешнюю массовую силу (например, силу тяжести), но и обозначение для сил межфазного взаимодействия, отличных от силы гидродинамического сопротивления (силы Сэффмэна, термофореза и т.д.). При этом, в отличие от силы сопротивления, величина \mathbf{F} рассматривается как детерминированная, т.е. пульсации входящих в \mathbf{F} параметров не принимаются во внимание, так как эффекты, связанные с пульсациями этих сил, за редким исключением, оказываются незначительными.

При анализе теплообмена термической неоднородностью на масштабах размера частицы в большинстве приложений можно пренебречь. В этом случае изменение температуры одиночной частицы без учета радиационного теплообмена описывается уравнением

$$\frac{d\theta_p}{dt} = \frac{\vartheta(\mathbf{R}_p, t) - \theta_p}{\tau_t} + Q, \quad (1.2.5)$$

где θ_p — температура частицы, $\vartheta(\mathbf{R}_p, t)$ — температура жидкости в точке $\mathbf{x} = \mathbf{R}_p(t)$, τ_t — время термической релаксации частицы.

Первый член в правой части уравнения (1.2.5) определяет межфазный теплообмен, обусловленный кондуктивным и конвективным механизмами переноса тепла в жидкости. Величина Q обозначает интенсивность тепловыделения в частице, например, вследствие горения. Время термической релаксации частицы определяется соотношением

$$\tau_t = \frac{C_p \rho_p d_p^2}{6\lambda \text{Nu}_p}, \quad (1.2.6)$$

где C_p — теплоемкость материала частицы, λ — коэффициент теплопроводности жидкости.

Для расчета числа Нуссельта обтекания частицы Nu_p в широком диапазоне изменения Re_p можно воспользоваться известной зависимостью (Ranz & Marshall, 1952)

$$\text{Nu}_p = 2 + 0,6\text{Re}_p^{1/2}\text{Pr}^{1/3},$$

где Pr — число Прандтля жидкости.

1.3. Корреляции скорости и температуры жидкости вдоль траекторий инерционных частиц

Поведение частиц в турбулентном потоке определяется их взаимодействием с турбулентными вихрями сплошной среды, находящимися на пути движения этих частиц. Поэтому при описании статистических характеристик дисперсной фазы в турбулентной жидкости фундаментальную роль играют корреляции скорости и температуры жидкости, определенные вдоль траекторий инерционных частиц. Очевидно, что эти корреляции в предельном случае безынерционных частиц ($\tau_p \rightarrow 0$) совпадают с соответствующими лагранжевыми корреляциями жидких частиц. Напротив, в случае очень инерционных частиц, слабо реагирующих на турбулентные пульсации сплошной среды, корреляции вдоль траекторий частиц должны совпадать с соответствующими эйлеровыми корреляциями жидкости, отражающими статистическую связь между флуктуациями параметров в фиксированных точках пространства. Таким образом, для нахождения корреляций скорости и температуры жидкости вдоль траекторий инерционных частиц необходимо знать соотношения между лагранжевыми и эйлеровыми корреляционными моментами в турбулентной жидкости. Задача определения соотношений между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками турбулентности тесно связано с задачей о диффузии (дисперсии) пассивной примеси (Lumley, 1962; Saffman, 1963; Kraichnan, 1964, 1970; Philip, 1967; Phythian, 1975; Lundgren & Pointin, 1976; Weinstock, 1976; Lundgren, 1981; Lee & Stone, 1983; Middleton, 1985; Squires & Eaton, 1991a; Kontomaris & Hanratty, 1993; Hesthaven *et al.*, 1995; Степанов, 1996).