Марченков С.С.

Конечные автоматы

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 519.7
ББК 22.176
М 30

Марченков С.С. **Конечные автоматы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 56 с. — ISBN 978-5-9221-0946-8.

Брошюра знакомит читателя с простейшими вычислительными устройствами — конечными автоматами. Изучаются автоматы-распознаватели (автоматы без выхода) и автоматы-преобразователи (автоматы с выходом). С различных точек зрения характеризуются конечно-автоматные множества — множества, распознаваемые конечными автоматами. Рассматриваются некоторые обобщения конечных автоматов. Решается важная задача о расшифровке конечных автоматов. Исследуются функции, реализуемые автоматами с выходом. Вводится понятие эквивалентности автоматов с выходом и решается задача о расшифровке автоматов с выходом.

Для школьников старших классов и студентов вузов, знакомящихся с теорией автоматов.

Учебное издание

МАРЧЕНКОВ Сергей Серафимович

КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

Редактор *С.А. Тюрина*
Корректор *В.Р. Игнатова*
Оригинал-макет: *В.В. Затекин*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 22.02.08. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,85. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

ISBN 978-5-9221-0946-8

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»
140010, г. Люберцы, Московская обл., Октябрьский пр-т, 403

9 785922 109468

ISBN 978-5-9221-0946-8

Предисловие

Теория автоматов — сравнительно молодая наука. Началом ее возникновения считается середина 1950-х годов. В это время в нескольких научных центрах СССР и США велись исследования по созданию математической модели нейрона, нервной сети и, более общо, — дискретного преобразователя с конечной памятью, осуществляющего последовательную переработку информации. Помимо запросов со стороны биологии и техники имелись и другие, не менее существенные, предпосылки к возникновению теории автоматов: алгоритмические, логические, алгебраические.

За 50 лет своего существования теория автоматов превратилась в самостоятельную математическую дисциплину с широким кругом собственных проблем и методов и многочисленными связями с другими разделами математики и естествознания в целом. Оказалось, что идея дискретного преобразователя с конечной памятью — идея конечного автомата — хорошо вписывается и находит применение в целом ряде математических дисциплин: математической логике и теории алгоритмов, алгебре, теории вероятностей, кибернетике, математическом программировании, теории графов и теории формальных языков.

Отдельно следует сказать о (математической) биологии и технике. Начиная с момента становления в теории автоматов не прекращаются исследования по математическим моделям сложных биологических систем. Сотрудничество между биологами и специалистами по теории автоматов приносит положительные результаты обеим сторонам. В биологии открываются возможности использовать в исследованиях строгие математические модели, а также разветвленную систему понятий и методов, разработанных в теории автоматов. Математики, в свою очередь, могут познакомиться с новейшими открытиями биологии в области организации, функционирования, передачи и переработки информации в сложных биологических системах. Что касается современной техники, то едва ли не каждое достаточно сложное техническое устройство можно рассматривать как конечный автомат. В первую очередь это относится к устройствам, имеющим память. Однако многие промышленные и бытовые преобразователи (механические, электромеханические, электронные) также следует отнести к конечным автоматам.

Само понятие конечного автомата представляется весьма простым и, по-видимому, в содержательном виде давно использовалось многими математиками и инженерами. В нем формализуется идея дискретного преобразователя информации, который работает над линейными последовательностями символов и в процессе работы использует конечную память (конечное число «состояний»). Как показала история рождения и развития теории автоматов, эту идею можно формализовать различными способами: чисто функционально с помощью систем уравнений, на языке теории графов (диаграммы Мура), а также с помощью логических сетей (схем) определенного вида. Простота и доступность понятия конечного автомата способствовали тому, что в короткое время основами теории конечных автоматов овладело большое число специалистов из различных областей естествознания. Это привело к проникновению идей и методов теории автоматов в различные математические (и не только) дисциплины, к постановке и решению с их помощью задач, зачастую весьма далеких от конечных автоматов. Процесс этот непрерывен, и автор выражает скромную надежду на то, что кто-либо из сегодняшних читателей этой брошюры заинтересуется автоматной проблематикой и сумеет в будущем получить интересные результаты в теории автоматов и ее приложениях.

Брошюра состоит из двух глав. Это соответствует двум точкам зрения на автоматы: автоматы как распознаватели (автоматы без выхода) и автоматы как преобразователи (автоматы с выходом). Первая глава содержит больше материала, нежели вторая. Это связано в основном с тем, что автоматы без выхода объективно проще автоматов с выходом, и многие факты принципиального характера удобнее доказывать именно для автоматов без выхода.

Автор адресует эту книгу прежде всего ученикам старших классов средней школы. Книга будет также полезна студентам младших курсов университетов и технических вузов, изучающим дискретную математику и математическую кибернетику.

Глава I

АВТОМАТЫ КАК РАСПОЗНАВАТЕЛИ (АВТОМАТЫ БЕЗ ВЫХОДА)

§ 1. Алфавит, буквы, слова

Алфавитом называется произвольное конечное множество. Если алфавит A состоит из элементов $a_1, \ldots, a_m$, то этот факт записывается в виде $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Элементы $a_1, \ldots, a_m$ алфавита A называются *буквами* алфавита A. Конечная последовательность букв алфавита A, записанных без пропусков одна за другой, называется *словом* в алфавите A. Например, если $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, то последовательности

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_1a_1, \quad a_2a_1, \quad a_3a_2a_2a_1, \quad a_2a_3a_1a_2a_3$$

суть слова в алфавите A. Множество всех слов в алфавите A принято обозначать через A^*.

По соображениям, которые станут понятны чуть позже, в множество A^* включают *пустое* слово Λ — слово, не содержащее ни одной буквы. Несмотря на то, что это понятие кажется несколько искусственным, пустое слово играет важную роль как в теории автоматов, так и в других разделах математики.

На множестве A^* введем операцию *соединения* (или *конкатенации*) слов: если $\overline{a}, \overline{b}$ — слова в алфавите A^*, то *соединением* слов $\overline{a}, \overline{b}$ называется слово $\overline{a}\overline{b}$, полученное из слова $\overline{a}$ приписыванием справа слова $\overline{b}$. Отметим особенность соединения слова Λ с другими словами: если $\overline{a}$ — произвольное слово в алфавите A^*, то $\Lambda\overline{a} = \overline{a}\Lambda = \overline{a}$. В частности, $\Lambda\Lambda = \Lambda$. Для любого непустого слова $\overline{a}$ через $\overline{a}^{\,n}$ будем обозначать слово, полученное соединением n экземпляров слова $\overline{a}$.

В дальнейшем мы часто будем рассматривать различные множества X слов в алфавите A. Этот факт будем обозначать $X \subseteq A^*$ и говорить, что X есть *подмножество* множества A^*. Если слово $\overline{a}$ является элементом множества X (слово $\overline{a}$ входит в множество X), то пишем $\overline{a} \in X$. Отметим, что знаки $\subseteq$ и $\in$ применяются в совершенно различных ситуациях. Соотношение $X \subseteq A^*$ означает, что каждый элемент множества X является